

Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**11**  
класс

ИЛЕКСА

Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**11 класс**

Учебник для общеобразовательных учреждений  
Базовый и профильный уровни

*Рекомендовано  
Министерством образования и науки  
Российской Федерации*

Москва  
ИЛЕКСА  
2012






УДК 373.167.1: [512 + 517]

ББК 22.14я72

Н49

На учебник получены положительные заключения  
Российской академии наук (№ 10106-5215/637 от 14.10.2011)  
и Российской академии образования (№ 01-5/7д-77 от 20.10.2010)

Условные обозначения в учебнике

	главное в учебном материале
	начало решения задачи
	окончание решения задачи
	начало обоснования утверждения
	окончание обоснования утверждения

**Нелин Е.П., Лазарев В.А.**

**Н49** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для  
общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. —  
М.: Илекса, 2012, — 432 с.: ил.

ISBN 978-5-89237-351-7

Содержание учебника соответствует федеральным компонентам государственного стандарта общего образования по математике и содержит материал как базового, так и профильного уровня.

Учебник ориентирован на подготовку учащихся к успешной сдаче Единого государственного экзамена и вступительных экзаменов в ВУЗы.

УДК 373.167.1: [512 + 517]

ББК 22.14я72

© Нелин Е.П., Лазарев В.А., 2012

© Издательство ИЛЕКСА, 2012

© Издательство ИЛЕКСА:

оригинал-макет, художественное  
оформление, 2012

ISBN 978-5-89237-351-7

## Предисловие для учащихся

Предлагаемый учебник для 11 класса является продолжением учебника «Алгебра и начала математического анализа» для 10 класса. В 11 классе рассматривается принципиально новая часть курса — начала математического анализа. Математический анализ — отрасль математики, сформированная в XVIII в., которая сыграла значительную роль в развитии естествознания: появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, возникающих при решении разнообразных прикладных задач. Также в 11 классе будут рассмотрены элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики, которые находят широкое применение в различных отраслях знаний.

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником.

Система учебного материала учебника по каждой теме представлена на двух уровнях. *Основной материал* приведен в параграфах, номера которых в содержании напечатаны на белом фоне. *Дополнительный материал* (номера параграфов в содержании напечатаны на синем фоне, а в тексте учебника номера таких параграфов и пунктов помещены в овальную синюю рамку) предназначен для овладения темой на более глубоком уровне и может осваиваться учеником самостоятельно или под руководством учителя при изучении математики на базовом уровне, а может использоваться для систематического изучения курса алгебры и начал анализа на профильном уровне.

В начале большинства параграфов приведены *справочные таблицы*, содержащие основные определения, свойства и *ориентиры* по поиску плана решения задач по теме. Для ознакомления с основными идеями решения задач приводятся примеры, в которых, кроме самого решения, содержится *комментарий*, помогающий составить план решения аналогичного задания.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предлагается система вопросов и упражнений. Ответы на эти вопросы и примеры решения аналогичных упражнений можно найти в тексте параграфа. Система упражнений к основному материалу дана на трех уровнях. *Задачи обязательного уровня* обозначены символом «°», *более сложные задачи достаточного уровня* даны без обозначений, а *задачи высокого уровня сложности* обозначены символом «\*». Заметим, что в учебнике и для многих задач углубленного уровня предлагаются специальные ориентиры, которые позволяют освоить методы их решения. (Многие из приведенных задач предлагались в заданиях ЕГЭ по математике и на вступительных экзаменах в различные вузы страны. Список принятых сокращений названий вузов приведен на с. 425.) *Ответы и указания* для большинства упражнений приводятся в соответствующем разделе. О происхождении понятий, терминов и символов вы сможете узнать, прочитав «Сведения из истории».

### Предисловие для учителя

Предлагаемый учебник направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения в старшей школе, организацию личностно-ориентированного обучения математике, создание условий для дифференциации содержания обучения старшеклассников, для построения индивидуальных образовательных программ. Учебник подготовлен в соответствии со стандартом среднего (полного) общего образования по математике (базового и профильного уровней).

Как известно, в обучении учебник выполняет две основные функции: 1) является источником учебной информации, которая раскрывает в доступной для учащихся форме предусмотренное образовательным стандартом содержание; 2) выступает средством обучения, с помощью которого осуществляется организация учебного процесса, в том числе и самообразование учащихся.

Укажем основные отличия предложенного учебника от других учебников по алгебре и началам анализа в выполнении этих функций.

Это *двухуровневый учебник*, содержащий общий материал для классов, в которых учащиеся изучают математику на базовом или профильном уровне, и дополнительный материал для классов, которые изучают математику на профильном уровне. В каждом разделе наряду с параграфами, которые предназначены для овладения учениками стандартом математического образования на базовом уровне, есть систематический материал, предназначенный для организации индивидуальной работы с учениками, которые интересуются математикой. Предложенный дополнительный материал может использоваться и для организации обучения алгебре и началам математического анализа в классах физико-математического (или другого) профиля, учебные планы которых предусматривают повышенный уровень овладения материалом курса.

Основной материал, который должны усвоить учащиеся, структурирован в форме *справочных таблиц* в начале параграфа, которые содержат систематизацию теоретического материала и *способы деятельности* с этим материалом в форме специальных ориентиров по решению задач. **В первую очередь ученики должны усвоить материал, который содержится в таблицах.** Поэтому при объяснении нового материала целесообразно применить работу с учебником по соответствующим таблицам и рисункам. Все необходимые объяснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать свой собственный уровень ознакомления с этими обоснованиями.

Подчеркнем, что любой учебник алгебры и начал математического анализа должен обеспечить не только ознакомление учащихся с основными алгебраическими понятиями и их свойствами, но и формирование способов деятельности с этими понятиями. Систему условий, на которую реально опирается учащийся при выполнении действия, психологи называют ориентировочной основой деятельности. Если учащимся предлагают достаточно общие ориентировочные основы для выполнения соответствующих заданий в виде специальных правил и алгоритмов, то говорят, что им предлагаются ориентировочные основы второго и третьего типов. Как правило, в учебниках алгебры и начал математического анализа для 10–11 классов учащимся предлагаются только образцы выполнения заданий, а затем учащиеся приступают к самостоятельной деятель-

ности, ориентируясь на эти образцы (в этом случае говорят, что учащимся предлагаются ориентировочные основы первого типа). Такое обучение предполагает, что учащийся самостоятельно выполнит систематизацию и обобщение способов деятельности, ориентируясь на предложенные образцы, и выделит для себя ориентировочную основу выполнения рассмотренных заданий. Как правило, в этом случае ориентировочная основа, которая образуется у учащегося, неполная и, кроме того, часто не осознана, так как учащийся не может объяснить, почему при выполнении задания он выполнил именно такие преобразования, а не другие.

По этой причине одним из принципов построения данного учебника было выделение для учащихся ориентировочных основ соответствующей деятельности по выполнению алгебраических заданий непосредственно в учебнике.

В каждом разделе решению упражнений предшествует выделение общих ориентиров по решению таких задач. Поэтому важной составляющей работы с предложенным учебником является обсуждение выбора соответствующих ориентиров и планов решения задач. Объяснение методов решения ведется по схеме:

#### Решение

Как можно записать  
решение задачи

#### Комментарий

Как можно рассуждать  
при решении такой задачи

При такой подаче учебного материала комментариев, в котором объясняется решение, не мешает восприятию основной идеи и плана решения задач определенного вида. Это позволяет ученику, который уже усвоил способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задания, а ученику, которому необходима консультация по решению, — получить такую детальную консультацию, которая содержится в комментариях.

За счет четкого выделения общих ориентиров работы с практическими заданиями курса удается часть «нестандартных» (с точки зрения традиционных учебников) задач перевести в разряд «стандартных» (например, уравнения, для решения которых приходится применить свойства функций). Это позволяет уменьшить разрыв между уровнем требований традиционной государственной итоговой аттестации по алгебре и началам математического анализа и уровнем требований по этому курсу на вступительных экзаменах в вузы и в заданиях Единого государственного экзамена (ЕГЭ), а также ознакомить учеников с методами решения задач, которые предлагаются на вступительных экзаменах в вузы и в заданиях ЕГЭ. В частности, даже если ученик изучает математику на базовом уровне, ему предоставляется возможность ознакомиться с методами и идеями решения заданий вступительных экзаменов по математике, а также с методами решения и оформлением заданий второй части (С) ЕГЭ по математике.

Авторы выражают огромную благодарность рецензентам учебника: членам предметных экспертных комиссий РАН и РАО по анализу и оценке содержания учебной литературы, а также кандидату физико-математических наук, доценту МГУ им. М. В. Ломоносова Александру Борисовичу Будаку и Надежде Анатольевне Шиховой за детальный анализ рукописи и сделанные ценные конструктивные замечания и предложения.

# Раздел

# 1

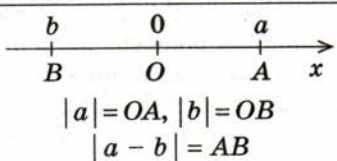
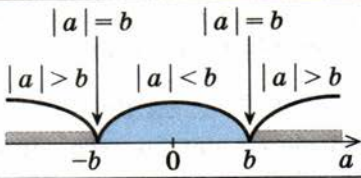
## ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

### § 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

Таблица 1

1. Числовые множества		
<b>Действительные числа* <math>R</math></b>		
Числа, которые можно представить в виде бесконечной десятичной дроби		
<p style="text-align: center;"><b>Рациональные числа <math>Q</math></b></p> <p>Можно представить в виде несократимой дроби <math>\frac{m}{n}</math>, где <math>m</math> — целое, <math>n</math> — натуральное число.</p> <p>Записываются в виде конечной или бесконечной периодической дроби (<math>\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,(3)</math>)</p>	<p style="text-align: center;"><b>Иррациональные числа</b></p> <p>Нельзя представить в виде несократимой дроби <math>\frac{m}{n}</math>, где <math>m</math> — целое, <math>n</math> — натуральное число.</p> <p>Записываются в виде бесконечной непериодической дроби (<math>\sqrt{2} = 1,4142135\dots</math>)</p>	
<p style="text-align: center;"><b>Целые числа <math>Z</math></b></p> <p>Включают натуральные числа, числа, противоположные им, и число нуль</p>	<p style="text-align: center;"><b>Дробные числа</b></p> <p>Числа, состоящие из целого числа равных частей единицы</p> <p>(<math>\frac{2}{5}</math> — обыкновенная дробь, 1,23 — десятичная дробь: <math>1,23 = \frac{123}{100}</math>)</p>	
<p style="text-align: center;"><b>Натуральные числа <math>N</math> (целые положительные)</b></p> <p>Для школьного курса математики натуральное число — основное неопределяемое понятие</p>	<p style="text-align: center;"><b>Число 0</b></p> <p>Такое число, при сложении с которым любое число не изменяется</p> <p style="text-align: center;"><math>(a + 0 = 0 + a = a)</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Целые отрицательные числа</b></p> <p>Числа, противоположные натуральным</p>

\* В разделе 4 § 20 будет рассмотрено еще одно числовое множество — комплексные числа, которое включает в себя множество действительных чисел.

2. Модуль действительного числа и его свойства	
Определение	Геометрический смысл модуля
<p><i>Модулем</i> положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю</p> $ a  = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$	 <p>На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число. Модуль разности двух чисел <math>a</math> и <math>b</math> — это расстояние между точками <math>a</math> и <math>b</math> на координатной прямой</p>
Свойства	
1. $ a  \geq 0$	Модуль любого числа — неотрицательное число
2. $ -a  =  a $	Модули противоположных чисел равны
3. $a \leq  a $ , то есть $- a  \leq a \leq  a $	Каждое число не больше своего модуля
4. При $b > 0$ $ a  \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$	
5. При $b > 0$ $ a  \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ или $a \geq b$	
6. $ a \cdot b  =  a  \cdot  b $	Модуль произведения равен произведению модулей множителей
7. $\left  \frac{a}{b} \right  = \frac{ a }{ b }$ ( $b \neq 0$ )	Модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю)
8. $ a^n  =  a ^n$	$ a ^2 = a^2$ $ a ^{2k} = a^{2k}$
9. $ a + b  \leq  a  +  b $ $ a_1 + a_2 + \dots + a_n  \leq  a_1  +  a_2  + \dots +  a_n $	Модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых
10. $  a  -  b   \leq  a \pm b  \leq  a  +  b $	



## Объяснение и обоснование

**1. Числовые множества.** В курсе математики вы встречались с разными числами: натуральными, целыми, рациональными, иррациональными, действительными. Представление о числах у человечества складывалось постепенно, под воздействием требований практики. Например, *натуральные числа* появились в связи с необходимостью счета предметов. Но для того чтобы дать ответ на вопрос «Сколько спичек в пустой коробке из-под спичек?», множества натуральных чисел  $N = \{1; 2; 3; \dots\}$  недостаточно — для этого необходимо иметь еще и число нуль. Присоединяя к множеству  $N$  натуральных чисел число 0, получаем множество *неотрицательных целых чисел*. Его часто обозначают  $Z_+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ . Одних только неотрицательных целых чисел оказалось недостаточно для решения задач практики (а следовательно, и математических задач, отображающих заданную реальную ситуацию). Так, для того чтобы охарактеризовать температуру воздуха выше и ниже нуля или движение тела в противоположных направлениях, необходимы противоположные натуральным числа, то есть *отрицательные числа*. Для натурального числа  $n$  противоположным считается число  $-n$ , а для числа  $-n$  противоположным считается число  $n$ . Нуль считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число нуль составляют множество  $Z$  *целых чисел*.

Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел и введения рациональных чисел. Например, средняя многолетняя температура воздуха в январе в г. Курске составляет  $-7,3$  °С, длительность урока — 45 минут, или  $\frac{3}{4}$  часа.

Выбирая какую-либо единицу измерения, мы получаем числовое значение величин, которое может выражаться с помощью разных рациональных чисел — целых и дробных, положительных и отрицательных.

Целые и дробные числа составляют множество  $Q$  *рациональных чисел*.

Любое рациональное число можно записать в виде дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$  (то есть числитель  $m$  является целым числом, а знаменатель  $n$  — натуральным).

Рациональное число может быть записано разными дробями. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}, \quad -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35}, \quad 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100}, \quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

Как видно из приведенных примеров, среди дробей, которые изображают данное рациональное число, всегда есть единственная несократимая дробь<sup>1</sup> (для целых чисел — это дробь, знаменатель которой равен 1).

<sup>1</sup> Напомним, что дробь  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$  ( $m \neq 0$ ),  $n \in N$ , называют несократимой, если наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел  $|m|$  и  $n$  равен 1.

Обратим внимание, что рациональное число, записанное в виде дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , можно также записать в виде конечной или бесконечной периодической<sup>1</sup> десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель. Например,  $\frac{3}{4} = 0,75$ ,  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ .

Договоримся, что конечную десятичную дробь можно изображать в виде бесконечной, у которой после последнего десятичного знака, отличного от нуля, на месте следующих десятичных знаков записываются нули, например,  $\frac{3}{4} = 0,75 = 0,75000\dots$ .

Целые числа также договоримся записывать в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули, например,  $13 = 13,000\dots$ . Таким образом, любое рациональное число может быть записано как бесконечная периодическая дробь. Напомним, что у бесконечной периодической дроби, начиная с некоторого разряда, все десятичные знаки повторяются. Группу цифр, которая повторяется, называют *периодом*. При записи периодической дроби период записывают в скобках. Например,  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3)$ ,  $\frac{3}{22} = 0,136363636\dots = 0,1(36)$ .

Таким образом, *каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби и, наоборот, каждая бесконечная периодическая дробь задает рациональное число.*

Обратим внимание, что любая периодическая десятичная дробь с периодом девять равна бесконечной десятичной дроби с периодом нуль, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом первой дроби. Например, бесконечные периодические дроби  $0,2(9)$  и  $0,3(0)$  являются записью одного и того же рационального числа  $\frac{3}{10}$ . Действительно, учитывая, что сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $a_1$  и знаменателем  $q$  вычисляется по формуле  $S = \frac{a_1}{1-q}$ ,

$$\begin{aligned} \text{имеем } 0,2(9) &= 0,2999\dots = 0,2 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10\,000} + \dots = 0,2 + \frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = \\ &= 0,2 + \frac{1}{10} = 0,3 = 0,3(0). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Периодичность получаемой десятичной дроби следует из того, что при делении на натуральное число  $n$  ( $n \neq 1$ ) мы можем получить не более  $n$  различных остатков:  $0; 1; 2; \dots; (n - 1)$ . Поэтому начиная с  $(n + 1)$ -го шага деления (или даже раньше) остатки обязательно начнут повторяться, а если учитывать однозначность нахождения неполного частного и остатка на каждом шаге деления, то будут повторяться и полученные десятичные знаки.

В дальнейшем, записывая рациональные числа с помощью бесконечных периодических десятичных дробей, договоримся исключить из рассмотрения бесконечные периодические дроби, период которых равен девяти.

Каждое рациональное число можно изобразить точкой на координатной прямой (то есть прямой, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица измерения). Например, на рисунке 1 изображены несколько рациональных чисел



Рис. 1

$(0; 1; -\frac{1}{2}; 2,5)$ .

Однако на координатной прямой есть точки, изображающие числа, которые не являются рациональными. Например, из курса алгебры известно, что число  $\sqrt{2}$  не является рациональным. Это так называемое иррациональное число (см. также пример 2 на с. 15). Если построить квадрат со стороной, равной 1, на координатной прямой  $x$  (рис. 2), то его диагональ будет равна  $\sqrt{2}$ . Тогда, проведя дугу окружности радиуса  $OM = \sqrt{2}$  с центром в точке  $O$ , получим точку  $M$ , координата которой равна  $\sqrt{2}$ . Кроме числа  $\sqrt{2}$ , вы также встречались с иррациональными числами  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{10}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\lg 2$  и др.

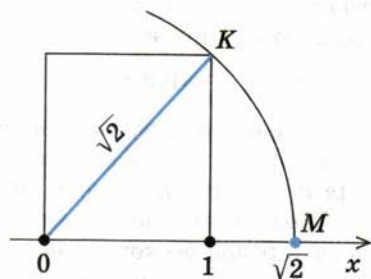


Рис. 2

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел\*  $\mathbf{R}$ . На координатной прямой каждому действительному числу соответствует единственная точка и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число (в этом случае говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие).

*Каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби: рациональные числа — в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а иррациональные — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.*

Напомним, что для сравнения действительных чисел и выполнения действий над ними (в случае, когда хотя бы одно из них не является рациональным) используются приближенные значения этих чисел. В частности, для сравнения двух действительных чисел последовательно рассматриваем их приближенные значения с недостатком с точностью до целых, десятых, сотых и т. д. до тех пор, пока не получим, что какое-то приближенное значение одного числа больше соответствующего приближенного значения второго. Тогда то число, у которого при-

\* Более детально о множестве действительных чисел и действиях над ними см. с. 193. Свойства действий над действительными числами рассматриваются также в § 20.

ближенное значение больше, и считается большим. Например, если  $\alpha = \sqrt{3} = 1,7320508\dots$ ,  $\beta = 1\frac{3}{4} = 1,750000\dots$ , то  $\alpha < \beta$  (поскольку  $1,73 < 1,75$ ).

Для выполнения сложения или умножения рассмотренных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  последовательно записывают их приближенные значения с недостатком и с избытком (с точностью до целых, десятых, сотых и т. д.) и выполняют действия над полученными рациональными числами. В результате последовательно получаем значение суммы или произведения с необходимой точностью.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1,7 < \alpha < 1,8$	$1,7 < \beta < 1,8$	$3,4 < \alpha + \beta < 3,6$	$2,89 < \alpha\beta < 3,24$
$1,73 < \alpha < 1,74$	$1,75 < \beta < 1,76$	$3,48 < \alpha + \beta < 3,50$	$3,0275 < \alpha\beta < 3,0624$
$1,732 < \alpha < 1,733$	$1,750 < \beta < 1,751$	$3,482 < \alpha + \beta < 3,84$	$3,031 < \alpha\beta < 3,034483$
...	...	...	...

Как видим,  $\alpha + \beta = 3,48\dots$ ,  $\alpha\beta = 3,03\dots$ .

В курсе математического анализа доказывается, что в случае, когда приближенные значения чисел  $\alpha$  и  $\beta$  последовательно берутся с точностью до целых, десятых, сотых и т. д., значения суммы  $\alpha + \beta$  с недостатком и с избытком стремятся к одному и тому же числу, которое и принимается за значение суммы  $\alpha + \beta$  (аналогично определяется и произведение  $\alpha\beta$ ).

## 2. Модуль действительного числа и его свойства. Напомним определение модуля.

*Модулем положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю.*

Это определение можно коротко записать несколькими способами.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$$

При необходимости мы будем пользоваться любой из этих записей определения модуля. Для нахождения  $|a|$ , согласно определению, необходимо знать знак числа  $a$  и использовать соответствующую формулу. Например,  $|5| = 5$ ,  $|-3| = -(-3) = 3$ ,  $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$ .

*На координатной прямой модуль числа — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.*

Действительно, если  $a > 0$  (рис. 3), то расстояние  $OA = a = |a|$ . Если  $b < 0$ , то расстояние  $OB = -b = |b|$ .

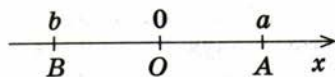


Рис. 3

**Модуль разности двух чисел  $a$  и  $b$  — это расстояние между точками  $a$  и  $b$  на координатной прямой.**

- Для доказательства можно воспользоваться тем, что при параллельном переносе вдоль оси координат на  $b$  единиц абсцисса соответствующей точки изменяется на  $b$ : к абсциссе данной точки прибавляется число  $b$ , то есть при  $b > 0$  точка переносится вправо, а при  $b < 0$  — влево. Обозначим на координатной прямой числа  $a$ ,  $b$ ,  $a - b$  соответственно точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . На рисунке 4 эти точки изображены для случая  $a > 0$  и  $b < 0$ , хотя

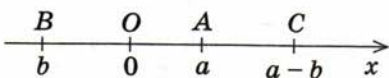


Рис. 4

приведенное далее обоснование не зависит от знаков  $a$  и  $b$ .

При параллельном переносе вдоль оси  $Ox$  на  $b$  единиц точка  $O$  перейдет в точку  $B$ , а точка  $C$  (с координатой  $a - b$ ) в точку с координатой  $a - b + b = a$ , то есть в точку  $A$ . Тогда

$CO = AB$ . Но расстояние  $CO$  — это расстояние от точки  $a - b$  до начала координат, следовательно,  $CO = |a - b|$ , а значит, и  $AB = |a - b|$ .

Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно обосновать свойства модуля, приведенные в таблице 1.

Например, учитывая, что  $|a|$  — это расстояние от точки  $a$  до точки  $O$ , а расстояние может выражаться только неотрицательным числом, получаем:

$$|a| \geq 0,$$

то есть модуль любого числа является неотрицательным числом.

Учитывая, что точки  $a$  и  $-a$  находятся на одинаковом расстоянии от точки  $O$ , получаем:

$$|-a| = |a|.$$

Это означает, что модули противоположных чисел равны.

Если  $a \geq 0$ , то  $|a| = a$ , а если  $a < 0$ , то  $a < |a|$ . Следовательно, всегда

$$a \leq |a|,$$

то есть каждое число не превышает его модуль.

Если в последнее неравенство вместо  $a$  подставить  $-a$  и учесть, что  $|-a| = |a|$ , то получаем неравенство  $-a \leq |a|$ . Отсюда  $a \geq -|a|$ , что вместе с неравенством  $a \leq |a|$  свидетельствует о том, что для любого действительного числа  $a$  выполняется двойное неравенство

$$-|a| \leq a \leq |a|. \quad (1)$$

При  $b > 0$  неравенство  $|a| \leq b$  означает, что число  $a$  на координатной прямой находится от точки  $O$  на расстоянии, которое не превышает  $b$  (рис. 5), то есть в промежутке  $[-b; b]$ . Наоборот, если число  $a$  находится в этом промежутке, то есть  $-b \leq a \leq b$ , то  $|a| \leq b$ . Следовательно,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b. \quad (2)$$

Обратим внимание, что последнее утверждение справедливо и при  $b = 0$  (тогда двум неравенствам удовлетворяет только одно значение  $a = 0$ ).

Аналогично при  $b > 0$  неравенство  $|a| \geq b$  означает, что число  $a$  на координатной прямой находится от точки  $O$  на расстоянии, которое боль-

ше или равно  $b$  (рис. 5), то есть в этом случае  $a \leq -b$  или  $a \geq b$ . Наоборот, если число  $a$  удовлетворяет одному из этих неравенств, то  $|a| \geq b$ . Следовательно, при  $b > 0$  неравенство  $|a| \geq b$  равносильно совокупности неравенств  $a \leq -b$  или  $a \geq b$ , что можно записать так:

при  $b > 0$   $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$  или  $a \geq b$ .

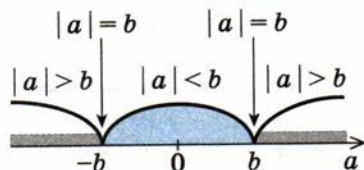


Рис. 5

Свойства модуля произведения и модуля дроби фиксируют известные правила действий над числами с одинаковыми и разными знаками\*:

модуль произведения равен произведению модулей множителей, то есть

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю), то есть

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Формулу для нахождения модуля произведения можно обобщить для случая нескольких множителей

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n| \quad (3)$$

и обосновать с помощью метода математической индукции\*\*.

● Действительно, формула (3) справедлива при  $n = 2$ :

$$|a_1 \cdot a_2| = |a_1| \cdot |a_2| \quad (4)$$

(как отмечалось выше, это следует из правил действий над числами с одинаковыми и разными знаками). Предположим, что эта формула справедлива при  $n = k$ , то есть допустим, что

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_k|. \quad (5)$$

С помощью формул (4) и (5) получаем, что и для следующего значения  $n = k + 1$  формула (3) также выполняется, поскольку

$$\begin{aligned} |a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}| &= |(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k) \cdot a_{k+1}| = |a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k| \cdot |a_{k+1}| = \\ &= |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_k| \cdot |a_{k+1}|. \end{aligned}$$

Тогда согласно методу математической индукции формула (3) справедлива для всех натуральных значений  $n$ , больших или равных 2. ○

Если в формуле (3) взять  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ , получаем формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Используя последнюю формулу справа налево при  $n = 2k$  и учитывая, что  $a^{2k} \geq 0$  при всех значениях  $a$ , получаем  $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$ . Следовательно,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обоснования неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (6)$$

запишем неравенство (1) для чисел  $a$  и  $b$ :

$$-|a| \leq a \leq |a|; \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

\* См. также с. 193–194.

\*\* См. учебник для 10 класса, § 8.

Складывая почленно эти неравенства, получаем:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Учитывая неравенство (2), имеем

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

то есть *модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых*.

С помощью метода математической индукции это свойство можно доказать и для случая  $n$  слагаемых (где  $n \geq 2$ ):

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Если в неравенстве (6) заменить  $b$  на  $-b$  и учесть, что  $|-b| = |b|$ , то получим неравенство

$$|a - b| \leq |a| + |b|. \quad (7)$$

Если записать число  $a$  так:  $a = b + (a - b)$  и использовать неравенство (6), то получим неравенство  $|a| \leq |b| + |a - b|$ . Отсюда

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \quad (8)$$

Если в неравенстве (8) заменить  $b$  на  $-b$  и учесть, что  $|-b| = |b|$ , то получим неравенство

$$|a| - |b| \leq |a + b|, \quad (9)$$

то есть *модуль суммы двух чисел не меньше разности их модулей*.

Меняя местами буквы  $a$  и  $b$  в неравенствах (8) и (9) и учитывая, что  $|a - b| = |b - a|$ , имеем также неравенства

$$|b| - |a| \leq |a \pm b|. \quad (10)$$

Полученные неравенства (6) – (10) можно коротко записать так:

$$\| |a| - |b| \| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

### Примеры решения задач

#### Задача 1

Докажите, что **сумма (разность, произведение, натуральная степень и частное, если делитель не равен нулю) двух рациональных чисел всегда является рациональным числом.**

#### Решение

► Пусть заданы два рациональных числа  $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$  и  $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — целые, а  $n_1$  и  $n_2$  — натуральные числа. Поскольку сумма, разность, произведение, натуральная степень и частное двух обыкновенных дробей всегда являются обыкновенными дробями, то полученный результат всегда будет рациональным числом. Например,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

#### Комментарий

Любое рациональное число может быть записано как дробь  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое,  $n$  — натуральное число. Чтобы доказать утверждение задачи, достаточно доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух дробей вида  $\frac{m}{n}$  также будет дробью такого вида.

где  $m_1n_2 + n_1m_2$  — целое число,  
а  $n_1n_2$  — натуральное.  $\triangleleft$

**Задача 2** Докажите, что для любого натурального числа  $n$  число  $\sqrt[m]{n}$  ( $m \in \mathbb{N}$ )\* или натуральное, или иррациональное.

#### Комментарий

Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод от противного: предположить, что заданное действительное положительное число является рациональным не натуральным (то есть дробью), и получить противоречие с условием или с каким-либо известным фактом.

Записывая  $\sqrt[m]{n}$  в виде несократимой дроби, следует учесть, что при натуральных значениях  $n$  это число всегда будет положительным.

#### Решение

► Допустим, что  $\sqrt[m]{n}$  не является иррациональным числом (тогда это число рациональное) и не является натуральным числом. Следовательно, это число может быть только рациональной несократимой дробью  $\sqrt[m]{n} = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа ( $q \neq 1$ ). По определению корня  $m$ -й степени имеем  $n = \frac{p^m}{q^m}$ , то есть  $n = \frac{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}{\underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{m \text{ раз}}}$ . Учтывая, что  $q \neq 1$ , получаем, что дробь

$\frac{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}$ , равная натуральному числу  $n$ , должна быть сократимой. Следова-

тельно, у натуральных множителей, которые стоят в числителе и знаменателе этой дроби, должен быть общий натуральный делитель, отличный от 1. Но в числителе стоят только множители  $p$ , а в знаменателе — только множители  $q$ . Тогда числа  $p$  и  $q$  имеют натуральный делитель, отличный от 1, то есть дробь  $\frac{p}{q}$  является сократимой дробью, что противоречит условию.

Таким образом, наше предположение неверно, и для любого натурального числа  $n$  число  $\sqrt[m]{n}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) или натуральное, или иррациональное.  $\triangleleft$

Например, поскольку числа  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt[3]{10}$  не являются натуральными числами ( $1 < \sqrt{3} < 2$ ,  $2 < \sqrt[3]{10} < 3$ ), то  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt[3]{10}$  — иррациональные числа.

**Задача 3\*** Докажите, что  $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$  — число иррациональное.

#### Решение

► Допустим, что число  $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5} = r$  — рациональное. Тогда  $\sqrt[3]{5} = r - \sqrt{3}$ .

#### Комментарий

Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод от противного: допустить, что заданное

\* При  $m = 1$  условимся, что  $\sqrt[m]{n} = \sqrt[1]{n} = n$ .



Возведя обе части последнего равенства в куб, имеем  $5 = r^3 - 3\sqrt{3}r^2 + 9r - 3\sqrt{3}$ . Отсюда  $\sqrt{3}(3r^2 + 3) = r^3 + 9r - 5$ . Следовательно,  $\sqrt{3} = \frac{r^3 + 9r - 5}{3r^2 + 3}$ . Но правая часть этого равенства — рациональное число (поскольку по предположению  $r$  — рациональное число), а левая — иррациональное. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и число  $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$  — иррациональное.  $\triangleleft$

действительное число является рациональным, и получить противоречие с каким-либо известным фактом, например с тем, что  $\sqrt{3}$  — иррациональное число. При анализе полученных выражений используем результат задачи 1: *если число  $r$  — рациональное, то числа  $r^3 + 9r - 5$  и  $3r^2 + 3$  и их частное тоже будут рациональными.*

Заметим, что при любом рациональном  $r$  знаменатель полученной дроби  $3r^2 + 3 \neq 0$ .

**Задача 4** Решите уравнение\*  $|2x + 5| = 7$ .

#### I способ

Решение

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & 2x + 5 = 7 \text{ или } 2x + 5 = -7, \\ & 2x = 2 \text{ или } 2x = -12, \\ & x = 1 \text{ или } x = -6. \end{aligned}$$

Ответ: 1; -6.  $\triangleleft$

Комментарий

Заданное уравнение имеет вид  $|t| = 7$  (в данном случае  $t = 2x + 5$ ). Его удобно решать, используя геометрический смысл модуля:

$|2x + 5|$  — это расстояние от точки 0 до точки  $2x + 5$ . Но расстояние 7 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 7), так и влево (получаем число -7). Следовательно, равенство  $|2x + 5| = 7$  возможно тогда и только тогда, когда  $2x + 5 = 7$  или  $2x + 5 = -7$ .

#### II способ

Решение

$$\blacktriangleright \quad |2x - (-5)| = 7,$$

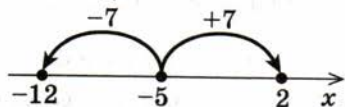


Рис. 6

Комментарий

С геометрической точки зрения  $|a - b|$  — это расстояние между точками  $a$  и  $b$  на координатной прямой. Запишем заданное уравнение так:  $|2x - (-5)| = 7$ . Тогда равенство  $|2x - (-5)| = 7$  означает, что расстоя-

\* Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, рассмотрено в учебнике для 10 класса — § 5 (см. также с. 372–373 учебника для 11 класса).

$$2x = 2 \text{ или } 2x = -12,$$

$$x = 1 \text{ или } x = -6.$$

Ответ: 1; -6. ◁

ние от точки  $2x$  до точки  $-5$  равно 7. На расстоянии 7 от точки  $-5$  находятся точки 2 и  $-12$  (рис. 6). Следовательно, данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда  $2x = 2$  или  $2x = -12$ , то есть заданное уравнение равносильно этой совокупности уравнений.

**Задача 5** Решите неравенство  $|x^2 - 5x| \leq 6$ .

**Решение**

$$\begin{cases} -6 \leq x^2 - 5x \leq 6, \\ \begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x-6) \leq 0, \\ (x-2)(x-3) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

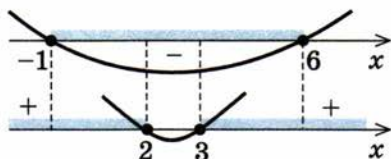


Рис. 7

Решая эти неравенства (рис. 7), получаем:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ x \leq 2 \text{ или } x \geq 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ или } 3 \leq x \leq 6.$$

Ответ:  $[-1; 2] \cup [3; 6]$ . ◁

**Комментарий**

Данное неравенство имеет вид  $|t| \leq 6$  (в данном случае  $t = x^2 - 5x$ ), и его можно решить, используя геометрический смысл модуля. С геометрической точки зрения,  $|t|$  — это расстояние от точки 0 до точки  $t$ . На расстоянии 6 от 0 находятся числа 6 и  $-6$ . Тогда неравенству  $|t| \leq 6$  удовлетворяют те и только те точки, которые находятся в промежутке  $[-6; 6]$ , то есть в промежутке  $-6 \leq t \leq 6$ . Для решения полученного двойного неравенства его удобно заменить соответствующей системой.

### Вопросы для контроля

- Объясните, какие числа входят в множества целых, рациональных и действительных чисел. Приведите примеры. Изобразите соответствующие точки на координатной прямой.
- Объясните, чем отличаются записи в виде бесконечной десятичной дроби рационального и иррационального чисел.
- а) Дайте определение модуля действительного числа. Сформулируйте свойства модуля.  
б\*) Обоснуйте свойства модуля действительного числа.

## Упражнения

1. Объясните, почему данное число не может быть рациональным:
- 1)  $1 + \sqrt{2}$ ;                      2)  $\sqrt{3} - 5$ ;                      3)  $\sqrt[3]{10}$ .
- 2\*. Докажите, что сумма (разность, произведение и частное) рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное (произведение и частное только в том случае, когда заданное рациональное число не равно нулю).
- 3\*. Докажите, что данное число является иррациональным:
- 1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;                      2)  $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ ;                      3)  $\lg 2$ ;                      4)  $\log_2 3$ .
4. Пользуясь геометрическим смыслом модуля, изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:
- 1°)  $|x| \leq 2$ ;                      2°)  $|x| > 5$ ;  
3)  $|x - 3| \leq 0,5$ ;                      4)  $|x + 1| < 0,3$ .
5. Решите уравнение:
- 1)  $|3x + 1| = 4$ ;                      2)  $|4x - 2| = 6$ ;  
3\*) (СПБУЭФ)  $\|x - 1| - 2| = 1$ ;                      4\*)  $\|2x + 3| - 5| = 3$ .
- 6 (МАДИ). Решите неравенство:
- 1)  $|2x - 7| \leq 1$ ;                      2)  $|3x + 5| > 7$ ;  
3\*)  $\|2x - 1| + 3| \geq 5$ ;                      4\*)  $\|4x + 7| - 11| < 4$ .

## § 2. ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Таблица 2

1. Понятие предела функции в точке							
Пусть задана некоторая функция, например $f(x) = 2x - 1$ .							
Рассмотрим график этой функции и таблицу ее значений в точках, которые на числовой прямой расположены достаточно близко к числу 2.							
	$x$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
	$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2
Из таблицы и графика видно, что чем ближе аргумент $x$ к числу 2 (это обозначают так: $x \rightarrow 2$ и говорят, что $x$ <i>стремится к 2</i> ), тем ближе значение функции $f(x) = 2x - 1$ к числу 3 (обозначают $f(x) \rightarrow 3$ и говорят, что $f(x)$ <i>стремится к 3</i> ). Это записывают также так: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$ (читается: «Лимит $2x - 1$ при $x$ , стремящемся к 2, равен 3») и говорят, что предел функции $2x - 1$ при $x$ , стремящемся к 2 (или <i>предел функции в точке 2</i> ), равен 3.							


В общем случае запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ обозначает, что <b>при <math>x \rightarrow a</math> <math>f(x) \rightarrow B</math></b> , то есть $B$ — число, к которому стремится значение функции $f(x)$ , когда $x$ стремится к $a$ .		
2. Запись обозначений $x \rightarrow a$ и $f(x) \rightarrow B$ с помощью знака модуля		
Обозначение и его смысл	Иллюстрация	Запись с помощью знака модуля
$x \rightarrow a$ На числовой прямой точка $x$ находится от точки $a$ на малом расстоянии (меньше $\delta$ ).		$ x - a  < \delta^*$
$f(x) \rightarrow B$ Значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от $B$ (меньше $\epsilon$ ).		$ f(x) - B  < \epsilon$
3. Определение предела функции в точке**		
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$	Число $B$ называется <b>пределом функции <math>f(x)</math> в точке <math>a</math></b> (при $x$ , стремящемся к $a$ ), если для любого положительного числа $\epsilon$ найдется такое положительное число $\delta$ , что при всех $x \neq a$ , удовлетворяющих неравенству $ x - a  < \delta$ , выполняется неравенство $ f(x) - B  < \epsilon$ .	
4. Свойства предела функции		
Смысл правил предельного перехода	Запись и формулировка правил предельного перехода	
Если $f(x) = c$ , то при $x \rightarrow a$ $f(x) \rightarrow c$	$\lim_{x \rightarrow a} c = c$ Предел постоянной функции равен самой постоянной.	
Если при $x \rightarrow a$ $f(x) \rightarrow A$ и $g(x) \rightarrow B$ , то: $f(x) \pm g(x) \rightarrow A \pm B$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.	

\* Если значение  $x$  удовлетворяет неравенству  $|x - a| < \delta$ , то говорят, что точка  $x$  находится в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ .

\*\* Это определение обязательно только для классов физико-математического профиля.

$f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ <p>Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.</p>
$c \cdot f(x) \rightarrow c \cdot A$	$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ <p>Постоянный множитель можно выносить за знак предела.</p>
$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$ (где $B \neq 0$ )	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{где } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$ <p>Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.</p>
5. Непрерывность функции в точке	
<p>Определение. Функция <math>f(x)</math> называется <b>непрерывной в точке <math>a</math></b>, если при <math>x \rightarrow a</math> <math>f(x) \rightarrow f(a)</math>, то есть</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$	
<p>Если функция <math>f(x)</math> непрерывна в каждой точке некоторого промежутка <math>I</math>, то ее называют <b>непрерывной на промежутке <math>I</math></b>.</p>	
<p>Если функции <math>f(x)</math> и <math>g(x)</math> непрерывны в точке <math>a</math>, то <b>сумма, произведение и частное непрерывных в точке <math>a</math> функций непрерывны в точке <math>a</math></b> (частное в случае, когда делитель <math>g(a) \neq 0</math>).</p>	
<p><b>График функции, непрерывной на промежутке, — неразрывная линия на этом промежутке.</b></p>	
<p>Все элементарные функции* непрерывны в каждой точке своей области определения, поэтому на каждом промежутке из области определения их графики — неразрывные линии.</p>	
<p><b>Если на интервале <math>(a, b)</math> функция <math>f(x)</math> непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет постоянный знак на этом интервале.</b></p>	

\* Элементарными функциями обычно называют функции:  $y = c$  ( $c = \text{const}$ );  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $y = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $y = a^x$  ( $a > 0$ );  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ );  $y = \sin x$ ;  $y = \cos x$ ;  $y = \operatorname{tg} x$ ;  $y = \operatorname{ctg} x$ ;  $y = \arcsin x$ ;  $y = \arccos x$ ;  $y = \operatorname{arctg} x$ ;  $y = \operatorname{arcctg} x$  и все функции, которые получаются из перечисленных выше с помощью конечного количества действий сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции (функции от функции).

6. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \geq 0$ )	
План	Пример
<p>1. Найти ОДЗ неравенства.</p> <p>2. Найти нули функции: <math>f(x) = 0</math>.</p> <p>3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции <math>f(x)</math> в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.</p> <p>4. Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.</p>	<p>Решите неравенство <math>\frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2} &lt; 0</math>.</p> <p>► Пусть <math>f(x) = \frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2}</math>.</p> <p>Поскольку функция <math>f(x)</math> непрерывна на каждом из промежутков своей области определения (как частное двух непрерывных функций), то можно использовать метод интервалов.</p> <p>1. ОДЗ: <math>\begin{cases} x+3 &gt; 0, \\ x+5 \geq 0, \\ \sqrt{x+5}-2 \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x &gt; -3, \\ x \geq -5, \\ \sqrt{x+5} \neq 2. \end{cases}</math> Тогда <math>\begin{cases} x &gt; -3, \\ x \neq -1. \end{cases}</math></p> <p>2. Нули функции: <math>f(x) = 0</math>.  <math>\frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2} = 0, \log_2(x+3) - 2 = 0,</math>  <math>\log_2(x+3) = 2, x+3 = 2^2, x = 1</math> (входит в ОДЗ).</p> <p>3*. </p> <p>Ответ: <math>(-1; 1)</math>. ◁</p>

### Объяснение и обоснование

**1. Понятие предела функции в точке.** Простейшее представление о пределе функции можно получить, рассматривая график функции  $y = 2x - 1$  (рис. 8). Из этого графика видно: чем ближе выбираются на оси  $Ox$  значения аргумента к числу 2 (это обозначается  $x \rightarrow 2$  и читается: « $x$  стремится к 2»), тем ближе будет значение  $f(x)$  на оси  $Oy$  к числу 3.

Это можно записать так:

$$f(x) \rightarrow 3 \text{ при } x \rightarrow 2, \text{ или } \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

Знак  $\lim$  (читается: «Лимит») — краткая запись латинского слова *limes* (лимес), что в переводе означает «предел».

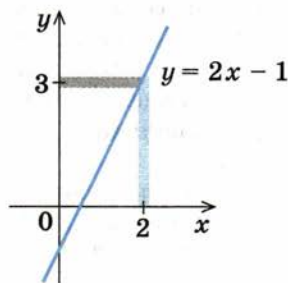


Рис. 8

\* Для определения знаков функции на каждом из выделенных интервалов использованы свойства непрерывной функции, приведенные в пункте 5 таблицы 2 (см. также рассуждения на с. 24).

В общем виде запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$  означает, что при  $x \rightarrow a$  значение  $f(x) \rightarrow B$ , то есть  $B$  — число, к которому стремится значение функции  $f(x)$ , когда  $x$  стремится к  $a$ .

Чтобы дать определение предела функции  $f(x)$  в точке  $a$ , напомним, что расстояние между точками  $x$  и  $a$  на координатной оси  $Ox$  — это модуль разности  $|x - a|$ , а расстояние между точками  $f(x)$  и  $B$  на координатной оси  $Oy$  — это модуль разности  $|f(x) - B|$ .

Тогда запись  $x \rightarrow a$  означает, что на числовой прямой точка  $x$  находится от точки  $a$  на малом расстоянии — например, меньше какого-то положительного числа  $\delta$  (рис. 9). Это можно записать так:  $|x - a| < \delta$ . Обратим внимание, что запись  $x \rightarrow a$  означает, что  $x$  стремится к  $a$ , но не обязательно  $x$  достигает значения  $a$ , поэтому в определении предела функции в точке  $a$  рассматриваются значения  $x \neq a$ . Также обратим внимание, что в этом случае, когда значение  $x$  удовлетворяет неравенству  $|x - a| < \delta$ , говорят, что точка  $x$  находится в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ .

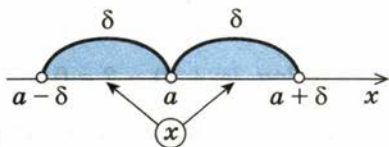


Рис. 9

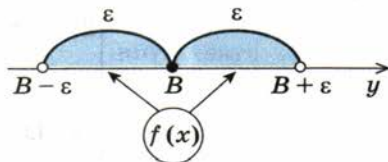


Рис. 10

Аналогично запись  $f(x) \rightarrow B$  означает, что значение  $f(x)$  на числовой прямой находится на малом расстоянии от  $B$  — например, меньше какого-то положительного числа  $\epsilon$  (рис. 10). Это можно записать так:  $|f(x) - B| < \epsilon$ .

Тогда можно дать следующее определение предела функции в точке: *число  $B$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  (при  $x$ , стремящемся к  $a$ ), если для любого положительного числа  $\epsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что при всех  $x \neq a$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - B| < \epsilon$ .*

Нахождение числа  $B$  по функции  $f$  называют *предельным переходом*. При выполнении предельных переходов можно пользоваться такими правилами\*\*:

*Если нам известны пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , то для выполнения предельного перехода над суммой, произведением или частным этих функций достаточно выполнить соответствующие операции над пределами*

\* Заметим, что  $\delta$ , вообще говоря, зависит от  $\epsilon$  и поэтому его часто обозначают  $\delta(\epsilon)$ .

\*\* Обоснование правил предельного перехода приведено в § 7, там же приведены примеры использования определения для доказательства того, что число  $B$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Отметим, что правила предельного перехода можно использовать и в тех случаях, когда рассматриваются три (или больше) слагаемых или множителей (для обоснования достаточно воспользоваться принципом математической индукции).

этих функций (для частного только в том случае, когда предел знаменателя не равен нулю).

То есть если при  $x \rightarrow a$   $f(x) \rightarrow A$  и  $g(x) \rightarrow B$ , то

$$\boxed{f(x) + g(x) \rightarrow A + B} \quad \boxed{f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}} \quad (\text{где } B \neq 0).$$

Отметим также, что в случае, когда функция  $f(x)$  является постоянной, то есть  $f(x) = c$ , то при всех значениях  $x$  значение  $f(x)$  равно  $c$ , следовательно, и при  $x \rightarrow a$  значение  $f(x) \rightarrow c$ . То есть *предел постоянной равен самой постоянной*.

Обратим внимание, что согласно определению предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , можно вычислить и в том случае, когда значение  $x = a$  не входит в область определения функции  $f(x)$ . Например, область определения функции  $f(x) = \frac{x}{x}$  являются все действительные числа, кроме числа 0.

Для всех  $x \neq 0$  выполняется равенство  $\frac{x}{x} = 1$ . Тогда при  $x \rightarrow 0$  значение  $\frac{x}{x} \rightarrow 1$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ .

**2. Понятие непрерывности функции.** Если значение  $x = a$  входит в область определения функции  $f(x)$ , то при  $x \rightarrow a$  для многих функций значение  $f(x) \rightarrow f(a)$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Такие функции называются *непрерывными в точке*<sup>\*</sup>  $a$ . Если функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке некоторого промежутка  $I$ , то ее называют непрерывной на промежутке  $I$ . Графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом промежутке, который полностью входит в область определения. На этом и основывается способ построения графиков «по точкам», которым мы постоянно пользовались. Строго говоря, при этом необходимо предварительно выяснить, действительно ли рассматриваемая функция является непрерывной. Например, произвольный многочлен  $f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$  является непрерывной функцией на всей области определения (то есть на  $\mathbf{R}$ ), поскольку, используя правила предельного перехода, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) = \lim_{x \rightarrow a} (b_0 x^n) + \lim_{x \rightarrow a} (b_1 x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} b_n = \\ &= b_0 \lim_{x \rightarrow a} x^n + b_1 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow a} b_n = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + \dots + b_n = f(a). \end{aligned}$$

В курсах математического анализа доказывается, что все известные вам элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения (см. также § 7), и это можно использовать при построении графиков и вычислении пределов функций.

Например, поскольку многочлен является непрерывной функцией, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 1) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3.$$

<sup>\*</sup> Если в точке  $x = a$  не выполняется условие  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , то функция  $f(x)$  называется разрывной в точке  $a$  ( $a$  сама точка  $a$  называется точкой разрыва функции  $f(x)$ ).



Из правил предельного перехода следует, что в случае, когда **функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , сумма, произведение и частное непрерывных в точке  $a$  функций непрерывны в точке  $a$**  (частное  $\frac{f(x)}{g(x)}$  в случае,

когда  $g(a) \neq 0$ ).

Например, функция  $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$  непрерывна как сумма двух непрерывных функций.

(Действительно,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = a^2 + \sqrt[3]{a} = f(a)$ , из этого следует, что функция  $f(x)$  — непрерывная.)

Отметим еще одно важное свойство непрерывных функций, полное доказательство которого приводится в курсах математического анализа.

**Если на интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.**

Это свойство имеет простую наглядную иллюстрацию. Допустим, что функция  $f(x)$  на заданном интервале изменила свой знак (например, « $-$ » на « $+$ »). Это означает, что в какой-то точке  $x_1$  значение функции отрицательно ( $f(x_1) < 0$ ), и тогда соответствующая точка  $M$  графика функции находится ниже оси  $Ox$ . В некоторой точке  $x_2$  значение функции положительно ( $f(x_2) > 0$ ), и соответствующая точка  $N$  графика находится выше оси  $Ox$ .

Но если график функции (который является неразрывной линией) перешел из нижней полуплоскости относительно оси  $Ox$  в верхнюю, то он обязательно хотя бы один раз на заданном интервале пересек ось  $Ox$ , например в точке  $x_0$  (рис. 11). Тогда  $f(x_0) = 0$ , что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно, и на заданном интервале функция не может изменить свой знак.

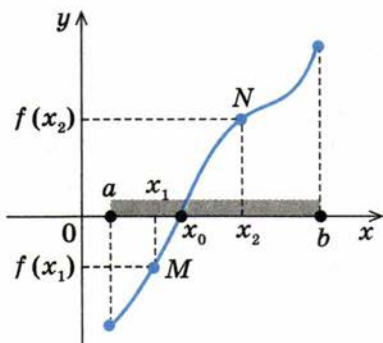


Рис. 11

На последнем свойстве непрерывных функций основывается метод решения неравенств с одной переменной, называемый **методом интервалов**, который мы применяли в 10 классе.

Действительно, если функция  $f$  непрерывна на интервале  $I$  и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала, то

по сформулированному выше свойству непрерывных функций интервал  $I$  разбивается этими точками на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция  $f$  сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции  $f$  в любой точке каждого из таких интервалов.

Схема решения неравенств вида  $f(x) \geq 0$  методом интервалов приведена в учебнике для 10 класса (§ 4) и в пункте 6 таблицы 2.

## Примеры решения задач

## Задача 1

Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

$$1) f(x) = x^5 - 3x^2 + 2, (-\infty; +\infty);$$

$$2) g(x) = \frac{x^3 - x}{2x - 6}, [5; +\infty);$$

$$3) g(x) = \frac{x^3 - x}{2x - 6}, (0; +\infty)?$$

## Решение

► 1) Областью определения функции  $f(x)$  является множество всех действительных чисел  $\mathbf{R}$ . Многочлен является непрерывной функцией в каждой точке своей области определения, поэтому в каждой точке промежутка  $(-\infty; +\infty)$  функция  $f(x)$  непрерывна.

2), 3) Область определения функции  $g(x)$ :  $x \neq 3$ , то есть

$$D(g) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Дробно-рациональная функция  $g(x)$  является непрерывной в каждой точке ее области определения.

Промежуток  $[5; +\infty)$  полностью входит в область определения этой функции, поэтому в каждой точке промежутка  $[5; +\infty)$  функция  $g(x)$  непрерывна.

Промежуток  $(0; +\infty)$  содержит точку 3, которая не входит в область определения функции  $g(x)$ . Следовательно, в этой точке функция  $g(x)$  не может быть непрерывной (не существует значение  $g(3)$ ), поэтому функция  $g(x)$  не является непрерывной в каждой точке промежутка  $(0; +\infty)$ . ◁

## Комментарий

Многочлен  $f(x)$  и дробно-рациональная функция  $g(x)$  являются непрерывными в каждой точке их области определения (в частности, функция  $g(x)$  непрерывна как частное двух многочленов — непрерывных функций, при условии, что знаменатель дроби не равен нулю). Поэтому в каждом из заданий необходимо найти область определения данной функции и сравнить ее с заданным промежутком.

Если этот промежуток полностью входит в область определения соответствующей функции, то эта функция будет непрерывной в каждой точке заданного промежутка, а если нет, то функция не будет непрерывной в тех точках, которые не входят в ее область определения.

Заметим, что при рассмотрении промежутка  $[5; +\infty)$  мы воспользовались тем, что его начальная точка 5 является *внутренней точкой* области определения заданной функции (она входит в область определения вместе с некоторой своей окрестностью). Поскольку  $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = g(5)$ , то функция  $g(x)$  непрерывна в точке 5. В случае, когда начальная точка промежутка не является внутренней точкой области определения заданной функции (но входит в нее), непрерывность в этой точке приходится определять с помощью так называемых односторонних пределов (см. с. 124).

**Задача 2**

Выясните, к какому числу стремится функция  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Решение**

► Дробно-рациональная функция  $f(x)$  является непрерывной в каждой точке ее области определения ( $x \neq 5$ ). Число 0 входит в область определения этой функции, поэтому при  $x \rightarrow 0$  значение

$$f(x) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$ . ◁

**Комментарий**

Фактически в условии задачи говорится о нахождении предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow 0$ . Учитывая, что дробно-рациональная функция  $f(x)$  является непрерывной в каждой точке ее области определения:  $x \neq 5$  (как частное двух непрерывных функций — многочленов), получаем, что при  $x \rightarrow 0$  значение  $f(x) \rightarrow f(0)$ . То есть  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

**Задача 3\***

Найдите: 1)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2x - 1)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Решение**

► 1) Многочлен  $f(x) = x^3 + 2x - 1$  является непрерывной функцией в каждой точке числовой прямой, поэтому  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2x - 1) = f(3) = 3^3 + 2 \cdot 3 - 1 = 32$ .

2) Дробно-рациональная функция  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 5}$  является непрерывной в каждой точке ее области определения ( $x \neq 5$ ). Число 1 входит в область определения этой функции, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5} = f(1) = \frac{1^2 - 9}{1 - 5} = 2.$$

3) При  $x \neq 1$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 = \varphi(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \varphi(1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned} \triangleleft$$

**Комментарий**

Многочлены и дробно-рациональные функции являются непрерывными в каждой точке их областей определения. Это означает, что в том случае, когда число  $a$  (к которому стремится  $x$ ) входит в область определения функции  $f(x)$  (задания 1 и 2), получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Если же число  $a$  не входит в область определения функции  $f(x)$  (задание 3), то пытаемся выполнить тождественные преобразования выражения  $f(x)$  при  $x \neq a$ , получить функцию, определенную при  $x = a$ , а затем использовать непрерывность полученной функции при  $x = a$  (в данном случае функции  $\varphi(x) = x + 1$  при  $x = 1$ ).

Напомним, что обозначение  $x \rightarrow a$  означает только то, что  $x$  стремится к  $a$  (но не обязательно  $x$  принимает значение  $a$ ), и поэтому при  $x \rightarrow 1$  значение  $x + 1 \rightarrow 1 + 1 = 2$ .

**Задача 4\***Решите неравенство  $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} \geq 1$ .**Решение**

▶ Заданное неравенство равносильно неравенству  $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} - 1 \geq 0$ .

Поскольку функция

$$f(x) = \frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} - 1 \text{ непрерывна в}$$

каждом из промежутков своей области определения, то можно применить метод интервалов.

1. ОДЗ. Поскольку  $x^2 + 3 > 0$  всегда, то ОДЗ задается условиями:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+5 > 0, \\ \log_{x+3}(x+5) \neq 0. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ x > -5, \\ x+5 \neq 1. \end{cases}$$

То есть  $x > -3$ ,  $x \neq -2$ .

2. Нули  $f(x)$ :  $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} - 1 = 0$ . На

ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям:

$$\begin{aligned} \log_{x+3}(x^2+3) &= \log_{x+3}(x+5), \\ x^2+3 &= x+5, \quad x^2-x-2=0, \\ x_1 &= -1, \quad x_2 = 2 \quad (\text{оба корня входят в ОДЗ}). \end{aligned}$$

3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак  $f(x)$  в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 12).



Рис. 12

**Ответ:**

$$(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty). \triangleleft$$

**Комментарий**

Заданное неравенство можно решить или с помощью равносильных преобразований, или методом интервалов. Если мы выберем метод интервалов, то сначала неравенство необходимо привести к виду  $f(x) \geq 0$ .

Для того чтобы решить неравенство методом интервалов, достаточно убедиться, что функция  $f(x)$  непрерывна (это требование всегда выполняется для всех элементарных функций  $f(x)$ ), и использовать известную схему решения:

- 1) Найти ОДЗ неравенства.
- 2) Найти нули функции:  $f(x) = 0$ .
- 3) Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции  $f(x)$  в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.
- 4) Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.

При нахождении нулей  $f(x)$  можно следить за равносильностью выполненных (на ОДЗ) преобразований полученного уравнения, а можно использовать уравнения-следствия и в конце выполнить проверку найденных корней.

Записывая ответ к нестрогому неравенству, следует учесть, что все нули функции должны войти в ответ (в данном случае — числа  $-1$  и  $2$ ).

Чтобы найти знак функции  $f(x)$  в каждом из полученных промежутков, достаточно сравнить величину дроби  $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}$  с единицей в лю-

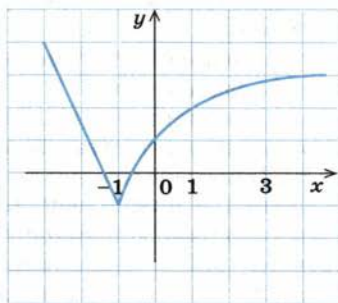
бой точке из выбранного промежутка. (Для этого можно изобразить график функции  $y = \log_a t$  при  $a > 1$  и при  $0 < a < 1$  и воспользоваться соответствующими свойствами этой функции.)

## Вопросы для контроля

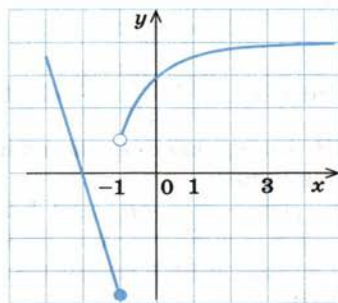
1. Объясните, что обозначают записи  $x \rightarrow a$  и  $f(x) \rightarrow B$ .
2. Объясните, что обозначает запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .
3. Если при  $x \rightarrow a$   $f(x) \rightarrow A$  и  $g(x) \rightarrow B$ , то к каким числам при  $x \rightarrow a$  будут стремиться функции:  $f(x) \pm g(x)$ ;  $f(x) \cdot g(x)$ ;  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (если  $B \neq 0$ )?
4. Когда функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$ ? Приведите примеры.
5. Какая функция называется непрерывной на промежутке? Что можно сказать о графике такой функции на рассмотренном промежутке?
6. На каком свойстве непрерывной функции основывается метод решения неравенств вида  $f(x) \geq 0$ ? Объясните, опираясь на графическую иллюстрацию, справедливость этого свойства.
7. Охарактеризуйте план решения неравенства вида  $f(x) \geq 0$  методом интервалов. Приведите пример решения неравенства методом интервалов.

## Упражнения

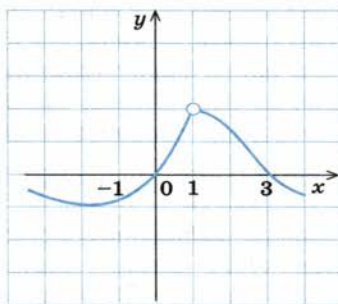
- 1°. Является ли непрерывной в каждой из точек  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  функция, график которой изображен на рисунке 13?



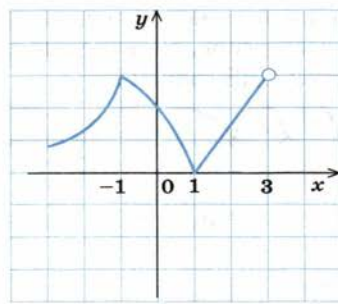
а



б



в



г

Рис. 13

2. Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1)  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $(-\infty; +\infty)$ ;      2)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ ,  $(0; +\infty)$ ;

3)  $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$ ,  $[2; +\infty)$ ?

3. Выясните, к какому числу стремится функция  $f(x)$ , если:

1)  $f(x) = x^2 - 5x + 1$  при  $x \rightarrow 1$ ;      2)  $f(x) = \frac{2x + 5}{x^3 - 7}$  при  $x \rightarrow 2$ ;

3)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3}$  при  $x \rightarrow -1$ ;      4)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x}$  при  $x \rightarrow 3$ .

4\*. Найдите:

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 5)$ ;      2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x}{4x + 1}$ ;      3)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$ ;      4)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ .

5 (РЭА). Решите неравенство методом интервалов:

1)  $(x^2 - 4) \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$ ;      2)  $\frac{2^x - 1}{2x - 1} > 0$ ;      3)  $\frac{3x^2 - 2x - 1}{\log_3(x - 1)} < 0$ ;      4)  $\frac{\sqrt{2x - 2} - 2}{x^2 - 16} \geq 0$ .

6 (ВолГТУ). Найдите область определения функции:

1)  $y = \sqrt{\frac{\log_3(x + 1)}{x - 1}}$ ;      2)  $y = \log_5(x - \sqrt{2x - 1})$ ;

3)  $y = \sqrt{(x^4 - 4x^2 + 3)|2x - 3|}$ ;      4)  $y = \left(\frac{\log_{0,4}(x - 1)}{2 - x}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

### § 3. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Таблица 3

1. Понятия приращения аргумента и приращения функции в точке $x_0$	
Пусть $x$ — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки $x_0$ из области определения функции $f(x)$	
Приращение аргумента	Приращение функции
$\Delta x = x - x_0$	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

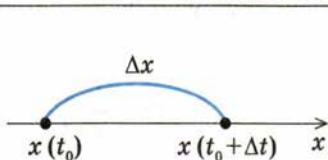
2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции

Функция  $f(x)$  будет непрерывной в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда малому изменению аргумента в точке  $x_0$  отвечают малые изменения значений функции, то есть

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \Leftrightarrow$  При  $\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta f \rightarrow 0$

3. Задачи, приводящие к понятию производной

I. Мгновенная скорость движения точки по прямой

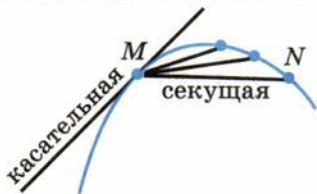


$(x(t))$  — координата  $x$  точки в момент времени  $t$

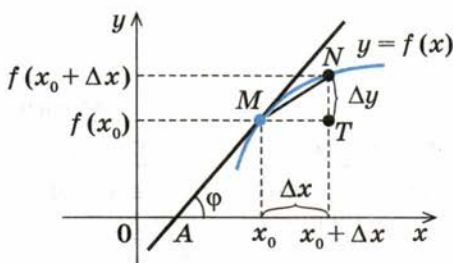
$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

II. Касательная к графику функции



Касательной к графику функции в данной точке  $M$  называется предельное положение секущей  $MN$  (когда точка  $N$  стремится к точке  $M$ ).



Когда точка  $N$  приближается к точке  $M$  (перемещаясь по графику функции  $y = f(x)$ ), то величина угла  $NMT$  приближается к величине угла  $\phi$  наклона касательной  $MA$  к оси  $Ox$ .

Поскольку  $\text{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , то

$$\text{tg} \phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

4. Определение производной

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции в точке  $x_0$  к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

## 5. Производные некоторых элементарных функций

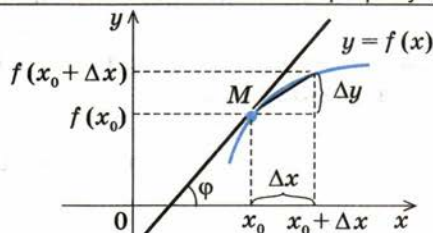
$c' = 0$   
( $c$  — постоянная)

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ 

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$$

$k$  — угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  — уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$

Значение производной в точке  $x_0$  равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$  и угловому коэффициенту этой касательной.

(Угол отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки.)

## 7. Механический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента

$s = s(t)$  — зависимость пройденного пути от времени

$v = s'(t)$  — скорость прямолинейного движения

$a = v'(t)$  — ускорение прямолинейного движения

В частности, производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции. Производную по времени используют для описания различных физических величин.

Например, мгновенная скорость  $v$  неравномерного прямолинейного движения — это производная функции, выражающей зависимость пройденного пути  $s$  от времени  $t$ .

## 8. Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

Если функция  $f(x)$  дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке.



## Объяснение и обоснование

**1. Понятия приращения аргумента и приращения функции.** Часто нас интересует не значение какой-то величины, а ее приращение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины, работа — это изменение энергии и т. д.

Приращение аргумента или функции традиционно обозначают большой буквой греческого алфавита  $\Delta$  (дельта). Дадим определение приращения аргумента и приращения функции.

Пусть  $x$  — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки  $x_0$  из области определения функции  $f(x)$ .

Разность  $x - x_0$  называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$  (читается: «Дельта икс»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0.$$

Из этого равенства имеем

$$x = x_0 + \Delta x, \quad (1)$$

то есть первоначальное значение аргумента  $x_0$  получило приращение  $\Delta x$ . Отметим, что при  $\Delta x > 0$  значение  $x$  больше, чем  $x_0$ , а при  $\Delta x < 0$  значение  $x$  меньше, чем  $x_0$  (рис. 14).

Тогда при переходе аргумента от точки  $x_0$  к точке  $x$  значение функции изменилось на величину  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ .

Учитывая равенство (1), получаем, что функция изменилась на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

(рис. 15), которая называется *приращением функции  $f$  в точке  $x_0$ , соответствующим приращению аргумента  $\Delta x$*  (символ  $\Delta f$  читается: «Дельта эф»).

Из равенства (2) получаем  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ .

Обратим внимание на то, что при фиксированном  $x_0$  приращение  $\Delta f$  является функцией от приращения  $\Delta x$ .

Если функция задается формулой  $y = f(x)$ , то  $\Delta f$  называют также приращением зависимой переменной  $y$  и обозначают через  $\Delta y$ .

Например, если  $y = f(x) = x^2$ , то приращение  $\Delta y$ , соответствующее приращению  $\Delta x$ , равно:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

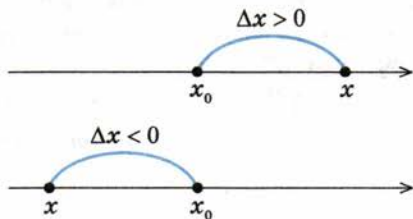


Рис. 14

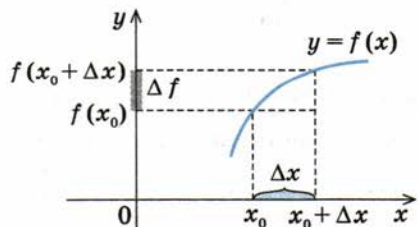


Рис. 15

**2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции.**

Напомним, что функция  $f(x)$  является непрерывной в точке  $x_0$ , если при  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Но если  $x \rightarrow x_0$ , то  $x - x_0 \rightarrow 0$ ,

то есть  $\Delta x \rightarrow 0$  (и наоборот, если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $x - x_0 \rightarrow 0$ , то есть  $x \rightarrow x_0$ ). Следовательно, условие  $x \rightarrow x_0$  эквивалентно условию  $\Delta x \rightarrow 0$ . Аналогично утверждение  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  эквивалентно условию  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ , то есть  $\Delta f \rightarrow 0$ . Таким образом, функция  $f(x)$  будет непрерывной в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Delta f \rightarrow 0$ , то есть если малым изменениям аргумента в точке  $x_0$  соответствуют малые изменения значений функции. Именно вследствие этого свойства графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом из промежутков, которые полностью входят в область определения функции.

**3. Задачи, приводящие к понятию производной**

**I. Мгновенная скорость движения точки по прямой.** Рассмотрим задачу, известную из курса физики, — движение материальной точки по прямой. Пусть координата  $x$  точки в момент времени  $t$  равна  $x(t)$ . Как и в курсе физики, будем считать, что движение происходит непрерывно (как это мы наблюдаем в реальной жизни). Попробуем по известной зависимости  $x(t)$  определить скорость, с которой точка движется в момент времени  $t_0$  (так называемую мгновенную скорость). Рассмотрим промежуток времени от  $t_0$  до  $t = t_0 + \Delta t$  (рис. 16). Определим среднюю скорость на промежутке  $[t_0; t_0 + \Delta t]$  как отношение пройденного пути к времени движения:

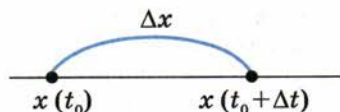


Рис. 16

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для определения мгновенной скорости точки в момент времени  $t_0$  сделаем так, как вы делали на уроках физики: возьмем промежуток времени продолжительностью  $\Delta t$ , вычислим среднюю скорость на этом промежутке и начнем уменьшать промежуток  $\Delta t$  до нуля (то есть уменьшать отрезок  $[t_0; t]$  и приближать  $t$  к  $t_0$ ). Мы заметим, что значение средней скорости при стремлении  $\Delta t$  к нулю будет стремиться к некоторому числу, которое и считается значением скорости в момент времени  $t_0$ . Иными словами, *мгновенной скоростью* в момент времени  $t_0$  называется предел отношения  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то есть

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Например, рассмотрим свободное падение тела. Из курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени задается формулой

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

1) Найдем сначала  $\Delta s$ :

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2 - t_0^2)}{2} = \frac{g(2t_0\Delta t + (\Delta t)^2)}{2}.$$

2) Найдем среднюю скорость:  $v_{\text{cp}}(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g(2t_0\Delta t + (\Delta t)^2)}{2\Delta t} = gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}$ .

3) Выясним, к какому числу стремится отношение  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ : это и будет мгновенная скорость в момент времени  $t_0$ .

Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $\frac{g\Delta t}{2} = \frac{g}{2} \cdot \Delta t \rightarrow 0$ , а поскольку  $gt_0$  — величина постоянная,

то  $gt_0 + \frac{g\Delta t}{2} \rightarrow gt_0$ . Последнее число и является значением мгновенной скорости точки в момент времени  $t_0$ . Мы получили известную из физики формулу  $v = gt$  (тогда  $v(t_0) = gt_0$ ). Используя понятие предела, это можно

записать так:  $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0$ .

**II. Касательная к графику функции.** Наглядное представление о касательной к кривой можно получить, изготовив кривую из плотного материала (например, из проволоки) и прикладывая к кривой линейку в выбранной точке (рис. 17). Если мы изобразим кривую на бумаге, а затем будем вырезать фигуру, ограниченную этой кривой, то ножницы также будут направлены по касательной к кривой.

Попробуем перевести наглядное представление о касательной на более точный язык.

Пусть задана некоторая кривая и точка  $M$  на ней (рис. 18). Возьмем на этой кривой другую точку  $N$  и проведем прямую через точки  $M$  и  $N$ . Эту прямую обычно называют *секущей*. Начнем приближать точку  $N$  к точке  $M$ . Положение секущей  $MN$  будет изменяться, но при приближении точки  $N$  к точке  $M$  оно начнет стабилизироваться.

*Касательной к кривой в данной точке  $M$  называется предельное положение секущей  $MN$ .*

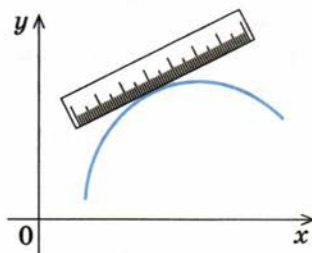


Рис. 17

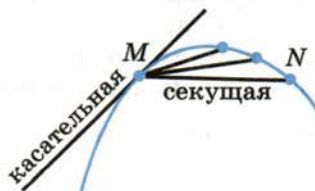


Рис. 18

Чтобы записать это определение с помощью формул, будем считать, что кривая — это график функции  $y = f(x)$ , а точка  $M$ , находящаяся на гра-

фике, задана своими координатами  $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$ . Касательной является некоторая прямая, проходящая через точку  $M$  (рис. 19).

Чтобы построить эту прямую, достаточно знать угол  $\varphi$  наклона касательной\* к оси  $Ox$ .

Пусть точка  $N$  (через которую проходит секущая  $MN$ ) имеет абсциссу  $x_0 + \Delta x$ . Когда точка  $N$ , перемещаясь по графику функции  $y = f(x)$ , приближается к точке  $M$  (это будет при  $\Delta x \rightarrow 0$ ), величина угла  $NMT$  приближается к величине угла  $\varphi$  наклона касательной  $MA$  к оси  $Ox$ . Поскольку

$\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , то при  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $\operatorname{tg} \angle NMT$  приближается к  $\operatorname{tg} \varphi$ , то есть

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Фактически мы пришли к той же задаче, что и при нахождении мгновенной скорости: найти предел отношения выражения вида  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  (где  $y = f(x)$  — заданная функция) при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Найденное таким образом число называют *производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .

#### 4. Определение производной

*Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции в точке  $x_0$  к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  обозначается  $f'(x_0)$  (или  $y'(x_0)$ ) и читается: «Эф штрих в точке  $x_0$ ». Коротко определение производной функции  $y = f(x)$  можно записать так:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая определение приращения функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , соответствующего приращению  $\Delta x$ , определение производной можно записать также следующим образом:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцию  $f(x)$ , имеющую производную в точке  $x_0$ , называют *дифференцируемой* в этой точке. Если функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на*

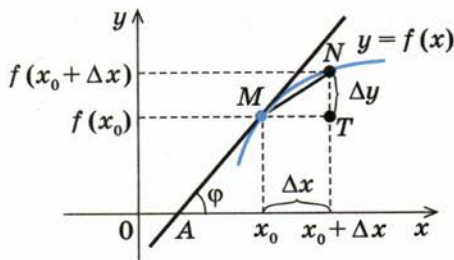


Рис. 19

\* Будем рассматривать невертикальную касательную (то есть  $\varphi \neq 90^\circ$ ).

этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Для нахождения производной функции  $y = f(x)$  согласно определению можно пользоваться такой схемой:

1. Найти приращение функции  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ .
2. Найти отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
3. Выяснить, к какому пределу стремится отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Это и будет производной данной функции.

**5. Производные некоторых элементарных функций.** Обоснуем, пользуясь предложенной схемой, формулы, приведенные в пункте 5 таблицы 3.

1. Вычислим производную функции  $y = c$  (то есть  $f(x) = c$ ), где  $c$  — постоянная.

- 1) Найдем приращение функции, соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

- 2) Найдем отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ .

- 3) Поскольку отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  постоянно и равно нулю, то и предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$  также равен нулю. Следовательно,  $y' = 0$ , то есть  $c' = 0$ . ○

2. Вычислим производную функции  $y = x$  (то есть  $f(x) = x$ ).

- 1)  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ .

- 2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ .

- 3) Поскольку отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  постоянно и равно 1, то и предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$  также равен единице. Следовательно,  $y' = 1$ , то есть  $x' = 1$ . ○

3. Вычислим производную функции  $y = x^2$  (то есть  $f(x) = x^2$ ).

- 1)  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ .

- 2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ .

- 3) При  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0$ . Это означает, что  $y'(x_0) = 2x_0$ .

Тогда производная функции  $y = x^2$  в произвольной точке  $x$  равна:  $y'(x) = 2x$ . Таким образом,

$$(x^2)' = 2x. \quad \circ$$

4. Вычислим производную функции  $y = \frac{1}{x}$  (то есть  $f(x) = \frac{1}{x}$ ).

• 1)  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$ .

2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0 \cdot \Delta x} = \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0}$ .

3) При  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$ . Тогда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$ . Это озна-

чает, что  $y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ . Тогда производная функции  $y = \frac{1}{x}$  в произвольной точке  $x$  из ее области определения (то есть при  $x \neq 0$ ) равна:  $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \quad \circ$$

5. Вычислим производную функции  $y = \sqrt{x}$  (то есть  $f(x) = \sqrt{x}$ ).

• 1)  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$ . Умножим и разделим полученное выражение на сумму  $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$  и запишем  $\Delta y$  следующим образом:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}) \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$ .

3) При  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$ . Тогда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

Это означает, что  $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$  (при  $x_0 \neq 0$ ). Тогда производная функции  $y = \sqrt{x}$  в произвольной точке  $x$  из области определения функции, кроме  $x = 0$  (то есть при  $x > 0$ ), равна:  $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Следовательно,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \circ$$

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ . Учитывая определение производной функции  $y = f(x)$ , запишем результаты, полученные при рассмотрении касательной к графику функции (с. 35).

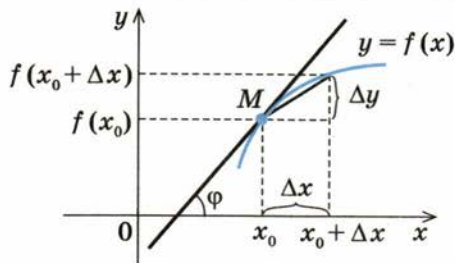


Рис. 20

к оси  $Ox$  (угол отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки). Следовательно, если  $k$  — угловой коэффициент касательной, то  $k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$ . То есть

**значение производной в точке  $x_0$  равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$  и равно угловому коэффициенту этой касательной**

(угол отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки).

Таким образом, если  $y = kx + b$  — уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M$  с абсциссой  $x_0$  (и ординатой  $f(x_0)$ ), то  $k = f'(x_0)$ . Тогда уравнение касательной можно записать так:  $y = f'(x_0) \cdot x + b$ . Чтобы найти значение  $b$ , учтем, что эта касательная проходит через точку  $M(x_0; f(x_0))$ . Следовательно, координаты точки  $M$  удовлетворяют последнему уравнению, то есть  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ . Отсюда  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ , и уравнение касательной имеет вид  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ . Его удобно записать так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Это уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .**

**Замечание.** Угол  $\varphi$ , который образует неперпендикулярная касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  с положительным направлением оси  $Ox$ , может быть нулевым, острым или тупым. Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что в случае, когда  $f'(x_0) > 0$  (то есть  $\operatorname{tg} \varphi > 0$ ), угол  $\varphi$  будет острым, а в случае, когда  $f'(x_0) < 0$  (то есть  $\operatorname{tg} \varphi < 0$ ), угол  $\varphi$  будет тупым. Если  $f'(x_0) = 0$  (то есть  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ), то  $\varphi = 0$  (то есть касательная параллельна оси  $Ox$  или совпадает с ней). И наоборот, если касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  образует с положительным направлением оси  $Ox$  острый угол  $\varphi$ , то  $f'(x_0) > 0$ , если тупой угол — то  $f'(x_0) < 0$ , а если касательная параллельна оси  $Ox$  или совпадает с ней ( $\varphi = 0$ ), то  $f'(x_0) = 0$ .

Если же касательная образует с осью  $Ox$  прямой угол ( $\varphi = 90^\circ$ ), то функция  $f(x)$  производной в точке  $x_0$  не имеет ( $\operatorname{tg} 90^\circ$  не существует).

Как было обосновано выше, тангенс угла  $\varphi$  наклона касательной в точке  $M$  с абсциссой  $x_0$  (рис. 20) вычисляется по формуле  $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . С другой стороны,

ны,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ , тогда

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Напомним, что в уравнении прямой  $y = kx + b$  угловой коэффициент  $k$  равен тангенсу угла  $\varphi$  наклона прямой

**7. Механический смысл производной.** Записывая определение производной в точке  $t_0$  для функции  $x(t)$ :

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

и сопоставляя полученный результат с понятием мгновенной скорости прямолинейного движения:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можно сделать вывод, что *производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента.*

В частности, *производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции, что может применяться к разнообразнейшим физическим величинам.* Например, мгновенная скорость  $v$  неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость пройденного пути  $s$  от времени  $t$ ; ускорение  $a$  неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость скорости  $v$  от времени  $t$ .

Если  $s = s(t)$  — зависимость пройденного пути от времени, то  
 $v = s'(t)$  — скорость прямолинейного движения ( $v = v(t)$ );  
 $a = v'(t)$  — ускорение прямолинейного движения.

## 8. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

● Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то в этой точке существует ее производная  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . То есть при  $\Delta x \rightarrow 0$  значение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0).$$

Для обоснования непрерывности функции  $y = f(x)$  достаточно обосновать, что при  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Действительно, при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем:  $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$ . Из этого

следует, что функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Таким образом, **если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.**

Из этого утверждения следует:

**если функция  $f(x)$  дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке.** ○

Отметим, что *обратное утверждение неверно.* Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производной в некоторых точках этого промежутка.

Например, функция  $y = |x|$  (рис. 21) непрерывна при всех значениях  $x$ , но она не имеет производной в точке  $x = 0$ . Действительно, если  $x_0 = 0$  и

$$y = f(x) = |x|, \text{ то } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$



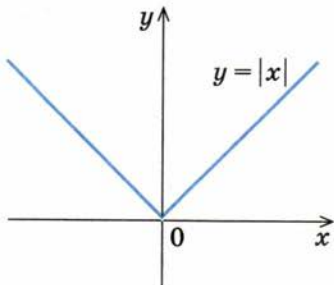


Рис. 21

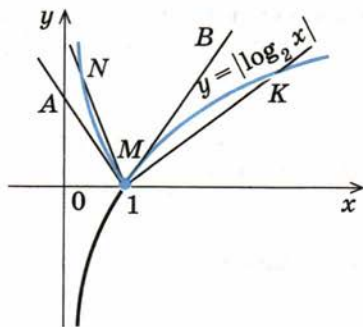


Рис. 22

Поэтому при  $\Delta x \rightarrow 0$  отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  не имеет предела, а значит, и функция  $y = |x|$  не имеет производной в точке 0.

**З а м е ч а н и е.** Тот факт, что непрерывная функция  $f(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ , означает, что к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$  нельзя провести касательную (или соответствующая касательная перпендикулярна к оси  $Ox$ ). График в этой точке может иметь излом (рис. 21), а может иметь значительно более сложный вид<sup>1</sup>.

Например, к графику непрерывной функции  $y = |\log_2 x|$  (рис. 22) в точке  $M$  с абсциссой  $x = 1$  нельзя провести касательную (а значит, эта функция не имеет производной в точке 1). Действительно, по определению касательная — это предельное положение секущей. Если точка  $N$  будет приближаться к точке  $M$  по левой части графика, то секущая  $MN$  займет предельное положение  $MA$ . Если же точка  $K$  будет приближаться к точке  $M$  по правой части графика, то секущая  $MK$  займет предельное положение  $MB$ . Но это две разные прямые, следовательно, в точке  $M$  касательной к графику данной функции не существует.

### Примеры решения задач

#### Задача 1

Найдите тангенс угла  $\varphi$  наклона касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , к оси  $Ox$ , если: 1)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 1$ ; 2)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 25$ .

#### Решение

1) ► По геометрическому смыслу производной  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$ . Учитывая, что  $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ , получаем:

#### Комментарий

По геометрическому смыслу производной  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона касательной, проведенной к графику функции

<sup>1</sup> Например, в курсе математического анализа приведены примеры функций, которые являются непрерывными, но ни в одной точке не имеют производной.

$$f'(x_0) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg} \varphi = f'(1) = -1$ .  $\triangleleft$

2)  $\blacktriangleright$  Поскольку  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,

то  $f'(x_0) = f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$ . По геометрическому смыслу производной  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$ .

Следовательно,  $\operatorname{tg} \varphi = f'(25) = 0,1$ .  $\triangleleft$

$y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , к оси  $Ox$ . Поэтому для нахождения  $\operatorname{tg} \varphi$  достаточно найти производную функции  $f(x)$ , а затем найти значение производной в точке  $x_0$ .

Для нахождения производных заданных функций отметим, что соответствующие формулы производных приведены в пункте 5 таблицы 3 (и обоснованы на с. 36–37). Поэтому далее при решении задач мы будем использовать эти формулы как табличные значения.

**Задача 2** Используя формулу  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ , запишите уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1}{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

**Решение**

$\blacktriangleright$  Если  $f(x) = \frac{1}{x}$ , то  $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ .

Тогда  $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ . Подставляя эти значения в уравнение касательной  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , получаем:

$$y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

То есть  $y = -4x + 4$  — искомое уравнение касательной.  $\triangleleft$

**Комментарий**

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  в общем виде записывается так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы записать это уравнение для заданной функции, необходимо найти значение  $f(x_0)$ , производную  $f'(x)$  и значение  $f'(x_0)$ . Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через  $f(x)$  и использовать табличное значение производной:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

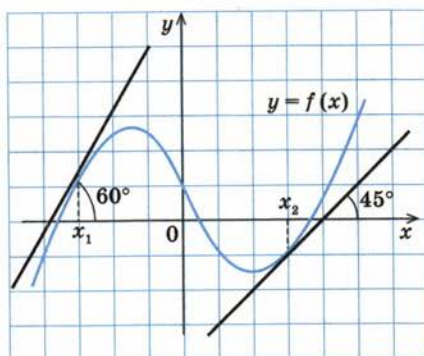
### Вопросы для контроля

- Объясните на примерах и дайте определения приращения аргумента и приращения функции в точке  $x_0$ .
- а) Охарактеризуйте понятие непрерывности функции в точке, пользуясь понятиями приращения аргумента и функции. б) Обоснуйте запись непрерывности функции в точке через приращение аргумента и функции.

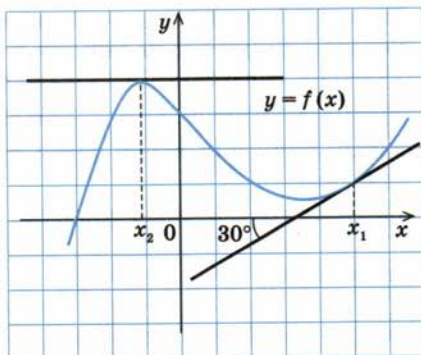
3. Объясните, как можно вычислить мгновенную скорость точки при движении точки по прямой.
4. Объясните, какая прямая считается касательной к графику функции.
5. Как вычислить тангенс угла наклона секущей, проходящей через две точки графика некоторой функции, к оси  $Ox$ ?
6. Объясните, как можно определить тангенс угла  $\varphi$  наклона касательной к оси  $Ox$ .
7. а) Дайте определение производной. Как обозначается производная функции  $f$  в точке  $x_0$ ?  
б\*) Опишите схему нахождения производной функции  $y = f(x)$ .
8. а) Запишите, чему равна производная функции:
  - 1)  $c$  (где  $c$  — постоянная);    2)  $x$ ;    3)  $x^2$ ;    4)  $y = \frac{1}{x}$ ;    5)  $y = \sqrt{x}$ .
 б\*) Обоснуйте формулы для нахождения производных функций, приведенных в пункте а).
9. Что такое производная с геометрической точки зрения?
10. Что такое производная с механической точки зрения?
11. а) Запишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .  
б\*) Обоснуйте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .
12. а) Объясните связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.  
б\*) Обоснуйте связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

### Упражнения

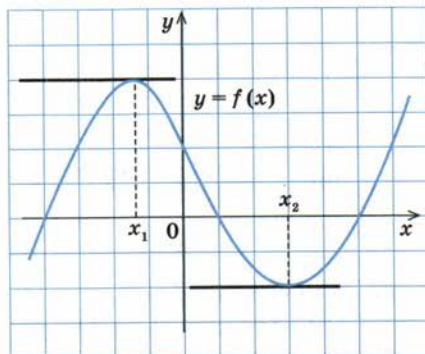
- 1°. Для функции  $y = 2x$  найдите приращение  $\Delta y$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$  в точке  $x_0$ , если:
  - 1)  $x_0 = 2$  и  $\Delta x = 3$ ;    2)  $x_0 = 1,5$  и  $\Delta x = 3,5$ ;    3)  $x_0 = 0,5$  и  $\Delta x = 2,5$ .
2. Найдите приращение  $\Delta y$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$  в точке  $x_0$  для функции:
  - 1)  $y = 3x$ ;    2)  $y = x^3$ ;    3)  $y = x^2 - x$ ;    4)  $y = x + \frac{1}{x}$ .
3. Закон движения точки по прямой задается формулой  $x = x(t)$ , где  $x$  — координата точки в момент времени  $t$ . Найдите:
  - а) среднюю скорость движения точки на отрезке  $[2; 4]$ ;
  - б) мгновенную скорость движения точки при  $t = 2$ ; если:
    - 1)  $x(t) = 3t + 4$ ;    2)  $x(t) = -2t + 1$ ;    3)  $x(t) = 5t - 7$ ;    4)  $x(t) = -3t - 2$ .
4. Пользуясь схемой вычисления производной, приведенной на с. 36, найдите производную функции:
  - 1)  $y = 3x$ ;    2)  $y = -5x$ ;    3\*)  $y = x^3$ ;    4\*)  $y = x^2 - 2x$ .
- 5°. На рисунке 23,  $a-g$  изображен график функции  $y = f(x)$  и касательные к нему в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ . Пользуясь геометрическим смыслом производной, запишите значения  $f'(x_1)$  и  $f'(x_2)$ .



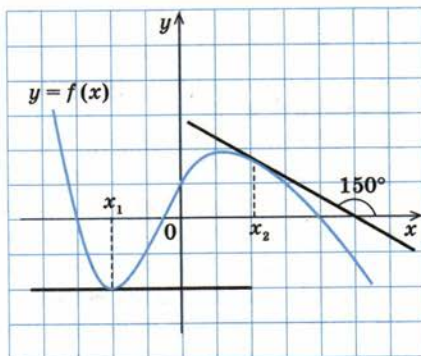
а



б



в



г

Рис. 23

6. Используя формулы, приведенные в пункте 5 таблицы 3, и геометрический смысл производной, запишите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:
- 1)  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 3$ ;
  - 2)  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 8$ ;
  - 3)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -1$ ;
  - 4)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
7. Используя формулу  $(x^2)' = 2x$ , запишите уравнение касательной к графику функции  $y = x^2$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:
- 1)  $x_0 = 1$ ;
  - 2)  $x_0 = 0$ ;
  - 3)  $x_0 = 0,5$ ;
  - 4)  $x_0 = -3$ .
- Изобразите график данной функции и соответствующую касательную.
8. Используя формулу  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , запишите уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x}$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:
- 1)  $x_0 = 1$ ;
  - 2)  $x_0 = 0,25$ ;
  - 3)  $x_0 = 4$ ;
  - 4)  $x_0 = 9$ .

9. Используя механический смысл производной, найдите скорость тела, которое движется по закону  $s = s(t)$ , в момент времени  $t$ , если:

1)  $s(t) = t$ ,  $t = 7$ ;                      2)  $s(t) = t^2$ ,  $t = 6,5$ ;

3)  $s(t) = t^3$ ,  $t = 5$ ;                      4)  $s(t) = \sqrt{t}$ ,  $t = 4$ .

10. Закон движения точки задан графиком зависимости пути  $s$  от времени  $t$  (рис. 24).

1) Найдите среднюю скорость точки с момента  $t = 2$  до  $t = 3$ .

2) Сравните скорости точки в моменты времени  $t_1 = 2$  и  $t_2 = 3$ .

3) Изменяла ли точка направление движения? Если изменяла, то в какой момент времени?

11. На рисунке 25 изображен график функции  $y = f(x)$  на промежутке  $[-4; 7]$ . Используя геометрический смысл производной, укажите на промежутке  $(-4; 7)$ :

1) Значения аргумента, в которых производная  $f'(x)$  равна нулю.

2) Значения аргумента, в которых производная  $f'(x)$  не существует. Существует ли в каждой точке с найденными абсциссами касательная к графику функции  $y = f(x)$ ?

3\*) Промежутки, в которых производная  $f'(x)$  положительна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков.

4\*) Промежутки, в которых производная  $f'(x)$  отрицательна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков.

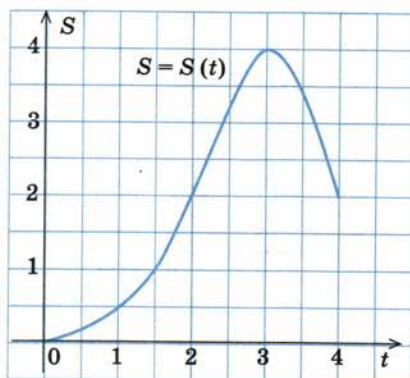


Рис. 24

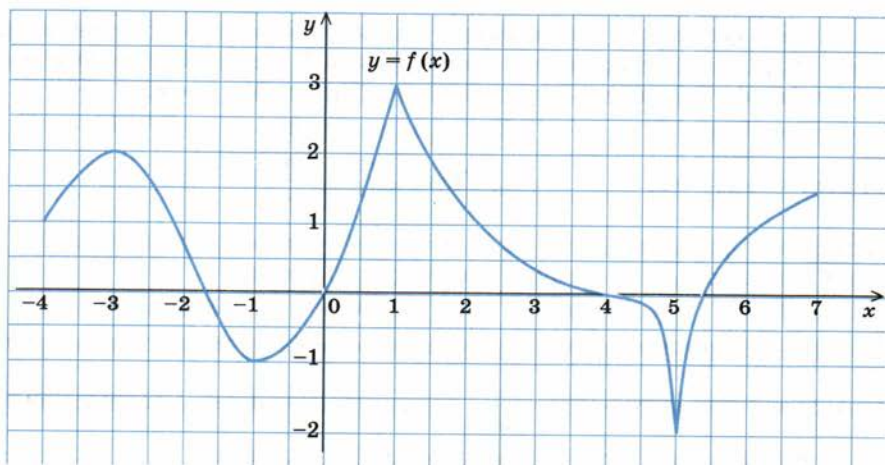


Рис. 25

## § 4. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Таблица 4

1. Производные некоторых элементарных функций				
$c' = 0$ ( $c$ — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
2. Правила дифференцирования				
Правило		Пример		
$(cu)' = cu'$ <i>Постоянный множитель можно выносить за знак производной</i>		$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$		
$(u + v)' = u' + v'$ <i>Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных</i>		$(x + \sqrt{x})' = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$		
$(uv)' = u'v + v'u$		$((x + 2)x^2)' = (x + 2)'x^2 + (x^2)'(x + 2) =$ $= (x' + 2')x^2 + 2x(x + 2) =$ $= (1 + 0)x^2 + 2x(x + 2) = 3x^2 + 4x$		
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$		$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - x' \cdot 1}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$		
3. Производная сложной функции (функции от функции)				
Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$ , то есть $y = f(u(x))$ , то $(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$ . Коротко это можно записать так*: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$		$((3x - 1)^5)' = 5(3x - 1)^4(3x - 1)' =$ $= 5(3x - 1)^4((3x)' - 1)' =$ $= 5(3x - 1)^4(3 - 0) = 15(3x - 1)^4$ . (Если $u = 3x - 1$ , тогда $(u^5)'_x = 5u^4 u'_x$ .)		

### Объяснение и обоснование

**1. Правила дифференцирования.** Используя определение производной, в пункте 5 § 3 были найдены производные некоторых элементарных функций:

\* В обозначениях  $y'_x$ ,  $f'_u$ ,  $u'_x$  нижний индекс указывает, по какому аргументу берется производная.

$$c' = 0 \quad (c \text{ — постоянная}), \quad (x)' = 1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Для нахождения производных в более сложных случаях целесообразно помнить *правила дифференцирования* — специальные правила нахождения производной от суммы, произведения и частного тех функций, для которых мы уже знаем значения производных, и правило нахождения производной сложной функции (функции от функции).

Обоснуем эти правила. Для сокращения записей используем такие обозначения функций и их производных в точке  $x_0$ :

$$u(x_0) = u, \quad v(x_0) = v, \quad u'(x_0) = u', \quad v'(x_0) = v'.$$

**Правило 1.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их сумма дифференцируема в этой точке и

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорят:

**производная суммы равна сумме производных.**

• Для доказательства обозначим  $y(x) = u(x) + v(x)$  и используем план нахождения  $y'$  по определению производной в точке  $x_0$  (с. 36).

1) Приращение функции в точке  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

3) Выясним, к какому пределу стремится отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Поскольку функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'(x_0) = u', \quad \text{а} \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'(x_0) = v' \quad (\text{то есть } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ и } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v').$$

Учитывая, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых, получаем:

$$\text{при } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow u' + v'. \text{ Из этого следует, что } y' = u' + v'$$

$$(\text{то есть } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v').$$

Следовательно,  $(u + v)' = u' + v'$ . ○

Правило 1 можно расширить на любое конечное количество слагаемых\* ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n'.$$

**Правило 2.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их произведение дифференцируемо в этой точке и

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

• 1) Обозначим  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Сначала запишем приращения функций  $u$  и  $v$  в точке  $x_0$ :  $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ ,  $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$ .

\* Для обоснования того, что эта формула верна для любого натурального  $n$ , необходимо применить метод математической индукции (см. учебник для 10 класса, § 8).

Из этих равенств получаем:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u + \Delta u, \quad v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v = v + \Delta v. \quad (1)$$

Учитывая равенства (1), имеем

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv = \\ &= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

3) Поскольку функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'(x_0) = u', \quad \text{а} \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'(x_0) = v' \quad (\text{то есть } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ и } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v').$$

Поскольку функция  $v$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а значит, и непрерывна в этой точке, то при  $\Delta x \rightarrow 0$  значение  $\Delta v \rightarrow 0$ .

Учитывая, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых (и постоянные множители  $u$  и  $v$  можно выносить за знак предела), получаем, что при

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \rightarrow v \cdot u' + u \cdot v' + u' \cdot 0 = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

Из этого следует, что  $y' = u'v + v'u$  (то есть

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = u'v + v'u).$$

Следовательно,  $(uv)' = u'v + v'u$ .  $\circ$

**Следствие (правило 3).** Если функция  $u$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а  $c$  — постоянная ( $c = \text{const}$ ), то функция  $cu$  дифференцируема в этой точке и

$$(cu)' = cu'.$$

Коротко говорят:

**постоянный множитель можно выносить за знак производной.**

- Для доказательства используем правило 2 и известный из § 3 факт, что  $c' = 0$ :

$$(cu)' = c'u + u'c = 0 \cdot u + u'c = cu'. \quad \circ$$

**Правило 4.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$  и функция  $v$  не равна нулю в этой точке, то их частное  $\frac{u}{v}$  также дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

- Эту формулу можно получить аналогично производной произведения. Но можно использовать более простые рассуждения, если принять без доказательства, что производная данного частного существует. Обозначим функцию  $\frac{u}{v}$  через  $t$ . Тогда  $\frac{u}{v} = t$ ,  $u = vt$ . Найдем производную функции  $u$  по правилу дифференцирования произведения:  $u' = v't + t'v$ .



Выразим из этого равенства  $t'$ , а вместо  $t$  подставим его значение  $\frac{u}{v}$ . По-

лучим:  $t' = \frac{u' - v't}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ . Следовательно,  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ . ○

Используя правило нахождения производной произведения и формулу  $x' = 1$ , обоснуем, что **производная функции  $y = x^n$  при натуральном  $n > 1$  вычисляется по формуле**

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (2)$$

- При  $n = 2$  получаем:  $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x' \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$ . Тот же результат дает и применение формулы (2):  $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$ . При  $n = 3$  получаем:  $(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$ . Тот же результат дает и применение формулы (2):  $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$ . Как видим, приведенные соображения позволяют, опираясь на предыдущий результат, обосновать формулу для следующего значения  $n$ .

Допустим, что формула (2) выполняется для  $n = k$  ( $k > 1$ ), то есть

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажем, что тогда формула (2) верна и для следующего значения  $n = k + 1$ . Действительно,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x' \cdot x^k = kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k \cdot x^k + x^k = (k + 1)x^k.$$

То есть, если формула (2) выполняется при  $n = 2$ , то она выполняется и для следующего значения  $n = 3$ . Но тогда формула (2) выполняется и для следующего значения  $n = 4$ , а следовательно, и для  $n = 5$  и т. д. для любого\* натурального  $n > 1$ . ○

Можно обосновать (см. с. 57), что *формула  $(x^n)' = nx^{n-1}$  верна для любого действительного показателя степени  $n$  (но только при тех значениях  $x$ , при которых определена ее правая часть).*

- Например, если  $n = 1$  или  $n = 0$ , то при  $x \neq 0$  эта формула также верна. Действительно, если  $x \neq 0$ , то по формуле (2):

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

что совпадает со значениями производных функций  $x$  и  $1$ , полученных в пункте 1.3.

Если  $n$  — целое отрицательное число, то  $n = -m$ , где  $m$  — натуральное число. Тогда при  $x \neq 0$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \\ &= -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

\* В приведенном обосновании фактически неявно использован метод математической индукции (см. учебник для 10 класса, § 8), который позволяет аргументированно сделать вывод, что рассмотренное утверждение выполняется для любого натурального  $n$  (в данном случае  $n > 1$ ).

Следовательно, формула (2) выполняется и для любого целого показателя степени.

Если  $n = \frac{1}{2}$ , то при  $x > 0$  имеем  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ . Как известно из § 3,  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(при  $x > 0$ ). Но по формуле (2):  $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . То есть

формула (2) верна и при  $n = \frac{1}{2}$ . ○

**2. Производная сложной функции.** Сложной функцией обычно называют функцию от функции. Если переменная  $y$  является функцией от  $u$ :  $y = f(u)$ , а  $u$ , в свою очередь, функцией от  $x$ :  $u = u(x)$ , то  $y$  является сложной функцией от  $x$ , то есть  $y = f(u(x))$ .

В таком случае говорят, что  $y$  является сложной функцией независимого аргумента  $x$ , а  $u$  называют промежуточным аргументом.

Например, если  $y = f(u) = \sqrt{u}$ ,  $u = u(x) = x - 2$ , то  $y(x) = f(u(x)) = \sqrt{x-2}$  — сложная функция, которая определена только при тех значениях  $x$ , для которых  $x - 2 \geq 0$ , то есть при  $x \geq 2$  (промежуточный аргумент  $u = x - 2$ ).

**Правило 5 (производная сложной функции).** Если функция  $u(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , а функция  $f(u)$  — производную в точке  $u_0 = u(x_0)$ , то сложная функция  $y = f(u(x))$  также имеет производную в точке  $x_0$ , причем

$$(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

- Поскольку по условию функция  $u(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , то она является непрерывной в этой точке (с. 31), и тогда малому изменению аргумента в точке  $x_0$  соответствуют малые изменения значений функции, то есть при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Delta u \rightarrow 0$  (с. 30).

Из равенства  $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$  имеем

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u.$$

Тогда

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0)) = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta f.$$

Дальнейшее доказательство проведем только для таких функций  $u(x)$ , в которых  $\Delta u \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ . При  $\Delta u \neq 0$

представим  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  следующим образом:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ . Учитывая, что при

$\Delta x \rightarrow 0$   $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'_x(x_0) = u'_x$ , а при  $\Delta u \rightarrow 0$   $\frac{\Delta f}{\Delta u} \rightarrow f'(u_0) = f'_u$ , получаем, что при

$\Delta x \rightarrow 0$  (и соответственно  $\Delta u \rightarrow 0$ )  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow f'_u \cdot u'_x$ . Из этого следует,

что

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x,$$

то есть

$$(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

Следовательно, производная сложной функции  $y = f(u(x))$  равна произведению производной данной функции  $y = f(u)$  по промежуточному аргументу  $u$  (обозначается  $f'_u$ ) на производную промежуточного аргумента  $u = u(x)$  по независимому аргументу  $x$  (обозначается  $u'_x$ ). ○

### Примеры решения задач

**Задача 1** Найдите производную функции:

$$1) y = x^7 + x^3; \quad 2) y = x^8(2x + x^4); \quad 3) y = \frac{x+2}{5-x}.$$

**Решение**

$$1) \blacktriangleright y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2. \quad \triangleleft$$

$$2) \blacktriangleright y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)' \cdot (2x + x^4) + (2x + x^4)' \cdot x^8. \\ \text{Учитывая, что } (x^8)' = 8x^7, \\ (2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3, \text{ имеем } y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}. \quad \triangleleft$$

$$3) \blacktriangleright y' = \left( \frac{x+2}{5-x} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot (5-x) - (5-x)' \cdot (x+2)}{(5-x)^2}.$$

$$\text{Учитывая, что } (x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1, \quad (5-x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1, \text{ имеем}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \frac{5-x+x+2}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}. \quad \triangleleft$$

**Комментарий**

Напомним, что алгебраическое выражение (формулу, задающую функцию) называют по результату последнего действия, которое необходимо выполнить при нахождении значения заданного выражения. Следовательно, в задании 1 сначала необходимо найти производную суммы:

$$(u + v)' = u' + v',$$

в задании 2 — производную произведения:

$$(uv)' = u'v + u'v,$$

в задании 3 — производную частного:

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Также в заданиях 1 и 2 следует использовать формулу  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , а в задании 2 учесть, что при вычислении производной  $2x$  постоянный множитель 2 можно вынести за знак производной. Можно заметно упростить решение задания 2, если сначала раскрыть скобки, а затем взять производную суммы.

**Задача 2** Вычислите значение производной функции  $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$  в указанных точках:  $x = 4$ ,  $x = 0,01$ .

## Решение

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f'(x) &= (x^2 - 5\sqrt{x})' = (x^2)' - 5(\sqrt{x})' = \\ &= 2x - 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{5}{2\sqrt{x}}. \\ f'(4) &= 2 \cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{4}} = 8 - \frac{5}{4} = 6\frac{3}{4}. \\ f'(0,01) &= 2 \cdot 0,01 - \frac{5}{2\sqrt{0,01}} = 0,02 - \frac{5}{2 \cdot 0,1} = \\ &= 0,02 - \frac{5}{0,2} = 0,02 - 25 = -24,98. \end{aligned}$$

Ответ:  $6\frac{3}{4}$ ;  $-24,98$ .  $\triangleleft$

## Комментарий

Для нахождения значения производной в указанных точках достаточно найти производную данной функции и в полученное выражение подставить заданные значения аргумента. При вычислении производной следует учесть, что заданную разность можно рассматривать как алгебраическую сумму выражений  $x^2$  и  $(-5\sqrt{x})$ , а при нахождении производной  $(-5\sqrt{x})$  за знак производной вынести постоянный множитель  $(-5)$ . В результате мы получаем разность производных функций  $x^2$  и  $5\sqrt{x}$ .

**Задача 3** Найдите значения  $x$ , при которых производная функции  $f(x) = x^4 - 32x$  равна нулю.

## Решение

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f'(x) &= (x^4 - 32x)' = \\ &= (x^4)' - 32x' = 4x^3 - 32. \\ f'(x) &= 0. \text{ Тогда } 4x^3 - 32 = 0, \\ x^3 &= 8, x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.  $\triangleleft$

## Комментарий

Чтобы найти соответствующие значения  $x$ , достаточно найти производную данной функции, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение.

**Задача 4** Найдите производную функции  $f$ :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= (x^3 - 1)^{-7}; & 2) f(x) &= \sqrt{5x^2 + x}; \\ 3^*) f(x) &= (1 + \sqrt{2x + 3})^3 + \frac{1}{(3x - 2)^4}. \end{aligned}$$

## Решение

$$\begin{aligned} 1) \blacktriangleright f'(x) &= -7(x^3 - 1)^{-7-1} \cdot (x^3 - 1)'. \\ \text{Учитывая, что} \\ (x^3 - 1)' &= (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2, \\ \text{получаем:} \\ f'(x) &= -7(x^3 - 1)^{-8} \cdot 3x^2 = \\ &= -21x^2(x^3 - 1)^{-8} = -\frac{21x^2}{(x^3 - 1)^8}; \triangleleft \end{aligned}$$

## Комментарий

В заданиях 1 и 2 необходимо найти соответственно производную степени и корня, но в основании степени и под знаком корня стоит не аргумент  $x$ , а выражения с этим аргументом (тоже функции от  $x$ ). Следовательно, необходимо найти производные сложных функций.

$$2) \blacktriangleright f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x^2+x}} \cdot (5x^2+x)'$$

Учитывая, что  
 $(5x^2+x)' = 5(x^2)' + x' =$   
 $= 5 \cdot 2x + 1 = 10x + 1$ , получаем:

$$f'(x) = \frac{10x+1}{2\sqrt{5x^2+x}}; \triangleleft$$

$$3) \blacktriangleright f'(x) = \left( (1+\sqrt{2x+3})^3 \right)' + \left( \frac{1}{(3x-2)^4} \right)'$$

Найдем производную каждого слагаемого.

$$A = \left( (1+\sqrt{2x+3})^3 \right)' =$$

$$= 3(1+\sqrt{2x+3})^2 (1+\sqrt{2x+3})'$$

Учитывая, что

$$(1+\sqrt{2x+3})' = 1' + (\sqrt{2x+3})' =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot (2x+3)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}},$$

получаем:  $A = \frac{3(1+\sqrt{2x+3})^2}{\sqrt{2x+3}}$ .

$$B = \left( \frac{1}{(3x-2)^4} \right)' = ((3x-2)^{-4})' =$$

$$= -4(3x-2)^{-4-1} (3x-2)' = -\frac{12}{(3x-2)^5}.$$

$$f'(x) = A + B = \frac{3(1+\sqrt{2x+3})^2}{\sqrt{2x+3}} - \frac{12}{(3x-2)^5}. \triangleleft$$

Обозначая (в черновике или мысленно) промежуточный аргумент через  $u$  (для задания 1:  $u = x^3 - 1$ , для задания 2:  $u = 5x^2 + x$ ), по формуле  $f'_x = f'_u \cdot u'_x$  записываем производные заданных функций с учетом формул

$$(u^n)' = nu^{n-1} \text{ и } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

В задании 3 мы можем сначала найти производную суммы, а далее — производную каждого слагаемого как производную сложной функции.

Выражение  $A = \left( (1+\sqrt{2x+3})^3 \right)'$  — это производная степени  $(u^3)'$ , но это производная сложной функции, у которой промежуточный аргумент  $u = 1 + \sqrt{2x+3}$ .

Находя  $u' = (1 + \sqrt{2x+3})'$ , придется снова рассматривать производную суммы, при этом производную  $(\sqrt{2x+3})'$  — рассматривать также как производную сложной функции  $(\sqrt{u})$ , у которой промежуточный аргумент  $u = 2x + 3$ .

Второе слагаемое можно записать как  $(3x-2)^{-4}$ , то есть  $u^{-4}$ . Тогда промежуточный аргумент будет  $u = 3x - 2$ . Отметим, что для нахождения производной второго слагаемого можно использовать и формулу для производной частного.

### Вопросы для контроля

1. Запишите правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций. Проиллюстрируйте их применение на примерах.
2. Запишите формулу нахождения производной степенной функции  $x^n$ . Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

3. Объясните на примерах правило нахождения производной сложной функции.
- 4\*. Обоснуйте правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций и правило нахождения производной сложной функции.
- 5\*. Обоснуйте формулу нахождения производной степенной функции  $x^n$  для целых значений  $n$ .

### Упражнения

Найдите производную функции (1–5).

- 1°. 1)  $y = x^8$ ; 2)  $y = x^{-5}$ ; 3)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ; 4)  $y = x^{20}$ ; 5)  $y = x^{-20}$ ; 6)  $y = x^{\frac{1}{2}}$ .
2. 1°)  $f(x) = x + 3$ ; 2°)  $f(x) = x^5 - x$ ; 3)  $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$ ; 4)  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ .
3. 1)  $f(x) = 2x^3 + 3x$ ; 2)  $f(x) = x^2 + 5x + 2$ ;  
3)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ ; 4)  $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^3 + 3$ .
4. 1)  $y = x^2(2x + x^4)$ ; 2)  $y = (2x - 1)(1 - x^2)$ ;  
3)  $y = (3 + x^3)(2 - x)$ ; 4)  $y = \sqrt{x}(3x^2 - x)$ .
5. 1)  $y = \frac{x^2}{x+3}$ ; 2)  $y = \frac{2x+1}{3x-2}$ ; 3)  $y = \frac{2-x}{5x+1}$ ; 4)  $y = \frac{1-2x}{x^2}$ .
6. Вычислите значения производной функции  $f(x)$  в указанных точках:  
1°)  $f(x) = x^2 + 2x$ ;  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ; 2°)  $f(x) = x^4 - 4x$ ;  $x = 2$ ,  $x = -1$ ;  
3)  $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ ;  $x = 0$ ,  $x = -3$ ; 4)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ;  $x = -\sqrt{2}$ ,  $x = 0,1$ .
7. Найдите значения  $x$ , для которых производная функции  $f(x)$  равна нулю:  
1°)  $f(x) = 3x^2 - 6x$ ; 2°)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5$ ;  
3)  $f(x) = 12x + \frac{3}{x}$ ; 4)  $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$ .
8. Решите неравенство  $f'(x) < 0$ , если:  
1°)  $f(x) = 2x - x^2$ ; 2°)  $f(x) = x^3 + 3x^2$ ; 3)  $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ ; 4)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .
9. Задайте формулами элементарные функции  $f(u)$  и  $u(x)$ , из которых состоит сложная функция  $y = f(u(x))$ :  
1)  $y = \sqrt{\sin x}$ ; 2)  $y = (2x + x^2)^5$ ; 3)  $y = \sqrt{x^3 - x}$ ; 4)  $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .
10. Найдите область определения функции:  
1°)  $y = (2x^3 - 4x)^5$ ; 2°)  $y = \sqrt{2x+6}$ ; 3°)  $y = \ln(2x - 8)$ ; 4)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ;  
5)  $y = \sqrt{\sin x}$ ; 6)  $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$ ; 7\*)  $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$ ; 8\*)  $y = \arcsin(\log_{0,1} x)$ .

11. Найдите производную функции  $f(x)$ :

$$1) f(x) = (x^2 - x)^3; \quad 2) f(x) = (2x - 1)^{-5}; \quad 3) f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4;$$

$$4) f(x) = \sqrt{5x - x^2}; \quad 5^*) f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3x}} + \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

12. Запишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:

$$1) \text{ (МАИ) } f(x) = x^2 + 3x, x_0 = 2; \quad 2) f(x) = x^3 - x, x_0 = -3;$$

$$3) f(x) = \sqrt{2x - x^3}, x_0 = 1; \quad 4) \text{ (ВГУ) } f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x}, x_0 = -1.$$

## § 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица 5

$c' = 0$ ( $c$ — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ( $x \neq 0$ )	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ( $x > 0$ )
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$		$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ( $a > 0$ , $a$ — постоянная)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ( $x > 0$ )	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ( $x > 0, a > 0, a \neq 1$ , $a$ — постоянная)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правой части формулы)

### Объяснение и обоснование

Формулы  $c' = 0$  ( $c$  — постоянная),  $(x)' = 1$ ,  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ) были обоснованы в § 3 и 4.

- Для обоснования формулы  $(\sin x)' = \cos x$  используем то, что при малых значениях  $\alpha$  значения  $\sin \alpha \approx \alpha$  (например,  $\sin 0,01 \approx 0,010$ ,  $\sin 0,001 \approx 0,001$ ). Тогда при  $\alpha \rightarrow 0$  отношение  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ , то есть

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \quad (1)^*$$

Если  $y = f(x) = \sin x$ , то, применяя формулу преобразования разности синусов в произведение и схему нахождения производной по определению (с. 36), имеем:

\* Справедливость этой формулы обоснована в п. 7.5.

$$1) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \\ = 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$3) \text{ При } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0. \text{ Тогда } \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos(x_0), \text{ учитывая (1) } \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1.$$

Следовательно, при  $\Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$ , то есть  $f'(x_0) = \cos x_0$ .

Тогда производная функции  $y = \sin x$  в произвольной точке  $x$  равна  $\cos x$ . Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad \circ$$

- Учитывая, что по формулам приведения  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ , и используя правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x. \text{ Следовательно,}$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad \circ$$

- Для нахождения производных  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  используем формулы  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  и правило нахождения производной частного. Например,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \text{ Следовательно,}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \circ$$

Чтобы обосновать формулы производных показательных и логарифмических функций, используем без доказательства свойство функции  $e^x$ , которое обосновывается в курсе высшей математики\*:

производная функции  $e^x$  равна самой функции  $e^x$ , то есть

$$(e^x)' = e^x.$$

\* Напомним, что  $e$  — иррациональное число, первые знаки которого следующие:  $e = 2,71828182\dots$



- При  $a > 0$  по основному логарифмическому тождеству имеем  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ . Тогда по правилу нахождения производной сложной функции:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a, \text{ то есть}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad \circ$$

По полученной формуле мы можем найти значение производной показательной функции для любого значения  $x$ . Следовательно, *показательная функция дифференцируема в каждой точке области определения*, а значит, *и непрерывна в каждой точке своей области определения* (то есть при всех действительных значениях  $x$ ).

- Для логарифмической функции сначала найдем производную функции  $\ln x$  (принимая без доказательства существование ее производной). Область определения этой функции —  $x > 0$ , то есть  $(0; +\infty)$ . При  $x > 0$  по основному логарифмическому тождеству имеем  $e^{\ln x} = x$ . Это равенство означает, что при  $x > 0$  функции  $e^{\ln x}$  и  $x$  совпадают (это одна и та же функция, заданная на множестве  $(0; +\infty)$ ), а значит, совпадают и их производные. Используя для левой части равенства правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$$(e^{\ln x})' = (x)'; \quad e^{\ln x} (\ln x)' = 1, \text{ то есть } x (\ln x)' = 1. \text{ Отсюда}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{где } x > 0).$$

Поскольку  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ , то

$$(\log_a x)' = \left( \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}. \text{ Следовательно,}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\text{где } x > 0, a > 0, a \neq 1, a \text{ — постоянная}). \quad \circ$$

Отметим, что приведенные выше рассуждения, связанные с нахождением производной функции  $\ln x$ , можно обобщить и получить *формулу для нахождения производной обратной функции*.

Пусть требуется найти производную функции  $y = f(x)$  при условии, что обратная ей функция  $x = g(y)$  имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Дифференцируя равенство  $x = g(y)$  по  $x$ , имеем:  $1 = g'(y) \cdot y'$ . Учитывая, что по условию  $g'(y) \neq 0$ , получаем  $y' = \frac{1}{g'(y)}$ , то есть  $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ .

Также в курсе математического анализа доказывается следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

*Если функция  $x = g(y)$  возрастает (или убывает) на интервале  $(a; b)$  и имеет не равную нулю производную  $g'(y)$  в произвольной точке  $y$  этого интервала, то обратная ей функция  $y = f(x)$  также имеет производ-*

ную  $f'(x)$  в соответствующей точке ( $x = g(y)$ ), определяемую равенством

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad (\text{то есть } y'_x = \frac{1}{x'_y}).$$

**Замечание.** Формула  $(x^n)' = nx^{n-1}$  была обоснована в § 4 только для целых значений  $n$ . Докажем, что она выполняется и при любых действительных значениях  $n$ .

- Если  $n$  — любое нецелое число, то функция  $x^n$  определена только при  $x > 0$ . Тогда по основному логарифмическому тождеству  $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ . По правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} (n \ln x)' = x^n \cdot n \cdot (\ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1}. \quad \circ$$

Следовательно, далее формулой  $(x^n)' = nx^{n-1}$  можно пользоваться при любых действительных значениях  $n$  (напомним, что в этом случае ее можно использовать только при тех значениях  $x$ , при которых определена ее правая часть).

Опираясь на полученный результат, обоснуем также формулу

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad (2)$$

которую можно использовать при тех значениях  $x$ , при которых определена ее правая часть.

- Если  $n$  — четное число, то ОДЗ правой части формулы (2):  $x > 0$ . Но при этом условии

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad (3)$$

Если  $n$  — нечетное число, то ОДЗ правой части формулы (2) задается условием:  $x \neq 0$ . При  $x > 0$  остается справедливым равенство (3). При  $x < 0$  учтем, что  $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$  и  $-x > 0$ , а также то, что при нечетном  $n$  число  $1 - n$  будет четным (поэтому  $(-1)^{1-n} = 1$ ). Тогда

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= (-\sqrt[n]{-x})' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(-x)^{1-n}} = \\ &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, и для нечетного  $n$  при всех  $x \neq 0$  формула (2) также выполняется.  $\circ$

Обратим внимание, что в последнем случае такие громоздкие преобразования пришлось выполнить вследствие того, что при  $x < 0$  выражение  $x^{\frac{1}{n}}$  не определено, а выражение  $(-x)^{\frac{1}{n}}$  существует, поскольку  $-x > 0$  при  $x < 0$ .

## Примеры решения задач

**Задача 1** Найдите производную функции:

$$1) f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}; \quad 2) f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}.$$

Решение

$$\begin{aligned} 1) \blacktriangleright f'(x) &= (\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}})' = \\ &= (\sin^2 x)' + (e^{\frac{x}{2}})' = \\ &= 2 \sin x (\sin x)' + e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)' = \\ &= 2 \sin x \cos x + \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}. \triangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \blacktriangleright f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)' = \\ &= \frac{(\ln x)' \cdot \cos 3x - (\cos 3x)' \cdot \ln x}{(\cos 3x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos 3x - (-\sin 3x)(3x)' \cdot \ln x}{\cos^2 3x} = \\ &= \frac{\cos 3x + 3x \cdot \sin 3x \cdot \ln x}{x \cos^2 3x}. \triangleleft \end{aligned}$$

Комментарий

Последовательно определим, от какого выражения берется производная (ориентируясь на результат последнего действия).

В задании 1 сначала берется производная суммы:  $(u + v)' = u' + v'$ . Затем для каждого из слагаемых используется правило вычисления производной сложной функции: берется производная от  $u^2$  и  $e^u$  и умножается на  $u'$ . Полученный результат желательно упростить по формуле:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

В задании 2 сначала берется производная частного:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ,

а для производной знаменателя используется правило вычисления производной сложной функции (производная  $\cos u$  умножается на  $u'$ ).

**Задача 2** Найдите значения  $x$ , при которых значение производной функции  $f(x) = x - \ln 2x$ :

1) равно нулю, 2) положительно, 3) отрицательно.

Решение

► Область определения данной функции:  $x > 0$ , то есть  $(0; +\infty)$ .

$$f'(x) = x' - (\ln 2x)' = 1 - \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = 1 - \frac{1}{x}.$$

Область определения функции  $f'(x)$ :  $x \neq 0$ . То есть производная  $f'(x)$  существует на всей области определения данной функции:  $x > 0$ .

$$f'(x) = 0, \quad 1 - \frac{1}{x} = 0, \quad x = 1$$

Комментарий

Производная данной функции может существовать только в точках, входящих в область определения функции. Поэтому сначала целесообразно найти область определения данной функции.

Производная функции сама является функцией от  $x$ , и поэтому для решения неравенств  $f'(x) \geq 0$  можно использовать метод интервалов.

(удовлетворяет условию  $x > 0$ ).

При  $x > 0$  неравенства  $f'(x) > 0$ , то есть  $1 - \frac{1}{x} > 0$ , и  $f'(x) < 0$ , то есть

$1 - \frac{1}{x} < 0$ , решим методом интервалов (рис. 26):

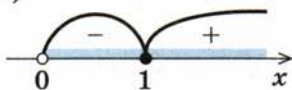


Рис. 26

- Ответ: 1)  $f'(x) = 0$  при  $x = 1$ ;  
 2)  $f'(x) > 0$  при  $x \in (1; +\infty)$ ;  
 3)  $f'(x) < 0$  при  $x \in (0; 1)$ .  $\triangleleft$

После нахождения ОДЗ соответствующего неравенства необходимо сопоставить ее с областью определения функции  $f(x)$  и продолжать решение неравенства на их общей части.

Следовательно, неравенства  $f'(x) \geq 0$  всегда решаются на общей части областей определения функций  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Для решения соответствующих неравенств достаточно на общей области определения функций  $f(x)$  и  $f'(x)$  отметить нули  $f'(x)$  и найти знак  $f'(x)$  в каждом из промежутков, на которые разбивается общая область определения.

### Задача 3

Найдите уравнение касательной к графику функции  $y = xe^x$  в точке  $x_0 = 1$ .

#### Решение

► Если  $f(x) = xe^x$ , то  $f(x_0) = f(1) = e$ .  
 $f'(x) = x' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x = e^x + xe^x$ . Тогда  $f'(x_0) = f'(1) = 2e$ . Подставляя эти значения в уравнение касательной  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , получаем:  $y = e + 2e(x - 1)$ . То есть  $y = 2ex - e$  — искомое уравнение касательной.  $\triangleleft$

#### Комментарий

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  в общем виде записывается так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы записать это уравнение для данной функции, необходимо найти  $f(x_0)$ , производную  $f'(x)$  и значение  $f'(x_0)$ . Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через  $f(x)$ , а для нахождения ее производной использовать формулу производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

#### Вопросы для контроля

- Запишите формулы нахождения производных:
  - тригонометрических функций;
  - показательной и логарифмической функций;
  - функции  $\sqrt[n]{x}$ .
- Обоснуйте формулы нахождения производных, указанных в вопросе 1.

## Упражнения

Найдите производную функции (1–7).

- 1°. 1)  $y = \cos x + 1$ ; 2)  $y = 2 \sin x - 3x$ ;  
 3)  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ; 4)  $y = x^3 - \operatorname{ctg} x$ .  
 2. 1)  $f(x) = x \operatorname{tg} x$ ; 2)  $f(x) = x \operatorname{ctg} x$ ;  
 3)  $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$ ; 4)  $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$ .  
 3. 1)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ; 2)  $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ ; 3)  $f(x) = \sin^2 x$ ; 4)  $f(x) = \cos^2 x$ .  
 4. 1)  $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ; 2)  $y = \cos^2 3x - \sin^2 3x$ ;  
 3)  $y = \sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$ ; 4)  $y = \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x$ .  
 5°. 1)  $y = \sqrt{1 + \sin x}$ ; 2)  $y = \cos x^2$ ; 3)  $y = \sin(\cos x)$ ; 4)  $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ .  
 6°. 1)  $y = 3e^x + 4$ ; 2)  $y = e^x - \ln x$ ; 3)  $y = e^{-x} + x^5$ ; 4)  $y = \ln(2x - 1)$ .  
 7. 1)  $y = e^{5x} \cos x$ ; 2)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ; 3)  $y = \sqrt{x} \lg x$ ; 4)  $y = x^3 \log_2 x$ .

Вычислите значение производной функции  $f(x)$  в указанной точке (8–9).

8. 1°)  $f(x) = \cos 2x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ; 2°)  $f(x) = x + \operatorname{tg} x$ ,  $x = 0$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ; 4)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$ ,  $x = \frac{3\pi}{8}$ .  
 9. 1°)  $f(x) = e^{3x} + \sin x$ ,  $x = 0$ ; 2°)  $f(x) = x + \ln x$ ,  $x = 2$ ;  
 3)  $f(x) = (2x^2 - 1) \ln^2 x$ ,  $x = 1$ ; 4)  $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Найдите значения  $x$ , для которых производная функции  $f(x)$  равна нулю (10–11).

10. 1°)  $f(x) = 2x - \cos x$ ; 2°)  $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ ;  
 3)  $f(x) = \sin^2 2x$ ; 4)  $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$ .  
 11. 1°)  $f(x) = \ln(x + 3) - x$ ; 2°)  $f(x) = e^x - x$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; 4)  $f(x) = e^x \sin x$ .  
 12. Решите неравенство  $f'(x) > 0$ , если:  
 1°)  $f(x) = e^{2x} - x$ ; 2°)  $f(x) = 2x - \ln x$ ;  
 3)  $f(x) = x \ln x$ ; 4)  $f(x) = (1 - x)e^{-2x}$ .  
 13. Найдите значения  $x$ , при которых значение производной функции  $f(x)$ :  
 а) равно нулю, б) положительно, в) отрицательно.  
 1)  $f(x) = x^2 \ln x$ ; 2)  $f(x) = x^3 - 3 \ln x$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ; 4)  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ .  
 14 (МАИ). Запишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:

1)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;

2)  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{8}$ ;

3)  $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ ,  $x_0 = 0$ ;

4)  $f(x) = \ln x - x$ ,  $x_0 = 1$ .

15. Найдите абсциссы  $x_0$  точек графика функции  $y = f(x)$ , в которых касательная к нему образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси  $Ox$ :

1)  $f(x) = \sin 2x$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ; 2)  $f(x) = \ln 2x$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ; 3)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $\varphi = 135^\circ$ .

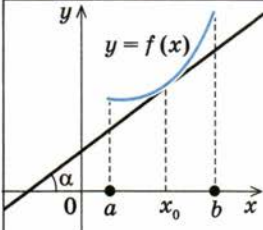
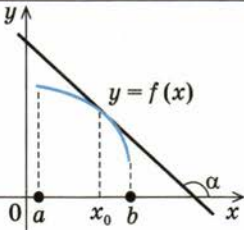
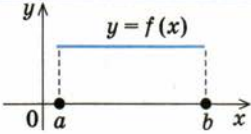
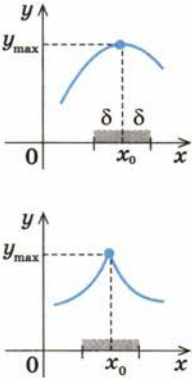
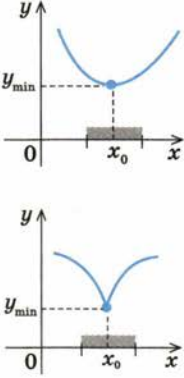
16\* (МГУГиК). Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = e^{5x+1}$ , которая параллельна прямой  $y = 5x - 8$ .

17\* (МГУГиК). Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = e^{3x-2}$ , которая параллельна прямой  $y = 3x + 17$ .

## § 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

## 6.1. Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функции и экстремумов функции

Таблица 6

1. Монотонность и постоянство функции	
<p>Достаточное условие возрастания функции</p>  <p><math>0^\circ &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> <math>f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha &gt; 0</math></p>	<p>Достаточное условие убывания функции</p>  <p><math>90^\circ &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math> <math>f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha &lt; 0</math></p>
<p>Если в каждой точке интервала <math>(a; b)</math> <math>f'(x) &gt; 0</math>, то функция <math>f(x)</math> возрастает на этом интервале.</p>	<p>Если в каждой точке интервала <math>(a; b)</math> <math>f'(x) &lt; 0</math>, то функция <math>f(x)</math> убывает на этом интервале.</p>
<p>Необходимое и достаточное условие постоянства функции</p>  <p>Функция <math>f(x)</math> постоянна на интервале <math>(a; b)</math> тогда и только тогда, когда <math>f'(x) = 0</math> во всех точках этого интервала.</p>	
2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции	
<p>Точки максимума</p> <p>Точка <math>x_0</math> из области определения функции <math>f(x)</math> называется <i>точкой максимума</i> этой функции, если найдется такая <math>\delta</math>-окрестность <math>(x_0 - \delta; x_0 + \delta)</math> точки <math>x_0</math>, что для всех <math>x \neq x_0</math> из этой окрестности выполняется неравенство</p> 	<p>Точки минимума</p> <p>Точка <math>x_0</math> из области определения функции <math>f(x)</math> называется <i>точкой минимума</i> этой функции, если найдется такая <math>\delta</math>-окрестность <math>(x_0 - \delta; x_0 + \delta)</math> точки <math>x_0</math>, что для всех <math>x \neq x_0</math> из этой окрестности выполняется неравенство</p> 

$f(x) < f(x_0)$	
$x_{\max} = x_0$ — <b>точка максимума</b>	$x_{\min} = x_0$ — <b>точка минимума</b>

**Точки максимума и минимума называются точками экстремума**  
 Значения функции в точках максимума и минимума называются экстремумами (максимумом и минимумом) функции

$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$  — максимум

$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$  — минимум

3. Критические точки

Определение	Пример
<p><b>Критическими точками</b> функции называются внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю* или не существует.</p>	<p><math>f(x) = x^3 - 12x</math> (<math>D(f) = \mathbf{R}</math>).  <math>f'(x) = 3x^2 - 12</math> — существует на всей области определения.  <math>f'(x) = 0</math> при <math>3x^2 - 12 = 0</math>, <math>x^2 = 4</math>,  <math>x = \pm 2</math> — критические точки.</p>

4. Необходимое и достаточное условия экстремума

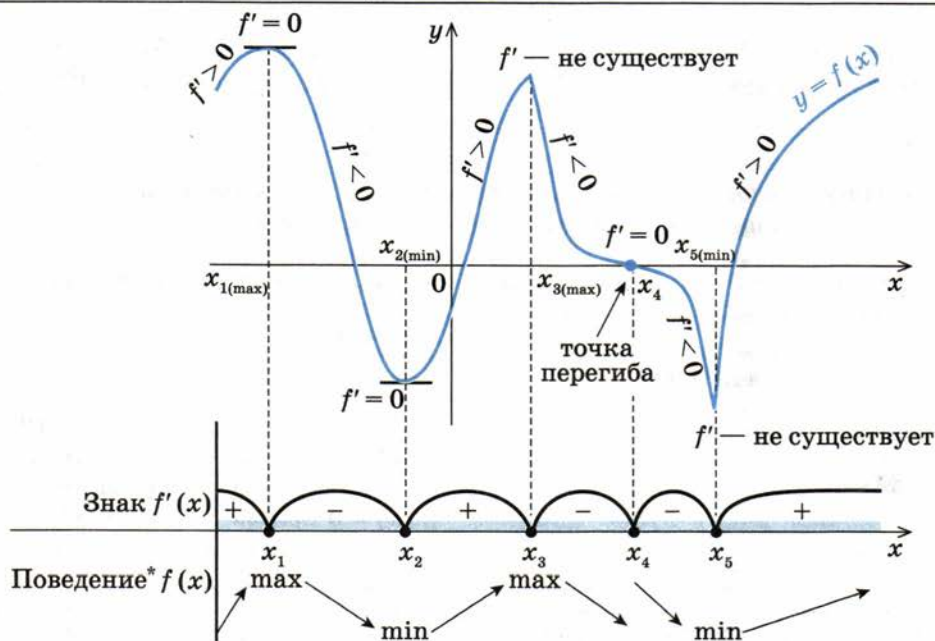
Необходимое условие экстремума	Достаточное условие экстремума
<p>В точках экстремума производная функции <math>f(x)</math> равна нулю или не существует</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <math>x_0</math> — точка экстремума функции <math>f(x)</math> </div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <math>f'(x_0) = 0</math>                      или  <math>f'(x_0)</math> — не существует                 </div> <p>(но не в каждой точке <math>x_0</math>, где <math>f'(x_0) = 0</math> или <math>f'(x_0)</math> не существует, будет экстремум)</p>	<p>Если функция <math>f(x)</math> непрерывна в точке <math>x_0</math> и производная <math>f'(x)</math> меняет знак при переходе** через точку <math>x_0</math>, то <math>x_0</math> — точка экстремума функции <math>f(x)</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                     В точке <math>x_0</math> знак <math>f'(x)</math> меняется с «+» на «-»                 </div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>x_0</math> — точка максимума                 </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                     В точке <math>x_0</math> знак <math>f'(x)</math> меняется с «-» на «+»                 </div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>x_0</math> — точка минимума                 </div> </div>

\* Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю, также называют стационарными точками.

\*\* Имеется в виду переход через точку  $x_0$  при движении слева направо.



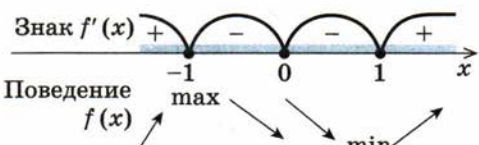
5. Пример графика функции  $y = f(x)$ , имеющей экстремумы  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 -$  критические точки)



6. Исследование функции  $y = f(x)$  на монотонность и экстремум

Схема	Пример: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Найти область определения функции.	Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$ .
2. Найти производную $f'(x)$ .	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$ .
3. Найти критические точки, то есть внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует.	$f'(x)$ существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1, x = -1$ .

\* Знаком « $\nearrow$ » обозначено возрастание функции, а знаком « $\searrow$ » — ее убывание на соответствующем промежутке.

4. Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.	
5. Определить относительно каждой критической точки, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.	
6. Записать результат исследования (промежутки монотонности и экстремумы).	<p><math>f(x)</math> возрастает на каждом из промежутков: <math>(-\infty; -1]</math> и <math>[1; +\infty)</math>;  <math>f(x)</math> убывает на <math>[-1; 1]</math>.</p> <p>Точки экстремума:  <math>x_{\max} = -1; x_{\min} = 1</math>.</p> <p>Экстремумы:  <math>y_{\max} = f(-1) = 3; y_{\min} = f(1) = -1</math>.</p>

### Объяснение и обоснование

**1. Монотонность и постоянство функции. Критические точки функции.** Производная является важным инструментом исследования функции. В частности, с помощью производной удобно исследовать функцию на монотонность (то есть на возрастание и убывание).

Напомним, что функция  $f(x)$  называется *возрастающей на множестве  $P$* , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции, то есть для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого множества из условия  $x_2 > x_1$  следует, что  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Функция  $f(x)$  называется *убывающей на множестве  $P$* , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, то есть для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого множества из условия  $x_2 > x_1$  следует, что  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Как видно из рисунка 27, а, в каждой точке графика возрастающей функции касательная образует с положительным направлением оси  $Ox$  или острый угол  $\alpha$  (тогда  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$ ), или угол, равный нулю (тогда  $f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$ ). А в каждой точке графика убывающей функции (рис. 27, б) касательная образует с положительным направлением оси  $Ox$  или тупой угол  $\alpha$  (тогда  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$ ), или угол, равный нулю (тогда  $f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$ ).

\* Как отмечается на с. 70, поскольку функция  $f(x)$  непрерывна (например, вследствие того, что она дифференцируема на всей области определения), то точки  $-1$  и  $1$  можно включить в промежутки возрастания и убывания функции.

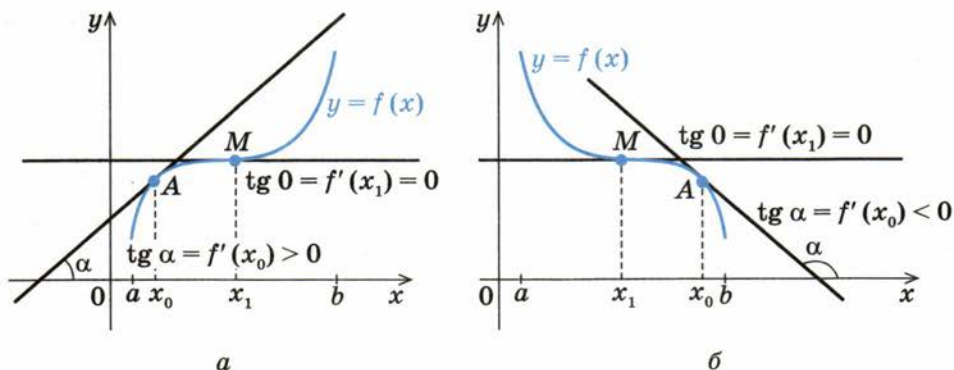


Рис. 27

Следовательно, если на каком-нибудь интервале функция  $f(x)$  дифференцируема и возрастает, то  $f'(x) \geq 0$  на этом интервале; если на каком-нибудь интервале функция  $f(x)$  дифференцируема и убывает, то  $f'(x) \leq 0$  на этом интервале.

Но для решения задач на исследование свойств функций важными являются обратные утверждения, которые позволяют по знаку производной выяснить характер монотонности функции.

Для обоснования соответствующих утверждений воспользуемся так называемой формулой Лагранжа, строгое доказательство которой приводится в курсе математического анализа. Здесь мы ограничимся только ее геометрической иллюстрацией и формулировкой.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и дифференцируема во всех точках интервала  $(a; b)$ . Тогда на этом интервале найдется такая точка  $c$ , в которой касательная  $l$  к графику функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $c$  будет параллельна секущей  $AB$ , проходящей через точки  $A(a; f(a))$ ,  $B(b; f(b))$  (рис. 28).

Действительно, рассмотрим все возможные прямые, которые параллельны секущей  $AB$  и имеют с графиком функции  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$  хотя бы одну общую точку. Та из этих прямых, которая находится на наибольшем расстоянии от секущей  $AB$ , и будет касательной к графику функции  $f(x)$  (это как раз и будет предельное положение секущей, параллельной  $AB$ ). Если обозначить абсциссу точки касания через  $c$ , то, учитывая геометрический смысл производной, получаем  $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между прямой  $l$  и положительным направлением оси  $Ox$ . Но  $l \parallel AB$ , поэтому угол  $\alpha$  ра-

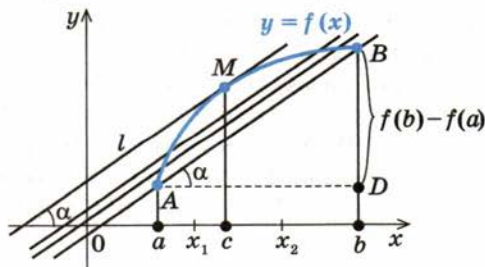


Рис. 28

вен углу наклона секущей  $AB$  к оси  $Ox$  (который, в свою очередь, равен углу  $A$  прямоугольного треугольника  $ABD$  с катетами:  $AD = b - a$ ,  $BD = f(b) - f(a)$ ).

Тогда  $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Таким образом, можно сделать вывод:

если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и дифференцируема во всех точках интервала  $(a; b)$ , то на интервале  $(a; b)$  найдется такая точка  $c \in (a; b)$ , в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*.

Теперь применим эту формулу для обоснования достаточных условий возрастания и убывания функции.

1. Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  возрастает на этом интервале.

2. Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  убывает на этом интервале.

Возьмем две произвольные точки  $x_1$  и  $x_2$  из заданного интервала. По формуле Лагранжа существует число  $c \in (x_1; x_2)$  такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (1)$$

Число  $c$  принадлежит заданному интервалу, поскольку ему принадлежат числа  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть  $x_2 > x_1$ , тогда  $x_2 - x_1 > 0$ .

Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке заданного интервала, то  $f'(c) > 0$  и из равенства (1) получаем, что  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , то есть  $f(x_2) > f(x_1)$ . Из этого следует, что функция  $f(x)$  возрастает на заданном интервале.

Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке заданного интервала, то  $f'(c) < 0$  и из равенства (1) получаем, что  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , то есть  $f(x_2) < f(x_1)$ . Из этого следует, что функция  $f(x)$  убывает на заданном интервале. ○

### Задача 1

Функция  $f(x) = x^3 + x$  определена на всем множестве действительных чисел ( $x \in \mathbf{R}$ ) и имеет производную  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  при всех значениях  $x$ . Следовательно, эта функция возрастает на всей области определения.

### Задача 2

Функция  $g(x) = \sin x - 3x$  определена на всем множестве действительных чисел ( $x \in \mathbf{R}$ ) и имеет производную  $g'(x) = \cos x - 3$ . Поскольку  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , то  $\cos x - 3 < 0$  при всех значениях  $x$ . Следовательно, эта функция убывает на всей области определения.

Заметим, что в курсе 10 класса (§ 27) мы без доказательства приняли, что при  $x > 0$  функция  $y = x^\alpha$ , где  $\alpha$  — дробное число, возрастает при  $\alpha > 0$  и убывает при  $\alpha < 0$ . Обоснуем это. Действительно,  $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ . Тогда при  $x > 0$  и  $\alpha > 0$  значение  $y' > 0$ , следовательно, функция  $y = x^\alpha$  возрастает, а при  $x > 0$  и  $\alpha < 0$  значение  $y' < 0$ , следовательно, функция  $y = x^\alpha$  убывает.

Достаточные условия возрастания и убывания функции имеют наглядную физическую иллюстрацию. Пусть по оси ординат движется точка, которая в момент времени  $t$  имеет ординату  $y = f(t)$ . Учитывая физический смысл производной, получаем, что скорость этой точки в момент времени  $t$  равна  $f'(t)$ . Если  $f'(t) > 0$ , то точка движется в положительном направлении оси ординат и с увеличением времени ордината точки увеличивается, то есть функция возрастает. Если же  $f'(t) < 0$ , то точка движется в отрицательном направлении оси ординат и с увеличением времени ордината точки уменьшается, то есть функция убывает.

Отметим, что в случае, когда  $f'(t) = 0$ , скорость точки равна нулю, то есть точка не движется, и поэтому ее ордината остается постоянной. Получаем *условие постоянства функции*.

**Функция  $f(x)$  является постоянной на интервале  $(a; b)$  тогда и только тогда, когда  $f'(x) = 0$  во всех точках этого интервала.**

● Действительно, если  $f(x) = k$  (где  $k$  — постоянная), то  $f'(x) = 0$ .

Наоборот, если  $f'(x) = 0$  во всех точках интервала  $(a; b)$ , то зафиксируем некоторое число  $x_0$  из этого интервала и найдем значение функции в точке  $x_0$  (пусть  $f(x_0) = k$ ). Для любого числа  $x$  из заданного интервала по формуле Лагранжа можно найти такое число  $c$ , которое содержится между  $x$  и  $x_0$ , что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Тогда  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ .

Поскольку  $c \in (a; b)$ , то по условию  $f'(c) = 0$ . Следовательно,  $f(x) - f(x_0) = 0$ . Таким образом, для всех  $x$  из заданного интервала  $f(x) = f(x_0) = k$ , то есть функция  $f(x)$  является постоянной. ○

**З а м е ч а н и е.** В случае, когда функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $f'(x) = 0$  во всех точках интервала  $(a; b)$ , при приближении значения  $x$  к точке  $a$  справа значение  $f(x) \rightarrow f(a)$ . Но  $f(x) = k$ , тогда и  $f(a) = k$  (аналогично обосновывается и то, что при приближении значения  $x$  к точке  $b$  слева  $f(b) = k$ ). Следовательно, в этом случае функция  $f(x)$  является постоянной на отрезке  $[a; b]$ .

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции необходимо решить неравенства  $f'(x) > 0$  и  $f'(x) < 0$  на области определения функции  $f(x)$ . Поскольку  $f'(x)$  также является функцией переменной  $x$ , то для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, которое основывается на утверждении, называемом в курсе математического анализа теоремой Дарбу\*:

*точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции  $f(x)$  на промежутки, в каждом из которых  $f'(x)$  сохраняет постоянный знак.*

\* Дарбу Жан Гастон (1842–1917) — французский математик, внесший значительный вклад в развитие дифференциальной геометрии, интегрального исчисления и механики.

Отметим, что

**внутренние\*** точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками** этой функции.

Исходя из плана решения неравенств методом интервалов (с. 21), получаем, что промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$  можно находить по схеме:

1. Найти область определения функции  $f(x)$ .
2. Найти производную  $f'(x)$ .
3. Выяснить, в каких внутренних точках области определения функции производная  $f'(x)$  равна нулю или не существует (то есть найти критические точки этой функции).
4. Отметить найденные точки на области определения функции  $f(x)$  и найти знак  $f'(x)$  в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения функции (знак можно определить, вычислив значение  $f'(x)$  в любой точке промежутка).

**Задача 3** Исследуем функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  на возрастание и убывание.

Решение

- 1. Область определения данной функции — все действительные числа:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

2. Производная  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .
3. Производная существует на всей области определения функции;

$$f'(x) = 0, \text{ если } 3x^2 - 3 = 0, \text{ то есть при } x = 1 \text{ или } x = -1.$$

4. Решаем неравенства  $f'(x) > 0$  и  $f'(x) < 0$  на области определения функции  $f(x)$  методом интервалов. Для этого отмечаем точки 1 и  $(-1)$  на области определения функции  $f(x)$  и находим знак  $f'(x)$  в каждом из полученных промежутков (рис. 29).

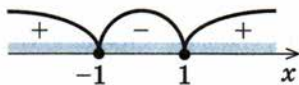


Рис. 29

Учитывая достаточные условия возрастания и убывания функции, получаем, что в тех интервалах, где производная положительна, функция  $f(x)$  возрастает, а в тех интервалах, где производная отрицательна, функция  $f(x)$  убывает. Следовательно, функция  $f(x)$  возрастает на каждом из интервалов  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$  и убывает на интервале  $(-1; 1)$ . ◁

График функции  $y = x^3 - 3x$  изображен на рисунке 30. При построении графика учтено, что  $f(-1) = 2$  и  $f(1) = -2$ . Из графика видно, что функция  $f(x) = x^3 - 3x$  возрастает не только на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ , но и на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[1; +\infty)$ , и убывает не только на интервале  $(-1; 1)$ , но и на отрезке  $[-1; 1]$ .

\* Внутренней точкой множества называется точка, которая принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

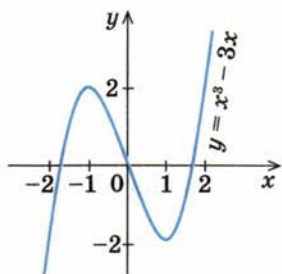


Рис. 30

Отметим, что когда функция  $f(x)$  непрерывна в любом из концов промежутка возрастания (убывания), то его всегда можно присоединить к этому промежутку (как точки  $-1$  и  $1$  в предыдущей задаче). Примем это утверждение без доказательства.

## 2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции.

На рисунке 30 изображен график функции  $y = x^3 - 3x$ . Рассмотрим окрестность точки  $x = -1$ , то есть произвольный интервал, содержащий точку  $-1$  (например,  $\delta$ -окрестность этой точки). Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки  $x = -1$ , что наибольшее значение для точек из этой окрестности функция  $f(x) = x^3 - 3x$  принимает в точке  $x = -1$ . Например, на интервале  $(-2; 0)$  наибольшее значение, равное  $2$ , функция принимает в точке  $x = -1$ . Точку  $x = -1$  называют *точкой максимума* этой функции и обозначают  $x_{\max}$ , а значение функции в этой точке  $f(-1) = 2$  называют *максимумом* функции.

Аналогично точку  $x = 1$  называют *точкой минимума* функции  $f(x) = x^3 - 3x$ , поскольку значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в любой точке некоторой окрестности точки  $1$ , например окрестности  $(0,5; 1,5)$ . Обозначают точку минимума  $x_{\min}$ , а значение функции в этой точке  $f(1) = -2$  называют *минимумом* функции. (Латинское слово *maximū* — максимум — означает «наибольшее», а *minimū* — минимум — «наименьшее».)

Точки максимума и минимума функции еще называют точками экстремума, а значения функции в этих точках называют *экстремумами* функции (от латинского слова *extremū* — экстремум, что означает «крайний»). Приведем определения точек максимума и минимума.

**Точка  $x_0$  из области определения функции  $f(x)$  называется точкой максимума этой функции, если найдется  $\delta$ -окрестность  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , такая, что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .**

**Точка  $x_0$  из области определения функции  $f(x)$  называется точкой минимума этой функции, если найдется  $\delta$ -окрестность  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , такая, что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ .**

По определению значение функции  $f(x)$  в точке максимума  $x_0$  является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  чаще всего имеет вид гладкого «холма» (рис. 31, а), но может иметь и вид заостренного «пика» (рис. 31, б). В точке максимума также может быть изолированная точка графика (понятно, что в этом случае функция не будет непрерывной в точке  $x_0$ ), в которой достигается наибольшее значение функции для некоторой окрестности точки  $x_0$  (рис. 31, в).

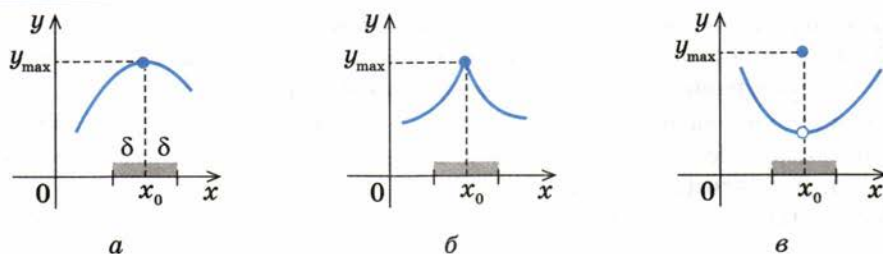


Рис. 31

Аналогично значение функции  $f(x)$  в точке минимума  $x_0$  является наименьшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  обычно имеет вид «впадины», гладкой (рис. 32, а) или заостренной (рис. 32, б). В точке минимума также может быть изолированная точка графика, в которой достигается наименьшее значение функции для некоторой окрестности точки  $x_0$  (рис. 32, в).

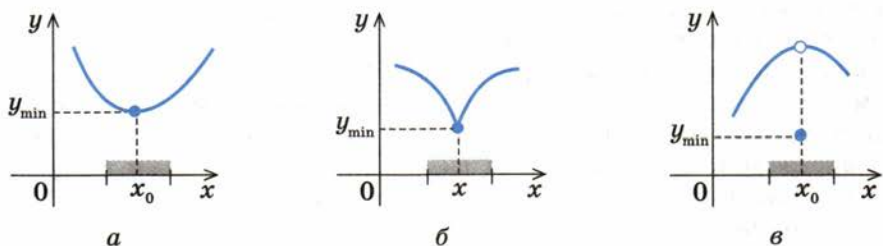


Рис. 32

**Замечание.** По определению точки экстремума — это такие точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению со значениями этой функции в точках некоторой окрестности экстремальной точки. Такой экстремум обычно называют *локальным экстремумом* (от латинского *lokalis*, что означает «местный»). Например, на рисунке 30 изображен график функции  $y = x^3 - 3x$ , которая имеет локальный максимум в точке  $x_{\max} = -1$  ( $y_{\max} = 2$ ) и локальный минимум в точке  $x_{\min} = 1$  ( $y_{\min} = -2$ ), но, как видно из графика, на всей области определения эта функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

**3. Необходимое и достаточное условия экстремума.** При исследовании функции и построении ее графика важное значение имеет нахождение точек экстремумов функции. Покажем, что *точками экстремума могут быть только критические точки функции*, то есть внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует.



**Теорема Ферма** (необходимое условие экстремума). *Если  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f(x)$  и в этой точке существует производная  $f'(x_0)$ , то она равна нулю:  $f'(x_0) = 0$ .*

- Докажем это утверждение методом от противного. Пусть  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f(x)$  и в этой точке существует производная  $f'(x_0)$ . Допустим, что  $f'(x_0) \neq 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $f'(x_0) > 0$ . По определению производной при  $x \rightarrow x_0$  (то есть при  $\Delta x \rightarrow 0$ ) отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  стремится к положительному числу  $f'(x_0)$ , следовательно, и само будет положительным при всех  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ . Для таких  $x$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Тогда при  $x > x_0$  получаем, что  $f(x) > f(x_0)$ , и, значит, точка  $x_0$  не может быть точкой максимума.

При  $x < x_0$  получаем, что  $f(x) < f(x_0)$ , следовательно, точка  $x_0$  не может быть точкой минимума. То есть точка  $x_0$  не может быть точкой экстремума, что противоречит условию.

Аналогично рассматривается и случай, когда  $f'(x_0) < 0$ . ○

Отметим, что теорема Ферма дает только необходимое условие экстремума: из того, что  $f'(x_0) = 0$ , не обязательно следует, что в точке  $x_0$  функция имеет экстремум. Например, если  $f(x) = x^3$ , то  $f'(x) = 3x^2$  и  $f'(0) = 0$ . Но точка  $x = 0$  не является точкой экстремума, поскольку функция  $x^3$  возрастает на всей числовой прямой (рис. 33).

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  (где  $x_0$  — точка экстремума функции) параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней), и поэтому ее угловой коэффициент  $f'(x_0)$  равен нулю (рис. 34).

Обратим внимание, что в точке с абсциссой  $x_0 = 0$  к графику функции  $y = x^3$  также можно провести касательную: поскольку  $f'(0) = 0$ , то этой касательной является ось  $Ox$ . Но графики функций, приведенные на рисунках 33 и 34, по-разному расположены относительно касательных. На рисунке 34, где  $x_0$  и  $x_1$  — точки экстремума, можно указать окрестности этих точек, для которых соответствующие точки графика располагаются по одну сторону от касательной, а на рисунке 33 график функции  $y = x^3$  при переходе аргумента через точку  $x_0 = 0$  (в которой производная равна нулю, но которая не является точкой экстремума) переходит с одной стороны касательной на другую. В этом случае точку  $x_0$  называют *точкой перегиба\** функции.

Функция может иметь экстремум и в той критической точке, в которой не существует производная данной функции. Например, как было показано

\* Более детально о точках перегиба см. на с. 154. Отметим, что в точке перегиба производная не обязательно должна быть равна нулю.

на с. 39, функция  $y = |x|$  не имеет производной в точке  $x = 0$ , но, как следует из ее определения (и как видно из графика — рис. 35), именно в этой точке функция имеет минимум.

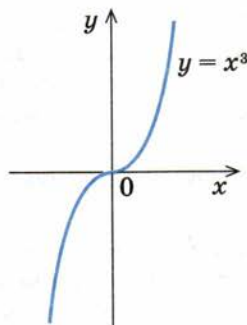


Рис. 33

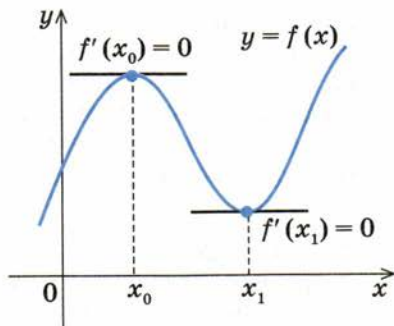


Рис. 34

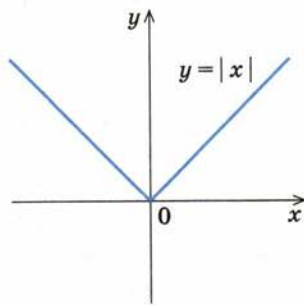


Рис. 35

Отметим, что не каждая критическая точка, в которой не существует производная данной функции, будет точкой экстремума этой функции. Например, функция  $f(x) = 3x + |x|$  не имеет производной в точке  $x = 0$ : график имеет излом при  $x = 0$  (рис. 36). Действительно, если допустить, что функция  $f(x) = 3x + |x|$  имеет производную в точке 0, то функция  $f(x) - 3x$  также должна иметь производную в точке 0. Так как  $f(x) - 3x = |x|$ , а функция  $|x|$  не имеет производной в точке 0, значит, функция  $f(x) - 3x$  не имеет производной в точке 0, то есть мы пришли к противоречию. Следовательно, функция  $f(x)$  в точке 0 производной не имеет. Но, как видно из рисунка 36, функция  $f(x)$  возрастает на всей числовой прямой и экстремума не имеет.

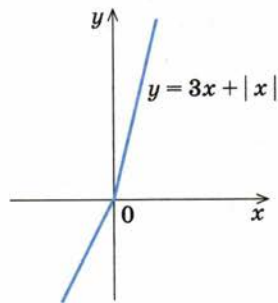


Рис. 36

Приведенные соображения и примеры показывают, что для нахождения точек экстремума функции необходимо прежде всего найти ее критические точки. Для выяснения того, является ли соответствующая критическая точка точкой экстремума, необходимо провести дополнительное исследование. Этому часто помогают достаточные условия существования экстремума в точке.

**Теорема 1 (признак максимума функции).** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и при переходе через точку  $x_0$  ее производная меняет знак с плюса на минус (то есть в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  при  $x < x_0$  значение  $f'(x) > 0$ , а при  $x > x_0$  значение  $f'(x) < 0$ ), то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f(x)$ .

- Рассмотрим заданную  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , то есть интервал  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . По условию производная  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$  (при  $x < x_0$ ).

Таким образом, функция  $f(x)$  возрастает на этом интервале, а учитывая непрерывность  $f(x)$  в точке  $x_0$ , функция  $f(x)$  возрастает и на промежутке  $(x_0 - \delta; x_0]$ . Тогда для всех  $x$  из интервала  $(x_0 - \delta; x_0)$  имеем  $x < x_0$ , следовательно,  $f(x) < f(x_0)$ .

Аналогично по условию производная  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$  (при  $x > x_0$ ). Следовательно, функция  $f(x)$  убывает на этом интервале, а учитывая непрерывность  $f(x)$  в точке  $x_0$ , функция  $f(x)$  убывает и на промежутке  $[x_0; x_0 + \delta)$ . Тогда для всех  $x$  из интервала  $(x_0; x_0 + \delta)$  имеем  $x > x_0$ , следовательно,  $f(x) < f(x_0)$ . Таким образом,  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x \neq x_0$  из некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , а это и означает, что точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f(x)$ .  $\circ$

**Теорема 2 (признак минимума функции).** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и при переходе через точку  $x_0$  ее производная меняет знак с минуса на плюс (то есть в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  при  $x < x_0$  значение  $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$  значение  $f'(x) > 0$ ), то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f(x)$ .

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1 (предлагаем провести его самостоятельно).

Теоремы 1 и 2 дают возможность сделать такой вывод: если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и производная  $f'(x)$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то  $x_0$  — точка экстремума функции  $f(x)$ .

Если же функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и ее производная  $f'(x)$  не меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то точка  $x_0$  не может быть точкой экстремума функции.

● Действительно, если, например,  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$  и на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$ , то функция возрастает на каждом из этих интервалов. Учитывая ее непрерывность в точке  $x_0$  (см. доказательство теоремы 1), получаем, что для всех  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  и для всех  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  выполняется неравенство  $f(x_0) < f(x)$ . Это означает, что на всем промежутке  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  функция  $f(x)$  возрастает и точка  $x_0$  не является точкой экстремума. Аналогично рассматривается и случай, когда  $f'(x) < 0$  на рассмотренных интервалах.  $\circ$

**Замечание.** Приведенное обоснование позволяет уточнить условия возрастания и убывания функции.

Если  $f'(x) \geq 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , причем уравнение  $f'(x) = 0$  имеет только конечное (или счетное\*) множество корней, то функция  $f(x)$  возрастает на этом интервале.

Если  $f'(x) \leq 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , причем уравнение  $f'(x) = 0$  имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция  $f(x)$  убывает на этом интервале.

\* Счетность множества означает, что мы можем установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, то есть можем указать, как занумеровать все элементы множества.

Для практического исследования функции на экстремумы можно использовать уточненный вариант схемы, приведенный на с. 69, а именно:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную  $f'(x)$ .
3. Найти критические точки (то есть внутренние точки области определения, в которых  $f'(x)$  равна нулю или не существует).
4. Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.

Пример применения этой схемы к исследованию функции на экстремум приведен в таблице 6 (с. 64) и в задаче 2, рассмотренной далее.

### Примеры решения задач

**Задача 1** Функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $(-7; 8)$ . На рисунке 37 изображен график ее производной.

- 1) Укажите промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$ .
- 2) Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума, а какие не являются точками экстремума.

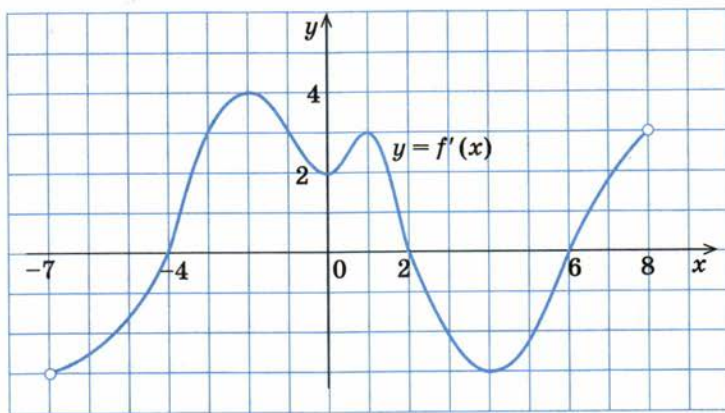


Рис. 37

#### Решение

- 1) ► Из графика имеем, что  $f'(x) > 0$  на промежутках  $(-4; 2)$  и  $(6; 8)$ , следовательно,  $f(x)$  возрастает на этих промежутках. Аналогично  $f'(x) < 0$  на промежутках  $(-7; -4)$  и  $(2; 6)$ , следовательно,  $f(x)$  убывает на этих промежутках.

#### Комментарий

- 1) Как известно, на тех промежутках, где производная функции положительна, функция возрастает, а на тех промежутках, где производная отрицательна, — убывает.

Поскольку в точках  $-4$ ,  $2$  и  $6$  существует производная  $f'(x)$ , то функция  $f(x)$  непрерывна в этих точках и поэтому эти точки можно включить в промежутки возрастания и убывания функции.

*Ответ:*  $f(x)$  возрастает на промежутках  $[-4; 2]$  и  $[6; 8]$  и убывает на промежутках  $(-7; -4]$  и  $[2; 6]$ .  $\triangleleft$

2)  $\blacktriangleright$  Производная  $f'(x)$  существует на всей области определения функции  $f(x)$  и равна нулю в точках  $-4$ ,  $2$  и  $6$ . Это внутренние точки области определения, следовательно, критическими точками будут только точки  $-4$ ,  $2$  и  $6$ .

Поскольку производная существует на всей области определения функции, то функция непрерывна в каждой точке области определения. В точках  $-4$  и  $6$  производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ », следовательно, это точки минимума. В точке  $2$  производная меняет знак с « $+$ » на « $-$ », следовательно, это точка максимума.

*Ответ:*  $x_{1\min} = -4$ ,  $x_{2\min} = 6$ ,  
 $x_{\max} = 2$ .  $\triangleleft$

Поэтому по графику выясняем промежутки, в которых производная положительна и в которых — отрицательна. Это и будут промежутки возрастания и убывания функции.

2) *Критические точки — это внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует.* Из графика видно, что производная  $f'(x)$  существует на всей заданной области определения. Следовательно, критическими точками будут только те значения  $x$ , при которых производная равна нулю.

Для определения того, является ли критическая точка точкой экстремума, используем достаточные условия экстремума: *если в критической точке функция непрерывна и ее производная меняет знак с плюса на минус, то эта критическая точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс — точкой минимума.*

**Задача 2** Для функции  $f(x) = x + \frac{25}{x}$  найдите промежутки монотонности, точки экстремума и значения функции в точках экстремума.

**Решение**

$\blacktriangleright$  1. Область определения,  $D(f)$ :  $x \neq 0$ , то есть  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

$$2. f'(x) = x' + 25\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2}.$$

3. Производная существует на всей области определения функции  $f(x)$ .

$f'(x) = 0$ . Тогда  $1 - \frac{25}{x^2} = 0$ , следовательно,  $x^2 = 25$ , то есть  $x = 5$  и  $x = -5$  — критические точки.

**Комментарий**

Исследовать функцию на монотонность и экстремум можно по схеме:

1. *Найти область определения функции.*

2. *Найти производную  $f'(x)$ .*

3. *Найти критические точки (то есть внутренние точки области определения, в которых  $f'(x)$  равна нулю или не существует).*

4. Отмечаем критические точки на области определения функции  $f(x)$  и находим знак  $f'(x)$  в каждом из полученных промежутков (рис. 38).

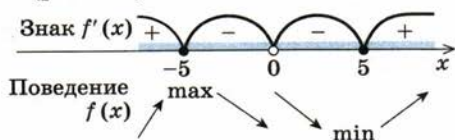


Рис. 38

Получаем, что функция  $f(x)$  возрастает на промежутках  $(-\infty; -5]$  и  $[5; +\infty)$  и убывает на промежутках  $[-5; 0]$  и  $(0; 5]$ . В точке  $-5$  производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума; в точке  $5$  производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума.

То есть  $x_{\max} = -5$ ,  $x_{\min} = 5$ .

Тогда  $y_{\max} = f(-5) = -10$ ,

$y_{\min} = f(5) = 10$ . ◁

4. Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.

Функция непрерывна в каждой точке области определения (она дифференцируема в каждой точке области определения), и поэтому, записывая промежутки возрастания и убывания функции, критические точки можно включить в эти промежутки. Для выяснения того, является ли критическая точка точкой экстремума, используем достаточные условия экстремума.

**З а м е ч а н и е.** Результаты исследования функции на монотонность и экстремумы удобно фиксировать не только в виде схемы, изображенной на рисунке в решении задачи 2, но и в виде специальной таблицы такого вида:

$x$	$(-\infty; -5)$	$-5$	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	$5$	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	-10	↘	↘	10	↗
		max			min	

**Задача 3\*** Для заданной функции найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

1)  $f(x) = x^3 - 12|x + 1|$ ;      2)  $\varphi(x) = 4 \cos x - \cos 2x$ .

#### Комментарий

Для исследования заданных функций снова используем схему, приведенную на с. 75.

В задании 1 используем определение модуля и отдельно найдем производную при  $x < -1$  и при  $x > -1$ . А чтобы выяснить, существует ли производная  $f'(x)$  при  $x = -1$ , попытаемся найти значения  $f'(-1)$  по формулам (1) и (2),

приведенным далее в решении, и сравнить их\*. Чтобы найти точки, в которых  $f'(x) = 0$ , приравняем к нулю значения производной  $f'(x)$  при  $x < -1$  и при  $x > -1$  и учтем соответствующие ограничения для  $x$ .

В задании 2 учтем, что уравнение  $\varphi'(x) = 0$  — это тригонометрическое уравнение, имеющее бесконечное множество корней, то есть функция  $\varphi(x)$  имеет бесконечное количество критических точек. Поэтому отметить все критические точки на области определения функции (как это предлагается в схеме исследования функции) мы не в состоянии. В таком случае можно попытаться непосредственно использовать достаточные признаки возрастания и убывания функции (то есть решить неравенства  $\varphi'(x) > 0$  и  $\varphi'(x) < 0$ ) или в случае, когда функция  $\varphi'(x)$  является периодической, провести исследование поведения  $\varphi'(x)$  на одном периоде, а затем результат повторить через период. Обратим внимание, что в случае, когда  $\varphi'(x)$  определена на всем периоде и мы знаем промежутки, где выполняется неравенство  $\varphi'(x) > 0$ , и точки, где выполняется равенство  $\varphi'(x) = 0$ , для всех остальных точек периода обязательно будет выполняться неравенство  $\varphi'(x) < 0$ .

#### Решение

1) ► Область определения:  $D(f) = \mathbf{R}$ . Запишем заданную функцию так:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x - 12 & \text{при } x \geq -1, \\ x^3 + 12x + 12 & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

Тогда

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & \text{при } x > -1, \\ 3x^2 + 12 & \text{при } x < -1. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Производная  $f'(x)$  не существует в точке  $x = -1$ , поскольку значения  $f'(-1)$ , вычисленные по формулам (1) и (2), разные ( $-9 \neq 15$ ), следовательно,  $x = -1$  — критическая точка функции  $f(x)$ . Значение  $f'(x)$ , вычисленное по формуле (2), не может равняться нулю ( $3x^2 + 12 \neq 0$ ). Для формулы (1) имеем  $3x^2 - 12 = 0$ , то есть  $x = 2$  и  $x = -2$ , но, учитывая условие  $x > -1$ , получаем, что только  $x = 2$  является критической точкой. Следовательно, функция  $f(x)$  имеет две критические точки: 2 и  $(-1)$ .

Отмечаем критические точки на области определения функции  $f(x)$  и находим знак  $f'(x)$  на каждом из промежутков (рис. 39). Получаем, что функция  $f(x)$  возрастает на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[2; +\infty)$  и убывает на промежутке  $[-1; 2]$ .

В точке  $(-1)$  производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума. В точке 2 производная меняет знак с минуса на плюс, следо-

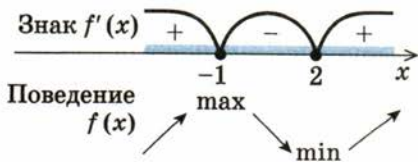


Рис. 39

\* Фактически мы будем сравнивать значения так называемых односторонних производных функции  $f(x)$  в точке  $(-1)$ . Эти производные определяются аналогично односторонним пределам функции (см. с. 121).

вательно, это точка минимума. Тогда  $x_{\max} = -1$ ,  $y_{\max} = f(-1) = -1$ ,  $x_{\min} = 2$ ,  $y_{\min} = f(2) = -28$ .  $\triangleleft$

2)  $\blacktriangleright$  Область определения:  $D(\varphi) = \mathbf{R}$ . Производная  $\varphi'(x) = (4 \cos x - \cos 2x)' = -4 \sin x + 2 \sin 2x = -4 \sin x + 4 \sin x \cos x = 4 \sin x (\cos x - 1)$ .

Критические точки: производная  $\varphi'(x)$  существует на всей области определения функции  $\varphi(x)$ , следовательно, критическими точками будут все значения  $x$ , для которых  $\varphi'(x) = 0$ .

$4 \sin x (\cos x - 1) = 0$ . Тогда  $\sin x = 0$  или  $\cos x = 1$ . Следовательно,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , или  $x = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . (Значение  $2\pi k$  дает также и формула  $\pi n$  (при  $n = 2k$ ), поэтому все критические точки можно задать формулой  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .)

Функция  $\varphi(x)$  возрастает в тех точках ее области определения, где  $\varphi'(x) > 0$ .

Имеем:  $4 \sin x (\cos x - 1) > 0$ , тогда  $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < 1. \end{cases}$

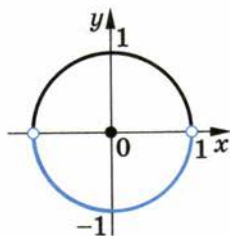


Рис. 40

Первая из этих систем не имеет решений ( $\cos x$  не может быть больше, чем 1), а вторая система имеет решения (рис. 40):  $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Производная  $\varphi'(x) = 4 \sin x (\cos x - 1)$  является периодической функцией (относительно переменной  $x$ ) с периодом  $2\pi$  (это общий период для функций  $\sin x$  и  $\cos x$ ). На периоде  $[0; 2\pi]$  неравенство  $\varphi'(x) > 0$  выполняется на промежутке  $(\pi; 2\pi)$ , а равенство  $\varphi'(x) = 0$  в точках  $\pi n$ , то есть в точках  $0$ ,  $\pi$  и  $2\pi$ . Тогда неравенство  $\varphi'(x) < 0$  выполняется на промежутке  $(0; \pi)$ , а учитывая период, и на всех промежутках  $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Принимая во внимание условия возрастания и убывания функции и то, что функция  $\varphi(x)$  непрерывна на всей числовой прямой (она дифференцируема во всех точках), получаем, что функция  $\varphi(x)$  возрастает на каждом из промежутков  $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , и убывает на каждом из промежутков  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Поскольку производная  $\varphi'(x)$  является периодической функцией с периодом  $2\pi$ , то через промежуток длиной  $2\pi$  знаки производной  $\varphi'(x)$  повторяются (рис. 41). В точке  $0$  производная  $\varphi'(x)$  меняет знак с плюса на минус, следовательно,  $x = 0$  — точка максимума, а учитывая, что поведение  $\varphi'(x)$  повторяется через  $2\pi$ , имеем

$$x_{\max} = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда } y_{\max} = \varphi(2\pi k) = 4 \cos(2\pi k) - \cos(4\pi k) = 3.$$

В точке  $\pi$  производная  $\varphi'(x)$  меняет знак с минуса на плюс, следовательно,  $x = \pi$  — точка минимума, а учитывая, что поведение  $\varphi'(x)$  повторяется через  $2\pi$ , имеем

$$x_{\min} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Тогда } y_{\min} = \varphi(\pi + 2\pi k) = 4 \cos(\pi + 2\pi k) - \cos(2\pi + 4\pi k) = -5. \triangleleft$$

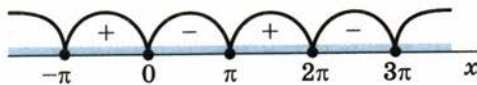


Рис. 41

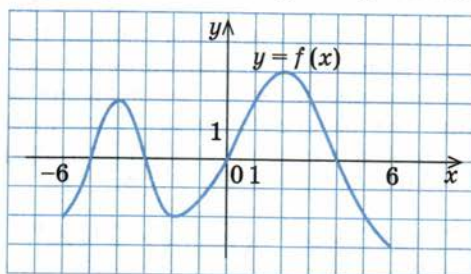


## Вопросы для контроля

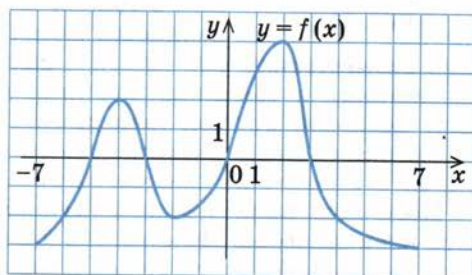
1. Дайте определение возрастающей и убывающей на множестве функции. Приведите примеры таких функций и их графиков.
2. а) Сформулируйте достаточные условия возрастания и убывания функции. Приведите примеры их применения.  
б\*) Обоснуйте достаточные условия возрастания и убывания функции.
- 3\*. Сформулируйте и обоснуйте условие постоянства функции на интервале.
4. Изобразите график функции, имеющей экстремумы. Дайте определение точек экстремума функции и ее экстремумов.
5. Какие точки называются критическими точками?
6. а) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.  
б\*) Обоснуйте необходимое условие экстремума функции.
7. а) Сформулируйте достаточное условие существования экстремума в точке.  
б\*) Обоснуйте достаточное условие существования экстремума в точке.
8. По какой схеме можно исследовать функцию на монотонность и экстремум? Приведите пример такого исследования.

## Упражнения

- 1°. На рисунке 42 изображен график функции  $y = f(x)$  (на рисунке 42, а функция задана на промежутке  $[-6; 6]$ , а на рисунке 42, б — на промежутке  $[-7; 7]$ ). Укажите промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$ .



а



б

Рис. 42

- 2°. Известно, что производная некоторой функции  $y = f(x)$ , заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рисунке 43. Укажите промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$ .

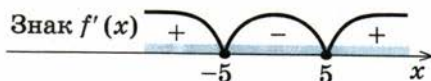


Рис. 43

3. Функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $(-6; 3)$ . На рисунке 44 изображен график ее производной. Укажите промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$ .

4. Докажите, что заданная функция возрастает на всей области определения:

- 1°)  $f(x) = x^3 + 5x$ ;
- 2)  $f(x) = e^x + x - 7$ ;
- 3)  $f(x) = 2x + \cos x$ ;
- 4)  $f(x) = \sin x + 3x + 2$ .

5. Докажите, что заданная функция убывает на всей области определения:

- 1°)  $y = -x^3 - 3x$ ;
- 2)  $f(x) = -x^7 - e^x + 2$ ;
- 3)  $f(x) = \cos x - 6x$ ;
- 4)  $f(x) = \sin x - 2x + 1$ .

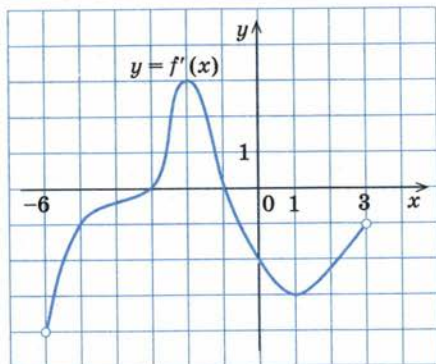


Рис. 44

Найдите промежутки возрастания и убывания функции (6–7).

6. 1°)  $f(x) = x^2 - 2x$ ;                      2)  $f(x) = x^3 - 24x + 2$ ;
  - 3)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;                      4)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;
  - 5)  $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ ;                              6)  $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$ .
7. 1)  $y = e^x - x$ ;    2)  $y = x - \ln x$ ;    3\*)  $y = x + 2 \cos x$ ;    4\*)  $y = x - \sin 2x$ .

8\* (МИСиС). Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция возрастает на всей числовой прямой:

- 1)  $f(x) = x^3 - 3ax$ ;    2)  $f(x) = ax + \cos x$ ;    3)  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax - 5$ .

9\*. Докажите, что уравнение имеет единственный корень, и найдите этот корень:

- 1)  $2x^3 + 3x - 5 = 0$ ;                      2)  $e^x + 2x - 1 = 0$ ;
- 3)  $5x - \cos 3x - 5\pi = 1$ ;              4)  $\frac{1}{x} - \ln x = 1$ .

10°. По графику функции  $y = f(x)$ , изображенному на рисунке 42, найдите точки максимума и минимума функции  $f(x)$ . Существует ли производная в каждой из этих точек? Если существует, то чему равно ее значение?

11°. Известно, что производная некоторой функции  $y = f(x)$ , заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рисунке 43, и  $f'(-5) = f'(5) = 0$ . Укажите критические точки функции, точку максимума и точку минимума этой функции.

12°. Пользуясь данными о производной  $f'(x)$ , приведенными в таблице

$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 1)$	$1$	$(1, 5)$	$5$	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$

(если  $D(f) = \mathbf{R}$ ), укажите:

- 1) промежутки возрастания и убывания функции  $f(x)$ ;
- 2) точки максимума и точки минимума функции  $f(x)$ .

13. Функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $(-6; 3)$ . На рисунке 44 изображен график ее производной. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума, а какие не являются точками экстремума.

Исследуйте заданную функцию на экстремумы (14–15).

14°. 1)  $f(x) = 1 + 12x - x^3$ ;                      2)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$ ;  
 3)  $f(x) = x^4 - 8x^3$ ;                              4)  $f(x) = 5x - x^5$ .

15 (ГФА). 1)  $y = \sqrt{1-x^2}$ ;                      2)  $y = x - 3\ln x$ ;  
 3)  $y = xe^{-x}$ ;                                      4)  $y = x^2 - 2\ln x$ ;  
 5\*)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ;                                      6\*)  $y = \sqrt[5]{x^3}$ .

Определите промежутки монотонности, точки экстремума функции и значения функции в точках экстремума (16–17).

16. 1°)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ;                      2°)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;  
 3)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ;                                      4)  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ .


17\* (МПУ). 1)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;                              2)  $y = x^2 - |x| - 1$ ;  
 3)  $y = 6x^3 - 2|x - 1|$ ;                              4)  $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ .

## 6.2. Общая схема исследования функции для построения ее графика

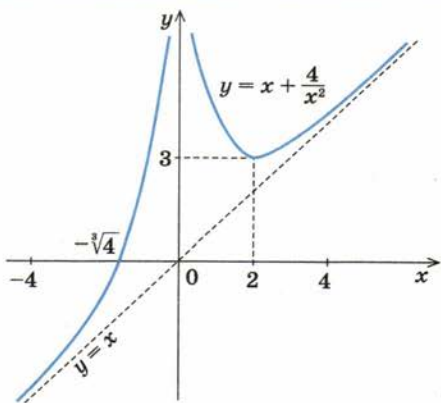
Таблица 7

Схема исследования функции	Пример
1. Найти область определения функции.	<p>Постройте график функции <math>f(x) = x + \frac{4}{x^2}</math>.</p> <p>► 1. Область определения: <math>x \neq 0</math> (то есть <math>D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)</math>).</p>
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической*).	<p>2. Функция <math>f(x)</math> ни четная, ни нечетная, поскольку <math>f(-x) \neq f(x)</math> и <math>f(-x) \neq -f(x)</math>.</p>
3. Точки пересечения графика с осями координат (если их можно найти).	<p>3. График не пересекает ось <math>Oy</math> (<math>x \neq 0</math>). На оси <math>Ox</math> <math>y = 0</math>: <math>x + \frac{4}{x^2} = 0</math>, <math>x^3 = -4</math>, <math>x = -\sqrt[3]{4} (\approx -1,6)</math> — абсцисса точки пересечения графика с осью <math>Ox</math>.</p>

\* Периодичность чаще всего устанавливают для тригонометрических функций.

<p>4. Производная и критические точки функции.</p>	<p>4. <math>f'(x) = x' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - \frac{8}{x^3}</math>. Производная существует на всей области определения функции <math>f(x)</math> (следовательно, функция <math>f(x)</math> непрерывна в каждой точке своей области определения).</p> <p><math>f'(x) = 0</math>; <math>1 - \frac{8}{x^3} = 0</math>. При <math>x \neq 0</math> имеем: <math>x^3 = 8</math>, <math>x = 2</math> — критическая точка.</p>
<p>5. Промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума (и значение функции в этих точках).</p>	<p>5. Отметим критические точки на области определения и определим знак производной и характер поведения функции на каждом из промежутков, на которые разбивается область определения (см. рисунок).</p>  <p>Итак, функция возрастает на каждом из промежутков <math>(-\infty; 0)</math> и <math>[2; +\infty)</math> и убывает на промежутке <math>(0; 2]</math>. Поскольку в критической точке 2 производная меняет знак с «-» на «+», то <math>x = 2</math> — точка минимума: <math>x_{min} = 2</math>. Тогда <math>y_{min} = f(2) = 3</math>.</p>
<p>6. Поведение функции на концах промежутков области определения (этот этап не входит в минимальную схему исследования функции).</p>	 <p>6. При <math>x \rightarrow 0</math> справа (и при <math>x \rightarrow 0</math> слева)</p> $f(x) = x + \frac{4}{x^2} \rightarrow \left(\frac{4}{+0}\right) \rightarrow +\infty.*$

\* В этом случае говорят, что прямая  $x = 0$  — вертикальная асимптота графика функции  $f(x)$  (см. с. 136).

	<p>При <math>x \rightarrow -\infty</math> (и при <math>x \rightarrow +\infty</math>) значение <math>\frac{4}{x^2} \rightarrow 0</math>, тогда* <math>f(x) \rightarrow x</math> (то есть при <math>x \rightarrow -\infty</math> <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> и при <math>x \rightarrow +\infty</math> <math>f(x) \rightarrow +\infty</math>).</p>										
<p>7. Если необходимо, найти координаты дополнительных точек, чтобы уточнить поведение графика функции.</p>	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>-\frac{1}{2}</math></td> <td>4</td> <td>-4</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td><math>16\frac{1}{2}</math></td> <td><math>15\frac{1}{2}</math></td> <td><math>4\frac{1}{4}</math></td> <td><math>-3\frac{3}{4}</math></td> </tr> </table>	$x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4	$y$	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$
$x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4							
$y$	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$							
<p>8. На основании проведенного исследования построить график функции.</p>											

### Объяснение и обоснование

Для построения графика функции (особенно в тех случаях, когда речь идет о построении графиков незнакомых функций) целесообразно исследовать свойства функции, которые помогают составить определенное представление о виде ее графика. Когда такое представление уже составлено, можно построить график функции по найденным характерным точкам. Фактически при исследовании функции мы будем придерживаться схемы, приведенной в учебнике для 10 класса (с. 166), только для исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы используем производную. Таким образом, для построения графика функции ее можно исследовать по схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на четность (или нечетность) и периодичность; 3) найти точки пересечения

\* В этом случае говорят, что прямая  $y = x$  — наклонная асимптота графика функции  $f(x)$ .

графика с осями координат; 4) найти производную и критические точки функции; 5) найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума (и значения функции в этих точках); 6) исследовать поведение функции на концах промежутков области определения; 7) если необходимо, найти координаты дополнительных точек; 8) на основании проведенного исследования построить график функции.

Отметим, что эта схема является ориентировочной и не всегда необходимо выполнять все этапы исследования. Например, далеко не всегда можно точно найти точки пересечения графика с осью  $Ox$ , даже если мы знаем, что такие точки существуют. Также часто достаточно сложно исследовать поведение функции на концах промежутков области определения. В таком случае уточнить поведение графика функции можно за счет нахождения координат точек графика функции, абсциссы которых выбирают так, чтобы они приближались к концам промежутков области определения.

Охарактеризуем особенности выполнения каждого из указанных этапов исследования функции и особенности учета полученных результатов при построении графика функции.

1) При построении графика функции с самого начала необходимо выяснить и записать ее область определения. Если нет специальных ограничений, то функция считается заданной при всех значениях аргумента, при которых существуют все выражения, входящие в запись функции. Ограничения, которые необходимо учесть в этом случае при нахождении области определения функции, приведены в таблице 8.

Таблица 8

Вид функции		Ограничения, которые учитываются при нахождении области определения функции*	
1	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменатель дроби не равен нулю
2	$y = \sqrt[k]{f(x)}$ ( $k \in \mathbb{N}$ )	$f(x) \geq 0$	Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение
4	$y = \log_{f(x)} a$ ( $a > 0$ )	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице

\* При записи этих ограничений предполагаем, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на рассматриваемом множестве.

5	$y = \operatorname{tg} (f(x))$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$ $(k \in \mathbb{Z})$	Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ( $k$ — любое целое число)
6	$y = \operatorname{ctg} (f(x))$	$f(x) \neq \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное $\pi k$ ( $k$ — любое целое число)
7	$y = \arcsin (f(x))$	$ f(x)  \leq 1,$ то есть $-1 \leq f(x) \leq 1$	Под знаками арксинуса и аркосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице
8	$y = \arccos (f(x))$		
9	$y = x^\alpha$		
	а) $\alpha$ — натуральное	$x$ — любое число	
	б) $\alpha$ — целое отрицательное или нуль	$x \neq 0$	
	в) $\alpha$ — нецелое положительное число	$x \geq 0$	
	г) $\alpha$ — нецелое отрицательное число	$x > 0$	

После нахождения области определения функции часто полезно отметить ее на оси абсцисс. Если область определения — вся числовая прямая, то никаких отметок можно не выполнять. Если эта область — промежуток числовой прямой, то через его концы полезно провести вертикальные прямые, между которыми будет находиться график функции. Если отдельные точки числовой прямой не входят в область определения функции, то целесообразно отметить их на оси абсцисс и провести через них вертикальные прямые (которые не будут пересекать график функции).

2) Если выяснится, что заданная функция является четной (или нечетной), то можно исследовать свойства и построить ее график только при  $x \geq 0$ , а затем отобразить его симметрично относительно оси  $Oy$  (для нечетной функции — симметрично относительно начала координат). Если же функция периодическая, то достаточно построить ее график на одном отрезке длиной  $T$ , а затем повторить его на каждом из промежутков длиной  $T$  (то есть параллельно перенести график вдоль оси  $Ox$  на  $Tk$ , где  $k$  — произвольное целое число).

Напомним, что для обоснования четности функции достаточно проверить, что для всех  $x$  из ее области определения  $f(-x) = f(x)$ ; для нечетности — достаточно проверить выполнение равенства  $f(-x) = -f(x)$ , а для периодичности — равенства  $f(x+T) = f(x)$  при условии, что если  $x$  входит в область определения функции  $f(x)$ , то  $x+T$  и  $x-T$  (где  $T \neq 0$ ) также входят в нее.

3) Чтобы найти *точки пересечения графика с осями координат*, учитываем, что на оси  $Oy$  значение  $x$  равно 0. Тогда  $y = f(0)$  (если это значение существует). На оси  $Ox$  значение  $y$  равно 0, и поэтому, чтобы найти соответствующие значения  $x$ , приравниваем заданную функцию к нулю и находим корни полученного уравнения (если это уравнение удастся решить).

4) Для дальнейшего исследования функции полезно найти производную и критические точки функции. Известно, что критические точки функции — это внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует. Напомним, что на всех промежутках, где существует производная данной функции, эта функция является непрерывной и ее графиком на каждом из промежутков будет неразрывная линия.


5) Используя производную и критические точки функции, находим промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции (и значения функции в этих точках). Напомним, что для этого целесообразно отметить критические точки функции на ее области определения и найти знаки производной в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения. Заметим, что вывод о возрастании или убывании функции на промежутке между критическими точками можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной).

Как отмечалось на с. 77, результаты этого этапа исследования можно оформлять в виде специальной таблицы, содержащей следующие строки:


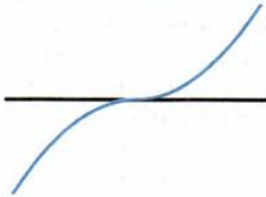
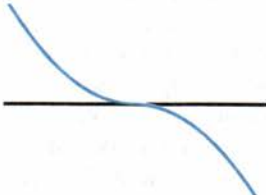
Значение $x$
Знак и значение $f'(x)$
Поведение и значение $f(x)$

После нахождения значения функции в каждой критической точке  $x_0$  строим соответствующие точки на координатной плоскости, учитывая поведение графика функции в окрестности точки  $x_0$  (табл. 9).

Таблица 9

Критическая точка $x_0$	Поведение $f'(x)$	Ориентировочный вид графика функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$
$x_0$ — точка максимума	$f'(x_0) = 0$ , $f'(x)$ меняет знак в точке $x_0$ с плюса на минус	
	$f'(x_0)$ не существует, $f'(x)$ меняет знак в точке $x_0$ с плюса на минус	
$x_0$ — точка минимума	$f'(x_0) = 0$ , $f'(x)$ меняет знак в точке $x_0$ с минуса на плюс	



$x_0$ — точка минимума	$f'(x_0)$ не существует, $f'(x)$ меняет знак в точке $x_0$ с минуса на плюс	
$x_0$ — критическая точка, в которой производная равна нулю, но которая не является точкой экстремума	$f'(x_0) = 0$ , $f'(x)$ слева и справа от точки $x_0$ положительна	
	$f'(x_0) = 0$ , $f'(x)$ слева и справа от точки $x_0$ отрицательна	

При изображении графика функции в окрестности точки  $x_0$  учитывается геометрический смысл производной, а именно: если  $f'(x_0) = 0$ , то в точке с абсциссой  $x_0$  к графику функции  $y = f(x)$  можно провести касательную, параллельную оси  $Ox$ . Если же значение  $f'(x_0)$  не существует, то в точке с абсциссой  $x_0$  график будет иметь излом (или касательную к графику функции в этой точке нельзя провести, или касательная перпендикулярна к оси  $Ox$ ).

6) Для того чтобы составить более полное представление о виде графика функции, целесообразно исследовать поведение функции на концах области определения. При этом возможны несколько случаев.

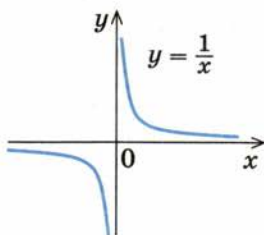


Рис. 45

а) Около точки  $x = a$ , которая ограничивает промежуток области определения, значение функции стремится к бесконечности. Например, у функции  $y = \frac{1}{x}$  область определения —  $x \neq 0$ , то есть  $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , и если значение  $x$  стремится к нулю, то значение  $y$  стремится к бесконечности (рис. 45).

Как отмечалось на этапе 1, через точку  $x = a$  уже проведена вертикальная прямая. Около точки  $x = a$  график функции будет стремиться вверх или вниз, приближаясь к этой прямой. Эту прямую называют *вертикальной асимптотой\** графика функции. Чтобы выяснить, вверх или

\* Прямую, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее в бесконечность, называют *асимптотой этой кривой* (подробнее см. на с. 136).

вниз стремится график функции, достаточно определить знаки функции слева и справа от точки  $a$ . Характерные случаи изображены на рисунках 46, 47.

б) Если предельная точка  $x = a$  входит в область определения функции, то необходимо определить значение функции в точке  $a$  и построить полученную точку. Типичный пример — точка  $x = 0$  для функции  $y = \sqrt{x}$  (рис. 48).

в) В область определения функции входит бесконечный промежуток (или вся числовая прямая, или промежутки  $(-\infty; a)$  или  $(a; +\infty)$ ). В этом случае полезно представить себе поведение графика функции при  $x \rightarrow -\infty$  или при  $x \rightarrow +\infty$ . Например, для функции  $y = \frac{1}{x}$  имеем: при  $x \rightarrow +\infty$  значение  $y \rightarrow 0$ , оставаясь положительным (это можно записать так:  $y \rightarrow +0$ ). А при  $x \rightarrow -\infty$  значение  $y \rightarrow 0$ , оставаясь отрицательным (это можно записать так:  $y \rightarrow -0$ ). В этом случае говорят, что прямая  $y = 0$  — *горизонтальная асимптота* графика функции (см. рис. 45).

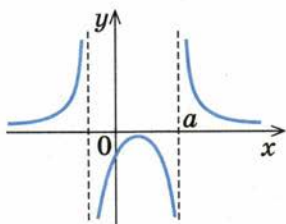


Рис. 46

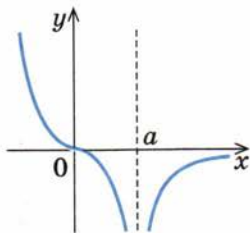


Рис. 47

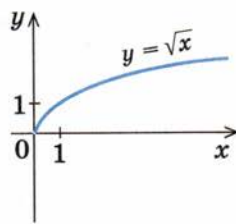


Рис. 48

Иногда при  $x \rightarrow +\infty$  или при  $x \rightarrow -\infty$  можно выделить наклонную прямую, к которой неограниченно приближается график функции, — так называемую *наклонную асимптоту*, позволяющую лучше представить поведение графика функции (см. пример в таблице 7).

7) Если необходимо уточнить поведение графика функции (например, в том случае, когда на каком-нибудь бесконечном промежутке области определения функция возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), то полезно найти координаты *дополнительных точек* графика, взяв произвольные значения аргумента из необходимого промежутка.

### Примеры решения задач

**Задача 1** Постройте график функции  $f(x) = x^3 - 3x - 3$ .

**Решение**

- 1. Область определения:  $D(f) = \mathbf{R}$ .  
 2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку  $f(-x) = -x^3 + 3x - 3 \neq f(x)$  (и  $f(-x) \neq -f(x)$ ).

**Комментарий**

Используем общую схему исследования функции (с. 82). При нахождении области определения учитываем, что никаких

3. Точка пересечения графика с осью  $Oy$ :

$$x = 0, y = f(0) = -3.$$

4. Производная и критические точки.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Производная существует на всей области определения функции  $f(x)$ .  $f'(x) = 0$ . Тогда  $3x^2 - 3 = 0$ , следовательно,  $x^2 = 1$ , то есть  $x = 1$  и  $x = -1$  — критические точки.

5. Отмечаем критические точки на области определения функции  $f(x)$  и находим знак  $f'(x)$  на каждом из полученных промежутков (рис. 49).



Рис. 49

Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗
		max		min	

6. Найдем значения функции в нескольких точках:

$x$	$-2$	$2$	$3$
$f(x)$	$-5$	$-1$	$15$

7. Используя результаты исследования, строим график функции  $y = x^3 - 3x - 3$  (рис. 50).

ограничений, зафиксированных в таблице 8, функция не имеет, следовательно, область определения является множество всех действительных чисел (можно также использовать известное утверждение, что *областью определения многочлена являются все действительные числа*).

Чтобы найти точку пересечения графика с осью  $Ox$ , необходимо приравнять функцию к нулю и решить уравнение  $x^3 - 3x - 3 = 0$ . Однако мы не можем найти корни этого уравнения, поэтому в решение включено только нахождение точки пересечения графика с осью  $Oy$ .

После нахождения производной данной функции, ее критических точек и знаков производной в каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции, нахождение промежутков возрастания и убывания и экстремумов функции удобно выполнять, заполняя специальную таблицу.

Обратим внимание, что функция непрерывна на всей числовой прямой, поскольку она дифференцируема в каждой точке области определения, следовательно, ее график — неразрывная линия.

Чтобы уточнить вид графика, целесообразно найти координаты нескольких дополнительных контрольных точек. После построения графика функции можно сделать вывод, что график имеет единственную точку пересечения с осью  $Ox$ . Эта точка находится между точками  $x = 2$  и  $x = 3$ ,

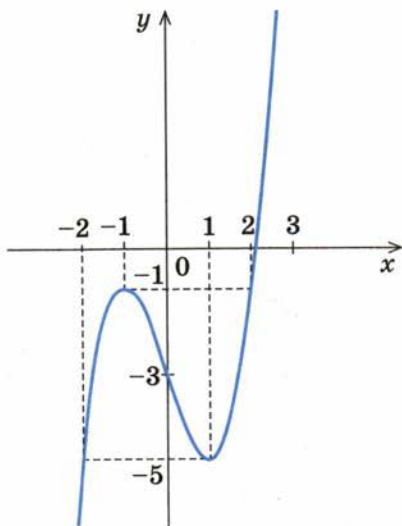


Рис. 50

поскольку функция  $f(x)$  непрерывна, на промежутке  $[1; +\infty)$  возрастает и в точке  $x = 2$  принимает отрицательное значение, а в точке  $x = 3$  — положительное. Других точек пересечения с осью  $Ox$  быть не может, потому что на промежутке  $(-\infty; -1]$  функция  $f(x)$  возрастает от  $-\infty$  до  $-1$ , а на промежутке  $[-1; 1]$  — убывает от  $-1$  до  $-5$ , то есть значения функции на этих промежутках отрицательны.

**Замечание.** Мы построили график функции, не исследуя поведение функции на концах промежутков ее области определения. Покажем, как это можно было сделать. Область определения данной функции — промежутки  $(-\infty; +\infty)$ . Чтобы исследовать поведение функции на концах промежутков области определения, необходимо выяснить, к какому значению будет стремиться функция при  $x \rightarrow \infty$ . Для этого в многочлене достаточно вынести за скобки наивысшую степень переменной (это всегда можно сделать, так как  $x \neq 0$ , когда значение  $x$  велико по модулю). Тогда при  $x \neq 0$  имеем  $f(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$ . Поскольку при  $x \rightarrow \infty$  значения  $\frac{3}{x^2} \rightarrow 0$  и  $\frac{3}{x^3} \rightarrow 0$ , то  $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \rightarrow 1$ . Следовательно,  $f(x)$  будет стремиться к тому же значению, что и  $x^3$ . Но при  $x \rightarrow -\infty$  значение  $x^3 \rightarrow -\infty$ , тогда и  $f(x) \rightarrow -\infty$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  значение  $x^3 \rightarrow +\infty$ , тогда и  $f(x) \rightarrow +\infty$ . Учитывая непрерывность функции  $f(x)$ , получаем, что она принимает все значения из промежутка  $(-\infty; +\infty)$ . Отметим, что приведенные соображения можно повторить для любой функции — многочлена нечетной степени. Тогда, строя графики таких функций, полезно помнить следующее:

*многочлен нечетной степени принимает все значения из промежутка  $(-\infty; +\infty)$  и при больших по модулю значениях аргумента поведение многочлена будет аналогично поведению его старшего члена (который является степенной функцией).*

**Задача 2**

- 1) Постройте график функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ .  
 2\*) Сколько корней имеет уравнение  $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

**Комментарий**

Для выполнения задания 1 исследуем функцию  $f(x)$  по общей схеме и по результатам исследования построим ее график. Для нахождения точки пересечения графика с осью  $Ox$  приравняем функцию к нулю и решаем полученное биквадратное уравнение. При построении графика также учитываем, что при  $x \rightarrow \infty$  значение

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = x^4 \left( 1 - \frac{8}{x^2} - \frac{9}{x^4} \right) \rightarrow +\infty.$$

Как видим, и для многочлена четной степени при больших по модулю значениях аргумента поведение многочлена будет аналогично поведению степенной функции — его старшего члена.

При выполнении задания 2 можно пользоваться таким ориентиром: если в задании с параметром идет речь о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.

Особенно простым является соответствующее исследование в том случае, когда заданное уравнение можно представить в виде  $f(x) = a$ , поскольку график функции  $y = a$  — это прямая, параллельная оси  $Ox$  (которая пересекает ось  $Oy$  в точке  $a$ ), а график функции  $y = f(x)$  легко построить, исследовав функцию  $f(x)$  с помощью производной. (Отметим, что, заменяя заданное уравнение на уравнение  $f(x) = a$ , необходимо следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и заданное, а следовательно, и количество корней у них будет одинаковым.) Для того чтобы определить, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = a$ , достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции  $y = f(x)$  с прямой  $y = a$  при разных значениях параметра  $a$ . (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

**Решение**

► 1) Исследуем функцию  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ .

1. Область определения:  $D(f) = \mathbf{R}$ .

2. Функция четная, поскольку для всех значений  $x$  из ее области определения

$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x).$$

Следовательно, график функции симметричен относительно оси  $Oy$ .

3. Точка пересечения графика с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ,  $y = f(0) = -9$ .

Точки пересечения графика с осью  $Ox$ :  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ . Замена  $x^2 = t$  дает:  $t^2 - 8t - 9 = 0$ ;  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 9$ . Тогда  $x^2 = -1$  (корней нет) или  $x^2 = 9$ .

Отсюда  $x = 3$  и  $x = -3$  — абсциссы точек пересечения графика с осью  $Ox$ .

4. Производная и критические точки.  $f'(x) = 4x^3 - 16x$ .

Производная существует на всей области определения функции  $f(x)$  (следовательно, функция непрерывна на всей числовой прямой).

$f'(x) = 0$ . Тогда  $4x^3 - 16x = 0$ ,  $4x(x^2 - 4) = 0$ ,  $4x(x - 2)(x + 2) = 0$ ,

следовательно,  $x = 0$ ,  $x = 2$  и  $x = -2$  — критические точки.

5. Отмечаем критические точки на области определения функции  $f(x)$  и находим знак  $f'(x)$  на каждом из полученных промежутков (рис. 51). Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

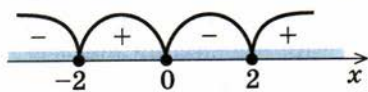


Рис. 51

$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 0)$	$0$	$(0; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-25	↗	-9	↘	-25	↗
		min		max		min	

6. Используя результаты исследования, строим график\* функции  $y = x^4 - 8x^2 - 9$  (рис. 52). ◁

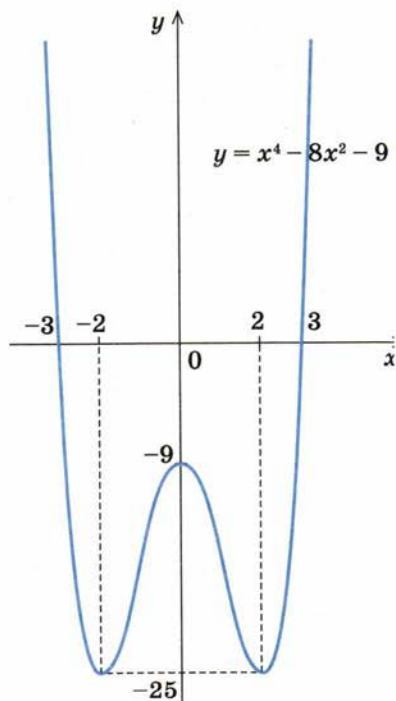


Рис. 52

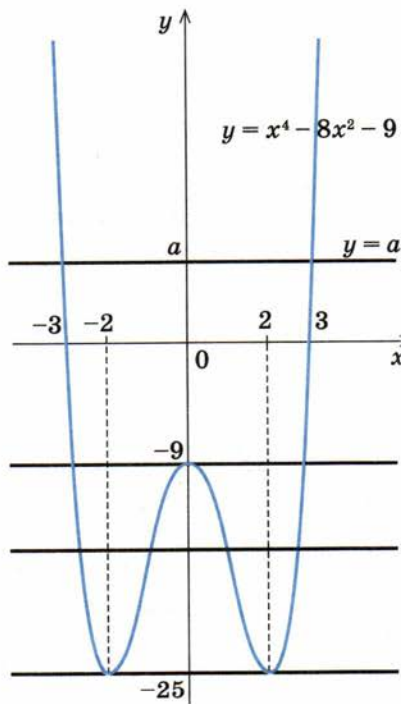


Рис. 53

- ▶ 2) Отметим, что заданное уравнение  $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$  равносильно уравнению  $x^4 - 8x^2 - 9 = a$ . Решим последнее уравнение графически. Для этого построим график функции  $y = x^4 - 8x^2 - 9$  (см. задание 1) и график функции  $y = a$  (рис. 53).

\* Масштаб по осям  $Ox$  и  $Oy$  разный.

Как видим, при  $a < -25$  уравнение не имеет корней (нет точек пересечения графиков); при  $a = -25$  и при  $a > -9$  уравнение имеет два корня (графики имеют только две общие точки); при  $a = -9$  уравнение имеет три корня (графики имеют три общие точки) и при  $-25 < a < -9$  уравнение имеет четыре корня (графики имеют четыре общие точки).  $\triangleleft$

**Задача 3**

1) Постройте график функции  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

2\*) Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\ln x = ax$  имеет единственный корень.

**Комментарий**

Для выполнения задания 1 исследуем функцию  $y = \frac{\ln x}{x}$  по общей схеме и по результатам исследования строим ее график. При исследовании функции на четность и нечетность можно воспользоваться тем, что  $y$  четной или нечетной функции в область определения входят точки  $x$  и  $(-x)$ . Следовательно, для таких функций область определения должна быть симметричной относительно точки 0. Если же это условие не выполняется, то функция не может быть ни четной, ни нечетной.

Для лучшего представления о виде графика целесообразно уточнить поведение функции на концах области определения ( $D(y) = (0; +\infty)$ ). При  $x \rightarrow 0$  справа (то есть при  $x \rightarrow +0$ ) значение  $\ln x \rightarrow -\infty$ . Тогда  $y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \left(\frac{-\infty}{+0}\right) \rightarrow -\infty$  (рис. 54). Но при  $x \rightarrow +\infty$  мы не можем выполнить такую оценку (получаем неопределенность вида  $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ ). В таком случае поведение функции при  $x \rightarrow +\infty$  можно уточнить с помощью дополнительных контрольных точек.

При выполнении задания 2 целесообразно использовать графическую иллюстрацию решения. Это можно сделать двумя способами:

- I. С помощью равносильных преобразований привести заданное уравнение к виду  $f(x) = a$  (где  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ) и, используя график, построенный в задании 1, выяснить, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = a$  при разных значениях параметра  $a$ .
- II. Применить графическое решение непосредственно к уравнению  $\ln x = ax$  (графики функций  $y = \ln x$  и  $y = ax$  нам известны), а для исследования единственности корня использовать геометрический смысл производной.

**Решение**

► 1) Исследуем функцию  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

1. Область определения:  $x > 0$ , то есть  $D(y) = (0; +\infty)$ .

2. Функция ни четная, ни нечетная, поскольку ее область определения не симметрична относительно точки 0.

3. Точки пересечения графика с осями координат. График не пересекает ось  $Oy$  ( $x \neq 0$ ).

На оси  $Ox$   $y = 0$ , то есть  $\frac{\ln x}{x} = 0$ . Тогда при  $x > 0$  получаем:  $\ln x = 0$ ;  $x = 1$  — абсцисса точки пересечения графика с осью  $Ox$ .

4. Производная и критические точки.

$$y' = \left( \frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Производная существует на всей области определения функции  $f(x)$  (то есть при  $x > 0$ ), следовательно, функция непрерывна на всей области определения.

$y' = 0$ . Тогда  $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ . Отсюда при  $x > 0$  получаем  $\ln x = 1$ , следовательно,  $x = e$  — критическая точка.

5. Отмечаем критические точки на области определения функции и находим знак  $y'(x)$  в каждом из полученных промежутков (рис. 54).

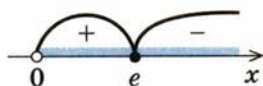


Рис. 54

Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

$x$	$(0; e)$	$e$	$(e; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘
		max	

6. Найдем координаты еще нескольких точек графика функции:

$x$	$\frac{1}{e} \approx 0,4$	$e^2 \approx 7,4$	$e^3 \approx 20,1$
$y(x)$	$-e \approx -2,7$	$\frac{2}{e^2} \approx 0,3$	$\frac{3}{e^3} \approx 0,1$

Заметим, что при  $x \rightarrow 0$  справа (то есть при  $x \rightarrow +0$ ) значение  $\ln x \rightarrow -\infty$ . Действительно,  $y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \left( \frac{-\infty}{+0} \right) \rightarrow -\infty$ .

7. Используя результаты исследования, строим график функции  $y = \frac{\ln x}{x}$  (рис. 55). ◁

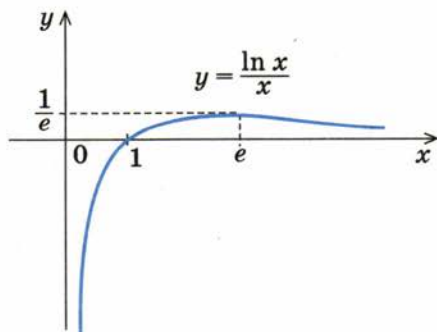


Рис. 55



## 2) I способ решения задания 2

- Область допустимых значений данного уравнения  $\ln x = ax$  задается неравенством  $x > 0$ . Но тогда  $x \neq 0$  и заданное уравнение на его ОДЗ равносильно уравнению  $\frac{\ln x}{x} = a$ .

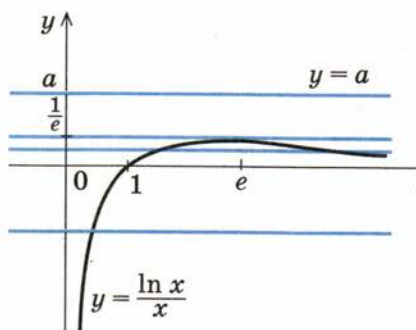


Рис. 56

Решим последнее уравнение графически. Для этого построим график функции  $y = \frac{\ln x}{x}$  (см. задание 1) и график функции  $y = a$  (рис. 56).

Как видим, уравнение  $\frac{\ln x}{x} = a$  имеет единственный корень только при  $a \leq 0$  и при  $a = \frac{1}{e}$  (при  $0 < a < \frac{1}{e}$  уравнение имеет два корня, а при  $a > \frac{1}{e}$  уравнение не имеет корней).

Следовательно, наибольшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\ln x = ax$  имеет единственный корень, — это  $a = \frac{1}{e}$ . ◁

## II способ решения задания 2

## Решение

- Рассмотрим графическую иллюстрацию (рис. 57) решения заданного уравнения

$$\ln x = ax. \quad (1)$$

Функция  $y = \ln x$  возрастающая и принимает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Графиком функции  $y = ax$  является прямая, проходящая через начало координат.

При  $a < 0$  прямая  $y = ax$  пересекает график функции  $y = \ln x$  только в одной точке (прямая 1 на рисунке 57). Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень (действительно, функция  $y = \ln x$  возрастающая, а функция  $y = ax$  убывающая, поэтому уравнение (1) может иметь только один корень).

При  $a = 0$  уравнение (1) имеет вид  $\ln x = 0$  и также имеет единственный корень ( $x = 1$ ).

При  $a > 0$  прямая  $y = ax$  может касаться графика функции  $y = \ln x$  (прямая 2 на рисунке 57). Тогда уравнение (1) будет иметь единственный корень. Также прямая  $y = ax$  может проходить в первой

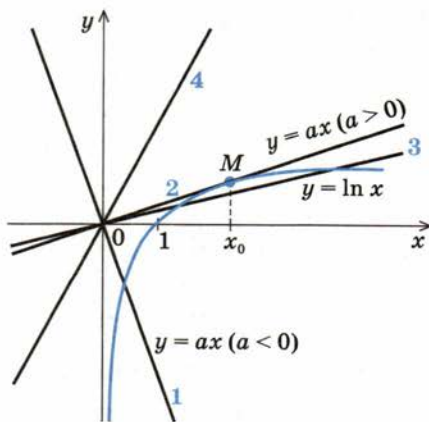


Рис. 57

четверти ниже касательной (прямая 3 на рисунке 57). Тогда уравнение (1) будет иметь два корня. Если же прямая  $y = ax$  будет проходить в первой четверти выше касательной (прямая 4 на рисунке 57), то уравнение (1) не будет иметь корней.

Выясним, когда прямая  $y = ax$  будет касательной к графику функции  $y = f(x) = \ln x$ . Пусть точка касания  $M$  имеет абсциссу  $x_0$ . Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что  $f'(x_0) = a$  (значение производной в точке  $x_0$  равно угловому коэффициенту касательной, проведенной через точку  $M$ ). Поскольку  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , то  $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ . Тогда из равенства  $f'(x_0) = a$  имеем  $\frac{1}{x_0} = a$ . Отсюда  $x_0 = \frac{1}{a}$ . Тогда  $y_0 = \ln \frac{1}{a}$ . С другой стороны, поскольку точка касания  $M$  лежит и на касательной  $y = ax$ , то ее координаты удовлетворяют и уравнению касательной. Получаем  $\ln \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a}$ , то есть  $\ln \frac{1}{a} = 1$ . Тогда  $\frac{1}{a} = e$ , следовательно,  $a = \frac{1}{e}$ .

Таким образом, заданное уравнение будет иметь единственный корень только при  $a \leq 0$  и при  $a = \frac{1}{e}$ . Тогда наибольшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\ln x = ax$  имеет единственный корень, — это  $a = \frac{1}{e}$ .  $\triangleleft$

**Задача 4\*** Постройте график функции  $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ .

#### Решение

► 1. Область определения:  $D(y) = \mathbf{R}$ .

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x+1)^2} \neq y(x) \\ (\text{и } y(-x) \neq -y(x)).$$

3. Точка пересечения графика с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ,  $y = y(0) = 1$ .

Точка пересечения графика с осью  $Ox$ :  $y = 0$ , тогда

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} = 1, \text{ то есть } x = 1.$$

4. Производная и критические точки.

$$y' = \left( \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{((x-1)^2)^2}} \cdot ((x-1)^2)' = \\ = \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{2(x-1)}{3(x-1)\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

#### Комментарий

Используем общую схему исследования функции (с. 82). При нахождении области определения учитываем, что никаких ограничений, зафиксированных в таблице 8, функция не имеет, следовательно, областью определения будут все действительные числа.

Для нахождения производной данной функции применим формулу  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$  и формулу нахождения производной сложной функции.

(Отметим, что  $\sqrt[3]{(x-1)^2} \neq (x-1)^{\frac{2}{3}}$ , поскольку при  $x < 1$  выражение  $(x-1)^{\frac{2}{3}}$  не определено. В этом случае

Производная не существует во внутренней точке  $x = 1$  области определения функции  $y(x)$ , следовательно,  $x = 1$  — критическая точка. Других критических точек нет, поскольку  $y' \neq 0$ .

5. Отмечаем критическую точку на области определения функции  $y(x)$  и находим знак  $y'(x)$  в каждом из полученных промежутков (рис. 58).



Рис. 58

6. Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

$x$	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	-	не существует	+
$y(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

7. Находим значения функции в нескольких точках:

$x$	-7	2	9
$y$	4	1	4

8. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 59).

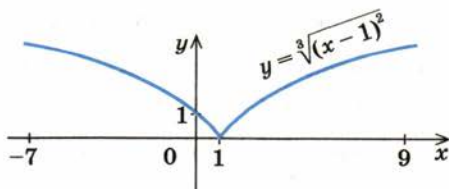


Рис. 59

можно записать, что

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} = |x-1|^{\frac{2}{3}},$$

или учесть, что  $(x-1)^2 \geq 0$ , и записать:  $\sqrt[3]{(x-1)^2} = ((x-1)^2)^{\frac{1}{3}}$ , а затем найти производную степени соответствующей сложной функции).

Обратим внимание, что функция непрерывна на всей числовой прямой (область определения — все действительные числа и заданная функция является композицией, то есть результатом последовательного применения двух непрерывных функций:  $y = \sqrt[3]{u}$  и  $u = (x-1)^2$ ), следовательно, ее график — неразрывная линия.

После исследования поведения производной функции при переходе через критическую точку, пользуясь результатами, приведенными в таблице 9, делаем вывод, что в окрестности точки  $x = 1$  график имеет следующий вид:  $\nabla$ . Поскольку производная не существует в точке  $x = 1$ , то график имеет излом в окрестности этой точки, а в самой точке  $x = 1$  — вертикальную касательную.

Чтобы уточнить вид графика, целесообразно найти координаты нескольких дополнительных контрольных точек. Для устного вычисления ординат этих точек удобно выбирать такие значения  $x$ , при которых значения  $x - 1$  будут кубом целого или рационального чисел.

**Вопросы для контроля**

- По какой схеме можно исследовать свойства функции для построения ее графика?
- Охарактеризуйте особенности выполнения основных этапов исследования функции и отображения результатов исследования на графике функции. Приведите примеры.

**Упражнения**

- 1°. Постройте схематический график функции, определенной и непрерывной на множестве всех действительных чисел, пользуясь ее свойствами, указанными в таблице:

1)	$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 0)$	$0$	$(0; +\infty)$
	$y'(x)$	+	0	-	0	+
	$y(x)$	↗	5	↘	2	↗
			max		min	

2)	$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
	$y'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
	$y(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗
			min		max		min	

Исследуйте функцию и постройте ее график (2–3).

- 2°. 1)  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ;      2)  $f(x) = 3x - x^3 + 1$ ;  
 3)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;      4)  $f(x) = 5x^4 - 4x^5$ .
3. 1)  $f(x) = (x^2 - 2)^2$ ;    2)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;    3)  $f(x) = \frac{4}{x} - x$ ;    4)  $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ .
4. а) Исследуйте функцию  $f(x)$  и постройте ее график.  
 б) Найдите область значений функции  $f(x)$ .  
 в\*) Сколько корней имеет уравнение  $f(x) = a$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

1)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ;    2)  $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ ;    3)  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ ;    4)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

5. Сколько корней имеет уравнение:

1)  $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ ;      2)  $8x^3 - 3x^4 + 2 = 0$ ;  
 3)  $x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3 = 0$ ;      4)  $x^3 - 3x^2 - 9x - 7 = 0$ ?

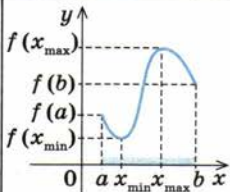
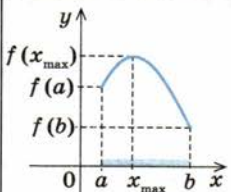
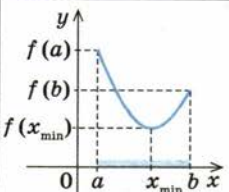
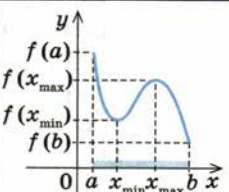
- 6\*. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1)  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ;    2)  $y = 2x - 5\sqrt[5]{x^2}$ ;    3)  $y = 2 \sin x - \cos 2x$ ;    4)  $y = \cos^2 x - \cos x$ .

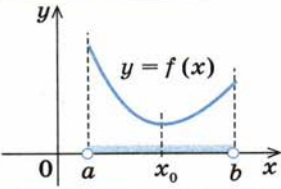
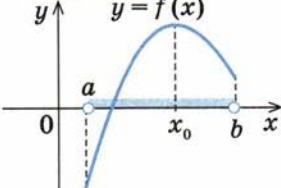

- 7\* (ГУУ). Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax^6 = e^x$  имеет единственный положительный корень.

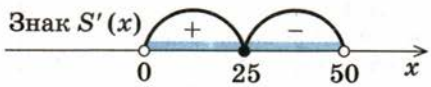
## 6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Таблица 10

1. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке			
Свойства			
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.			
Примеры			
 <p><math>\max_{[a; b]} f(x) = f(x_{\max})</math> <math>\min_{[a; b]} f(x) = f(x_{\min})</math></p>	 <p><math>\max_{[a; b]} f(x) = f(x_{\max})</math> <math>\min_{[a; b]} f(x) = f(b)</math></p>	 <p><math>\max_{[a; b]} f(x) = f(a)</math> <math>\min_{[a; b]} f(x) = f(x_{\min})</math></p>	 <p><math>\max_{[a; b]} f(x) = f(a)</math> <math>\min_{[a; b]} f(x) = f(x_{\min})</math></p>
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке			
Схема		Пример	
		Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на отрезке $[1; 3]$ .	
1. Убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$ .		Область определения заданной функции — все действительные числа ( $D(f) = \mathbf{R}$ ). Следовательно, заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$ .	
2. Найти производную $f'(x)$ .		$f'(x) = 3x^2 - 12$ .	
3. Найти критические точки: $f'(x) = 0$ или не существует.		Производная $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке). $f'(x) = 0; 3x^2 - 12 = 0$ при $x = 2$ или $x = -2$ .	
4. Выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку.		Заданному отрезку $[1; 3]$ принадлежит только критическая точка $x = 2$ .	
5. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.		$f(1) = 1; f(2) = -4; f(3) = 3$ .	

Продолж. табл. 10

6. Сравнить полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.	$\max_{[1; 3]} f(x) = f(3) = 3,$ $\min_{[1; 3]} f(x) = f(2) = -4.$
3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на интервале	
Свойство	Иллюстрация
Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума $x_0$ и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке $x_0$ .	
Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума $x_0$ и это точка максимума, то на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке $x_0$ .	
4. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции	
Схема	Пример Имеется кусок проволоки длиной 100 м. Необходимо огородить им прямоугольный участок наибольшей площади. Найдите размеры участка.
1. Одну из искоемых величин (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи) обозначить через $x$ (и по смыслу задачи наложить ограничения на $x$ ).	Пусть участок имеет форму прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок) со стороной $AB = x$ (м). Учитывая, что проволока будет натянута по периметру прямоугольника, получаем: $2AB + 2BC = 100$ , то есть $2x + 2BC = 100$ . Отсюда $BC = 50 - x$ (м). Поскольку длина каждой из сторон прямоугольника выражается положительным числом, то $0 < x < 50$ . 
2. Величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от $x$ .	Площадь прямоугольника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2.$

<p>3. Исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение (чаще всего с помощью производной).</p>	<p>Исследуем функцию <math>S(x)</math> с помощью производной. Производная <math>S'(x) = 50 - 2x</math> существует при всех действительных значениях <math>x</math> (следовательно, <math>S(x)</math> — непрерывная функция на заданном промежутке).  <math>S'(x) = 0, 50 - 2x = 0,</math>  <math>x = 25</math> — критическая точка.</p> <p>Знак <math>S'(x)</math></p>  <p>В точке <math>x = 25</math> производная <math>S'(x) = 50 - 2x</math> меняет знак с плюса на минус (см. рисунок), следовательно, <math>x = 25</math> — точка максимума. Учитывая, что непрерывная функция <math>S(x)</math> имеет на заданном интервале <math>(0; 50)</math> только одну точку экстремума <math>x = 25</math> и это точка максимума, делаем вывод, что на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке <math>x = 25^*</math>.</p>
<p>4. Убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи.</p>	<p>Следовательно, площадь огороженного участка будет наибольшей, если стороны прямоугольника равны: <math>AB = x = 25</math> (м), <math>BC = 50 - x = 25</math> (м), то есть если участок будет иметь форму квадрата со стороной 25 м.</p>

### Объяснение и обоснование

**Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.** Человеку в жизни часто приходится искать лучшее, или, как говорят, оптимальное решение поставленной задачи. Часть таких задач удается решить с помощью методов математического анализа — это задачи, которые можно

\* В рассматриваемой задаче можно было исследовать функцию  $S(x)$  и без применения производной. Функция  $S(x) = 50x - x^2$  является квадратичной функцией. Ее график — парабола с ветвями, направленными вниз. Тогда наибольшее значение эта функция принимает в вершине параболы, то есть при  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25$ . Это значение находится в заданном интервале  $(0; 50)$ , следовательно, на этом интервале функция также принимает наибольшее значение при  $x = 25$ .

свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции.

В курсах математического анализа доказывается теорема Вейерштрасса:

*непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, то есть существуют точки отрезка  $[a; b]$ , в которых  $f(x)$  принимает наибольшее и наименьшее на  $[a; b]$  значения.*

Рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  имеет на этом отрезке только конечное число критических точек. Тогда имеет место свойство:

**если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.**

Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена в пункте 1 таблицы 10.

- 1) Сначала рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  не имеет на этом отрезке критических точек. Тогда на отрезке  $[a; b]$  производная  $f'(x)$  сохраняет постоянный знак (см. с. 68), следовательно, функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  возрастает (рис. 60, а) или убывает (рис. 60, б). Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  — это значения на концах отрезка в точках  $a$  и  $b$ .
- 2) Пусть теперь функция  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a; b]$  конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок  $[a; b]$  на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Тогда, согласно изложенному в пункте 1, наибольшее и наименьшее значения функция  $f(x)$  принимает на концах таких отрезков, то есть в критических точках функции, или в точках  $a$  и  $b$ . ○

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции, имеющей на этом отрезке конечное число критических точек, достаточно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Обратим внимание, что для использования этого ориентира необходимо убедиться, что заданный отрезок входит в область определения данной функции и что функция непрерывна на этом отрезке (последнее следует, например, из того, что функция дифференцируема на заданном отрезке). Для нахождения критических точек функции необ-

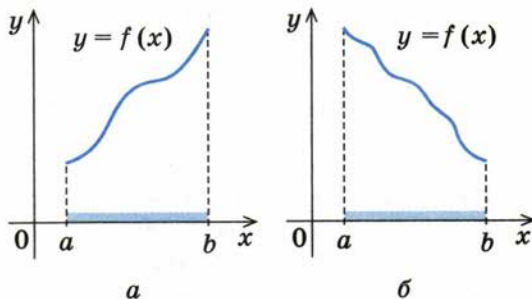


Рис. 60



ходимо найти ее производную и выяснить, где производная равна нулю или не существует. Уточненная схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, приведена в таблице 10 (п. 2, с. 100). Там же приведен и пример использования этой схемы. Другие примеры нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, приведены далее в примерах на с. 105–109.

Утверждение о том, что наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  достигается в точке  $x_0$ , можно обозначать так:  $\max_{[a; b]} f(x) = f(x_0)$ ; анало-

гичное утверждение о том, что наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  достигается в точке  $x_0$ , можно обозначать так:  $\min_{[a; b]} f(x) = f(x_0)$ .

При решении некоторых задач приходится находить *наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции* не на отрезке, а на интервале. Чаще всего в таких задачах функция имеет на заданном интервале только одну критическую точку: или точку максимума, или точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 61), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 62) (см. полное формулирование соответствующих свойств в пункте 3 таблицы 10 на с. 101).

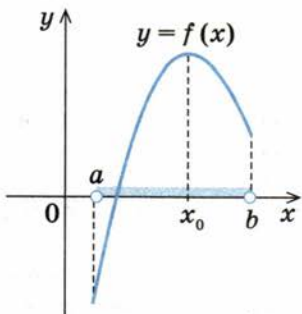


Рис. 61

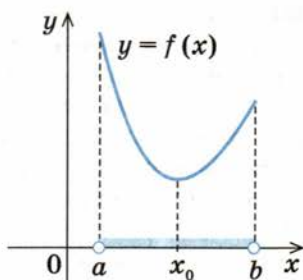


Рис. 62

- Действительно, если, например, непрерывная функция  $f(x)$  имеет на заданном интервале  $(a; b)$  только одну точку экстремума  $x_0$  и это точка минимума, то в этой точке производная  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс.

Таким образом, если  $x < x_0$ , то  $f'(x) < 0$ . Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то она убывает при  $x < x_0$ , и тогда при  $x < x_0$  имеем  $f(x) > f(x_0)$ . Также если  $x > x_0$ , то  $f'(x) > 0$ . Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то она возрастает при  $x > x_0$ , и тогда при  $x > x_0$  имеем  $f(x) > f(x_0)$ . Это и означает, что значение  $f(x_0)$  — наименьшее значение функции на интервале  $(a; b)$ . ○

Аналогично обосновывается и случай, когда  $x_0$  — точка максимума (приведите обоснование самостоятельно).

Рассмотренные способы нахождения наибольших и наименьших значений функции используются для **решения** разнообразных **прикладных задач**.

Решение практических задач математическими методами, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализация, то есть создание математической модели задачи (перевод условия задачи на язык математики); 2) решение составленной математической задачи; 3) интерпретация найденного решения (анализ полученного результата, то есть перевод его с языка математики в термины исходной задачи)\*.

Для задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений реализацию этих этапов можно проводить по схеме: 1) *одну из величин, которую необходимо найти (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи), обозначить через  $x$*  (и по смыслу задачи наложить ограничения на  $x$ ); 2) *ту величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию  $x$* ; 3) *исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значения*; 4) *убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи*.

Примеры использования этой схемы приведены в пункте 4 таблицы 10 (с. 101) и в примерах на с. 106–107.

При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции целесообразно использовать следующее утверждение:

если значения функции  $f(x)$  неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция  $(f(x))^n$ , где  $n$  — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

- Действительно, при  $u \geq 0$  функция  $y = u^n$ , где  $n$  — натуральное число, является возрастающей функцией ( $y' = nu^{n-1} \geq 0$  при  $u \geq 0$  и  $y' = 0$  только при  $u = 0^{**}$ ). Тогда сложная функция  $y = (f(x))^n$  (то есть функция  $y = u^n$ , где  $u = f(x)$ ) будет возрастать там, где возрастает функция  $f(x)$ , и убывать там, где убывает функция  $f(x)$ , а следовательно, и принимать наибольшее (или наименьшее) значение в той же точке, что и функция  $f(x)$ . ○

### Примеры решения задач

**Задача 1** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$  на отрезке  $[0; \pi]$ .

Решение

- ▶ 1)  $D(f) = \mathbf{R}$ , следовательно, отрезок  $[0; \pi]$  входит в область определения функции  $f(x)$ .
- 2)  $f'(x) = 2 \cos x - 2 \sin 2x$ .

Комментарий

Используем схему нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции  $f(x)$ :

\* С этим общим методом решения практических задач методами математики (его называют *методом математического моделирования*) вы уже фактически ознакомились. По описанной схеме вы решали текстовые задачи в курсе алгебры.

\*\* Конечно, при  $n \geq 2$ , а при  $n = 1$  значение  $y' = (u)' = 1 > 0$ .

- 3)  $f'(x)$  существует на всей области определения функции  $f(x)$  (следовательно, функция  $f(x)$  является непрерывной на заданном отрезке);

$$f'(x) = 0, \quad 2 \cos x - 2 \sin 2x = 0,$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x (1 - 2 \sin x) = 0, \quad \cos x = 0$$

$$\text{или } \sin x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad -$$

критические точки.

- 4) В заданный отрезок попадают только критические точки:  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ .

$$5) \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 1,$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$f(0) = 1, \quad f(\pi) = 1.$$

$$6) \quad \min_{[0; \pi]} f(x) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\max_{[0; \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}. \quad \triangleleft$$

- 1) убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции; 2) найти производную; 3) найти критические точки ( $f'(x) = 0$  или не существует); 4) выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку; 5) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка; 6) сравнить полученные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Чтобы убедиться в непрерывности данной функции, достаточно после нахождения ее производной показать, что производная существует в каждой точке области определения функции (или отметить, что заданная функция непрерывна как сумма двух непрерывных функций  $\sin x$  и  $\cos 2x$ ).

Выяснить, какие критические точки принадлежат заданному отрезку, можно на соответствующем рисунке, отмечая критические точки на числовой прямой (рис. 63):

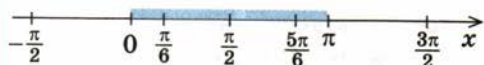


Рис. 63

## Задача 2

Из круглого бревна вырезают брус прямоугольного сечения наибольшей площади. Найдите размеры сечения бруса, если радиус сечения бревна равен 25 см.

Решение

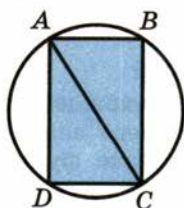


Рис. 64

► 1) Пусть из круга вырезают прямоугольник  $ABCD$  (рис. 64) со стороной  $AB = x$  (см). Учитывая, что  $AC$  — диаметр круга, имеем  $AC = 50$  (см). Поскольку  $x$  — длина

отрезка, то  $x > 0$ . Кроме того,  $AB < AC$  (катет прямоугольного треугольни-

Комментарий

Используем общую схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения: 1) одну из величин, которую необходимо найти (или с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи) обозначить через  $x$  (и по смыслу задачи наложить ограничения на  $x$ ); 2) ту величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от  $x$ ;

ка  $ABC$  меньше его гипотенузы), следовательно,  $0 < x < 50$ .

2) Из прямоугольного  $\triangle ABC$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2500 - x^2} \text{ (см).}$$

Тогда площадь сечения прямоугольника  $ABCD$  равна:

$$S(x) = AB \cdot BC = x \sqrt{2500 - x^2}.$$

Поскольку при  $0 < x < 50$  значение  $S(x) > 0$ , то рассмотрим функцию  $f(x) = (S(x))^2 = x^2(2500 - x^2) = 2500x^2 - x^4$ , принимающую наибольшее значение на промежутке  $0 < x < 50$  в той же точке, что и  $S(x)$ .

3) Производная  $f'(x) = 5000x - 4x^3$  существует во всех точках заданного промежутка (следовательно, функция  $f(x)$  непрерывна на заданном промежутке).

$$f'(x) = 0, \quad 5000x - 4x^3 = 0,$$

$$4x(1250 - x^2) = 0, \quad x = 0 \quad \text{или}$$

$x = \pm 25\sqrt{2}$ . В промежуток  $(0; 50)$  попадает только одна критическая точка  $x = 25\sqrt{2}$ , которая является точкой максимума: в этой точке производная меняет знак с плюса на минус (рис. 65).

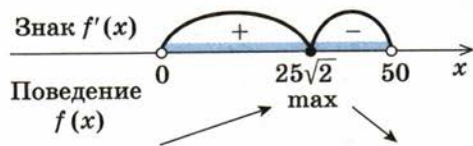


Рис. 65

Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна на заданном интервале и имеет там только одну точку экстремума и это точка максимума, то на этом интервале функция принимает наибольшее значение в точке  $x = 25\sqrt{2}$ .

4) Тогда  $AB = x = 25\sqrt{2}$ ,

3) исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение; 4) убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи.

Полученную функцию

$S(x) = x \sqrt{2500 - x^2}$  на промежутке  $0 < x < 50$  можно исследовать непосредственно. Но лучше учесть, что на этом промежутке  $S(x) > 0$ , и исследовать функцию  $f(x) = (S(x))^2$ , запись которой не содержит знака корня и которая принимает наибольшее значение в той же точке, что и  $S(x)$ .

Вывод о том, что в найденной точке функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение, можно обосновать одним из трех способов: 1) использовать свойство непрерывной на интервале функции, имеющей на этом интервале только одну точку экстремума (см. например, п. 3 табл. 10); 2) опираясь на поведение непрерывной функции  $f(x)$ , исследованной с помощью производной (см. рис. 65), обосновать, что на промежутках  $(0; x_0)$  и  $(x_0; 50)$  (где  $x_0 = 25\sqrt{2}$ )  $f(x) < f(x_0)$ , следовательно, в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение; 3) для нахождения наибольшего значения функции  $f(x)$  на интервале  $(0; 50)$  можно использовать то, что функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой, поэтому можно найти ее наибольшее значение на отрезке  $[0; 50]$ , а затем сделать вывод для данной задачи:

$$f(0) = f(50) = 0, \quad f(25\sqrt{2}) = 1250.$$

$BC = \sqrt{2500 - x^2} = 25\sqrt{2}$ . Следовательно, наибольшая площадь сечения бруса будет в том случае, когда искомый прямоугольник будет квадратом со стороной  $25\sqrt{2}$  ( $\approx 35$  см).  $\triangleleft$

Следовательно, наибольшее значение на отрезке  $[0; 50]$  функция  $f(x)$  принимает в точке  $x_0$  (которая лежит внутри этого отрезка). Тогда и на интервале  $(0; 50)$  эта функция принимает наибольшее значение в точке  $x_0$ .

**Задача 3\***

Найдите наибольшее значение площади треугольника  $OAB$ , если точка  $O$  — начало координат, точка  $A$  лежит на графике функции  $y = f(x)$  (где  $f(x) = \sqrt{7 + 3 \sin x} - (3x + 1) \cos x$  и  $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}$ ), точка  $B$  — на оси  $Ox$ , и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки  $A$ .

**Комментарий**

Для функции  $f(x)$  непросто найти область определения, но можно убедиться, что заданный промежуток полностью входит в область определения этой функции, оценив значения подкоренного выражения на заданном промежутке. Для этого учитываем, что на единичной окружности заданный промежуток находится во второй и третьей четвертях (рис. 66), где  $\cos x < 0$  и  $7 + 3 \sin x > 0$  при всех значениях  $x$ .

Также следует учесть, что, согласно определению графика функции, точка  $A$  имеет координаты  $(x; y) = (x; f(x))$ . Чтобы утверждать, что высота треугольника  $OAB$  равна ординате точки  $A$  (рис. 67), необходимо обосновать, что на заданном промежутке график функции  $y = f(x)$  лежит в первой четверти.

После записи площади треугольника  $OAB$  как функции  $S(x)$  для нахождения ее наибольшего значения обращаем внимание на то, что достаточно сложно найти  $S\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ . Поэтому удобно выполнить исследование этой функции с помощью производной и обосновать, что в точке экстремума из заданного промежутка функция принимает наибольшее значение на заданном промежутке (а не пользоваться схемой нахождения наибольшего значения непрерывной функции на отрезке).

**Решение**

► При  $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}$   $3x + 1 > 0$  и  $\cos x < 0$ . Тогда  $-(3x + 1) \cos x > 0$  на заданном промежутке. При всех значениях  $x$  имеем  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Тогда

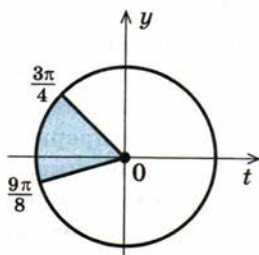


Рис. 66

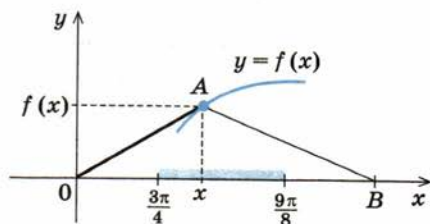


Рис. 67

$-3 \leq 3 \sin x \leq 3$ , значит,  $7 + 3 \sin x > 0$ . Таким образом, на заданном промежутке

$$7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x > 0,$$

следовательно, заданный промежуток полностью входит в область определения функции  $f(x)$ . Отметим также, что в этом случае значения функции  $f(x)$  будут положительными, то есть на заданном промежутке график функции  $y = f(x)$  лежит в первой четверти.

Поскольку заданная точка  $A$  лежит на графике функции  $y = f(x)$ , то в случае, когда абсцисса точки  $A$  равна  $x$ , ордината точки  $A$  равна  $f(x)$  (рис. 67). По условию  $x_B = 4y_A = 4f(x)$ . Точка  $A$  лежит в первой четверти, следовательно,  $y_A > 0$ , а значит, и  $x_B > 0$ . Тогда  $OB = x_B = 4f(x)$ , а высота треугольника  $OAB$  равна ординате точки  $A$ :  $h = y_A = f(x)$ . Поэтому площадь треугольника  $OAB$  равна:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2 \cdot (7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x).$$

Следовательно, нам необходимо найти наибольшее значение функции

$$S(x) = 14 + 6 \sin x - (6x + 2) \cos x \quad \text{при} \quad \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}.$$

Тогда  $S'(x) = 6 \cos x - (6 \cos x - (6x + 2) \sin x) = (6x + 2) \sin x$ .

Производная  $S'(x)$  существует во всех точках заданного отрезка. Следовательно, функция  $S(x)$  непрерывна на этом отрезке. Найдем, где  $S'(x) = 0$ :

$$(6x + 2) \sin x = 0; \quad x = -\frac{1}{3} \quad \text{или} \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из найденных точек в заданный отрезок входит только критическая точка  $x = \pi$ .

Обозначим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (рис. 68).

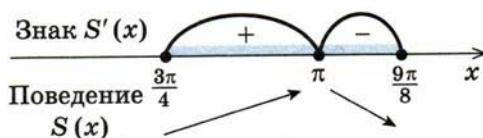


Рис. 68

Учитывая непрерывность функции  $S(x)$  на заданном промежутке, получаем, что функция возрастает на промежутке  $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$  (тогда при  $\frac{3\pi}{4} \leq x < \pi$  значение  $S(x) < S(\pi)$ ) и убывает на промежутке  $\left[\pi; \frac{9\pi}{8}\right]$  (тогда при  $\pi < x \leq \frac{9\pi}{8}$  значение  $S(x) < S(\pi)$ ). Следовательно, на отрезке  $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$  функция  $S(x)$  принимает наибольшее значение при  $x = \pi$ . Тогда  $S(\pi) = 14 + 6 \sin \pi - (6\pi + 2) \cos \pi = 16 + 6\pi$  (квадратных единиц).

**Ответ.** Наибольшее значение искомой площади треугольника равно  $16 + 6\pi$  (кв. ед.).

## Вопросы для контроля

- а) Объясните, в каких точках непрерывная на отрезке функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке. Проиллюстрируйте соответствующее свойство на графиках функций.  
б\*) Обоснуйте соответствующее свойство для случая, когда непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке только конечное число критических точек.
- Опишите схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке. Приведите пример.
- а) Сформулируйте свойства непрерывной на интервале функции, которая имеет на этом интервале только одну точку экстремума.  
б\*) Обоснуйте соответствующие свойства.
- Опишите схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения с помощью исследования соответствующих функций. Приведите пример.

## Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке (1–4).

- 1)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ ,  $[0; 3]$ ;      2)  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ ,  $[-1; 2]$ ;  
3)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ ,  $[-1; 1]$ ;      4)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ ,  $[-2; 1]$ .
- (ГФА). 1)  $f(x) = 3 \cos x + \cos 3x$ ,  $[0; \pi]$ ;      2)  $f(x) = 5 \sin x + \cos 2x$ ,  $[0; \pi]$ ;  
3)  $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$ ,  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ ;      4)  $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$ ,  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .
- 1)  $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ ,  $[1; 6]$ ;      2)  $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ ,  $[0; 9]$ ;  
3)  $f(x) = x + e^{-x}$ ,  $[-1; 2]$ ;      4)  $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$ ,  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .
- \* 1)  $f(x) = -x^3 + 3x|x - 3|$ ,  $[0; 4]$ ;      2)  $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ ,  $[-1; 1]$ ;  
3)  $f(x) = |x^2 - x - 2| + \ln x$ ,  $[1; 3]$ ;      4)  $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$ ,  $[-4; 4]$ .
- Число 10 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.
- Число 4 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была наименьшей.
- (МЭИ). Разность двух чисел равна 8. Какими должны быть эти числа, чтобы произведение куба большего числа на второе число было наименьшим?
- Из всех прямоугольников, площадь которых равна  $25 \text{ см}^2$ , найдите прямоугольник с наименьшим периметром.
- Из квадратного листа картона со стороной  $a$  необходимо изготовить открытую сверху коробку, вырезав в углах квадратики (рис. 69) и загнув полученные края. Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

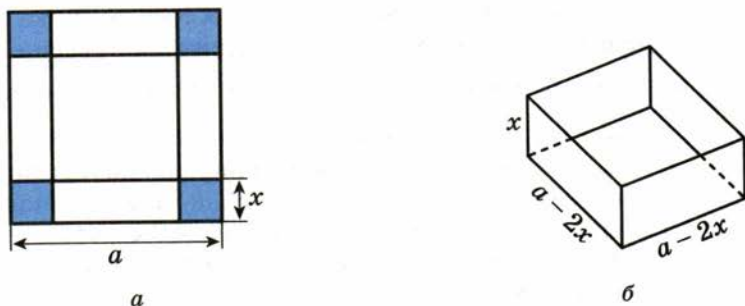


Рис. 69

10. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в окружность радиуса  $R$ , наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.
- 11 (КГУ). На странице текст занимает  $384 \text{ см}^2$ . Верхнее и нижнее поля должны быть по  $2 \text{ см}$ , правое и левое — по  $3 \text{ см}$ . Какими должны быть размеры страницы с точки зрения экономии бумаги?
- 12\* (РЭА). В прямоугольный треугольник с гипотенузой  $8 \text{ см}$  и углом  $60^\circ$  вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах. Определите большую из сторон прямоугольника.
- 13\*. Из треугольников, которые имеют данный угол  $\alpha$ , находящийся между сторонами, сумма длин которых постоянна и равна  $a$ , найдите такой, который имеет наименьший периметр.
- 14\* (РЭА). В шар радиуса  $R$  вписан цилиндр, который имеет наибольшую боковую поверхность. Найдите объем этого цилиндра.
- 15\* (ЕГЭ С). Найдите наименьшее значение площади треугольника  $OAB$ , если точка  $O$  — начало координат, точка  $A$  лежит на графике функции  $y = f(x)$  (где  $f(x) = \sqrt{4x - 2 \sin 2x - 9 \cos x + 12}$  и  $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{12\pi}{5}$ ), точка  $B$  — на оси  $Ox$ , и ее абсцисса равна ординате точки  $A$ .
- 16\* (ЕГЭ С). Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю  $OP$ , где точка  $O$  — начало координат, а точка  $P$  лежит на графике функции  $y = 49xe^{2-7x} + \frac{9}{x}$  и  $0,2 \leq x \leq 1$ .
- 17\* (ЕГЭ С). Найдите наибольшее значение площади треугольника  $OPK$ , где  $O$  — начало координат,  $P$  — точка на графике функции  $y = \frac{5}{x} + 64x^5 e^{6-4x}$ ,  $0,7 \leq x \leq 2$ , а  $K$  — точка на оси  $Ox$ , абсцисса которой равна абсциссе точки  $P$ .



- 18\* (ЕГЭ С). Найдите наибольшее значение площади треугольника  $OAB$ , если точка  $O$  — начало координат, точка  $A$  лежит на графике функции  $y = f(x)$  (где  $f(x) = \sqrt{7 + 2 \sin x - (2x + 7) \cos x}$  и  $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{5}$ ), точка  $B$  — на оси  $Ox$ , и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки  $A$ .
19. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки  $A$  берега. Пассажир лодки хочет добраться до села  $B$ , которое расположено на берегу на расстоянии 5 км от точки  $A$  (участок  $AB$  берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч; пассажир, выйдя из лодки, может пройти за час 5 км. К какому пункту на берегу должна пристать лодка, чтобы пассажир прибыл в село  $B$  за кратчайшее время?

## § 7.

ПОНЯТИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА  
ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## 7.1.

## Доказательство основных теорем о пределах

Таблица 11

1. Определение предела функции в точке	
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$	Число $B$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $a$ (при $x$ , стремящемся к $a$ ), если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое положительное число <sup>1</sup> $\delta$ , что при всех $x \neq a$ , удовлетворяющих неравенству $ x - a  < \delta$ , выполняется неравенство $ f(x) - B  < \varepsilon$ .
2. Основные теоремы о пределах функции	
$\lim_{x \rightarrow a} c = c$	Предел постоянной функции равен самой постоянной.
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.
$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Постоянный множитель можно выносить за знак предела.
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ (где $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ )	Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.

<sup>1</sup> Заметим, что  $\delta$ , вообще говоря, зависит от  $\varepsilon$  и поэтому его часто обозначают  $\delta(\varepsilon)$ .

3. Понятие бесконечно малой функции при  $x \rightarrow a$ 

Функция  $f(x)$ , которая определена в некоторой окрестности точки  $a$ , называется бесконечно малой функцией при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

## 4. Свойства бесконечно малых функций

1. Если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , то их сумма  $\alpha(x) + \beta(x)$ , произведение  $\alpha(x) \cdot \beta(x)$  и  $c \cdot \alpha(x)$  (где  $c = \text{const}$ ) также являются бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow a$ .
2. Если функция  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  и для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство  $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ , то функция  $\alpha(x)$  также бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ .

## 5. Связь определения предела функции в точке с бесконечно малыми функциями

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$

## Объяснение и обоснование

**1. Определение предела функции в точке.** Сформулируем *определение предела функции в точке* (которое уже рассматривалось на с. 19), используя понятие  $\delta$ -окрестности точки. Обычно  $\delta$ -окрестностью точки  $a$  называют промежуток  $(a - \delta; a + \delta)$ , то есть все значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $|x - a| < \delta$ .

Пусть задана функция  $f(x) = 2x + 3$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , значения которой найдены при некоторых  $x$  из так называемой  $\delta$ -окрестности точки  $x = 2$  (то есть из интервала  $(2 - \delta, 2 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ ).

$x$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	7,002	7,02	7,2

Из приведенной таблицы видно, что чем ближе значение  $x$  к 2, тем ближе к числу 7 соответствующее значение  $f(x)$ . Причем, выбирая все меньшую  $\delta$ -окрестность точки 2, можно неограниченно приближать значение  $f(x)$  к числу 7 (то есть можно выбрать такую  $\delta$ -окрестность точки 2, чтобы расстояние от точек  $f(x)$  до точки 7 на числовой прямой (то есть  $|f(x) - 7|$ ) было меньше любого положительного числа  $\varepsilon$ ). Как уже отмечалось, в этом случае говорят, что число 7 является пределом функции  $f(x)$  в точке  $x = 2$  (или при  $x$ , стремящемся к 2), и записывают:  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$ .

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ , кроме, возможно, самой точки  $a$ . Число  $B$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  (или при  $x$ , стремящемся к  $a$ ), если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq a$  из  $\delta$ -окрестности точки  $a$  (то есть при  $x \neq a$  и  $|x - a| < \delta$ ) выполняется неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$ .

Проиллюстрируем применение определения к обоснованию того, что предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , равен  $B$ .

В простейших случаях такое обоснование проводится по схеме:

1) для любого положительного числа  $\varepsilon$  рассматривают неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon;$$

2) при всех значениях  $x \neq a$  из некоторой окрестности точки  $a$  из этого неравенства получают неравенство  $|x - a| < \delta$ ;

3) объясняют (опираясь на равносильность выполненных преобразований неравенства или на свойства неравенств), что при полученном значении  $\delta$  (которое записывают через  $\varepsilon$ ) из неравенства  $|x - a| < \delta$  (при  $x \neq a$ ) следует неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$ ;

4) используя определение предела функции в точке  $a$ , делают вывод, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .

### Задача 1

Используя определение предела, проверьте, что  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$ .

#### Решение

► Пусть  $f(x) = 2x + 3$  и  $\varepsilon$  — некоторое положительное число ( $\varepsilon > 0$ ). Рассмотрим неравенство

$$|f(x) - 7| < \varepsilon \tag{1}$$

и найдем такое число  $\delta > 0$ , чтобы при  $|x - 2| < \delta$  выполнялось неравенство (1).

Учитывая, что  $|f(x) - 7| = |(2x + 3) - 7| = |2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|x - 2|$ , неравенство  $|f(x) - 7| < \varepsilon$  равносильно неравенству  $2|x - 2| < \varepsilon$ , которое, в свою очередь, равносильно неравенству  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому, если выбрать

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , то при  $|x - 2| < \delta$  будет выполняться неравенство  $|(2x + 3) - 7| < \varepsilon$ , а это и значит, что  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$ . ◁

**З а м е ч а н и е.** Как видим, выбор  $\delta$  зависит от заданного значения  $\varepsilon$ . Чтобы подчеркнуть этот факт, иногда записывают  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

Напомним, что точка  $a$ , в которой рассматривается предел, может принадлежать области определения функции  $f(x)$  (как в рассмотренной задаче 1), а может и не принадлежать ей.

**Задача 2** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ .

Решение

▶ Пусть  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда на области определения функции  $f(x)$  (то есть при  $x \neq 3$ ) имеем

$$|f(x) - 6| = \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3|.$$

Если выбрать  $\delta = \varepsilon$ , то получим, что  $|f(x) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$ , как только  $|x - 3| < \delta$ . Поэтому согласно определению предела  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ . ◁

**Задача 3** Докажите, что предел постоянной функции равен самой постоянной.

Решение

▶ Пусть  $f(x) = c$  для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $a$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$   $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$  при всех  $x$  из выбранной окрестности точки  $a$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$ . ◁

**Задача 4** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ .

Решение

▶ Пусть  $f(x) = x$  и выбрано некоторое положительное число  $\varepsilon$ . Если взять  $\delta = \varepsilon > 0$ , то получим, что  $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ , как только  $|x - a| < \delta$ . Поэтому согласно определению предела  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . ◁

**Задача 5** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

Решение

▶ Пусть  $f(x) = x^2$  и выбрано некоторое положительное число  $\varepsilon$ . Если взять  $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ , получим, что  $|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon$ , как только  $|x - 0| = |x| < \delta$ . Поэтому согласно определению предела  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . ◁

**2. Основные теоремы о пределах функции. Понятие бесконечно малой функции при  $x \rightarrow a$ .** С помощью определения предела функции можно доказать также теорему о пределе суммы двух функций.

*Предел суммы двух функций равен сумме их пределов, если пределы слагаемых существуют:*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

● Зададим  $\varepsilon > 0$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то найдется такое число  $\delta_1 > 0$ , что при  $|x - a| < \delta_1$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Аналогично, если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то найдется такое число  $\delta_2 > 0$ , что при  $|x - a| < \delta_2$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) выполняется неравенство

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Если выбрать как число  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (это можно обозначить так:  $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ ), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки  $a$ , и при  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) будут выполняться оба неравенства (1) и (2). Тогда

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Из этого следует, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad \circ$$

Для доказательства свойств пределов произведения и частного функций удобно ввести понятие *бесконечно малой функции*.

**Функция  $f(x)$ , которая определена в некоторой окрестности точки  $a$ , называется бесконечно малой функцией при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Учитывая определение предела функции в точке, это определение можно сформулировать так.

*Функция  $f(x)$ , которая определена в некоторой окрестности точки  $a$ , называется бесконечно малой функцией при  $x$ , стремящемся к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство  $|f(x)| < \varepsilon$ .*

Например,

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  (см. задачу 4), следовательно,  $f(x) = x$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  (см. задачу 5), следовательно,  $f(x) = x^2$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то это эквивалентно тому, что  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .

- Действительно, если рассмотреть функцию

$$\alpha(x) = f(x) - A, \quad (3)$$

то  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - A) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} A = A - A = 0$ . Это означает, что функция  $\alpha(x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ . Но тогда равенство (3) эквивалентно равенству  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .  $\circ$

### Свойства бесконечно малых функций

1. Если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , то их сумма  $\alpha(x) + \beta(x)$  и произведения  $\alpha(x) \cdot \beta(x)$  и  $c \cdot \alpha(x)$  (где  $c = \text{const}$  — постоянная) также являются бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow a$ .
2. Если функция  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  и для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство  $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ , то функция  $\alpha(x)$  также бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ .

Докажем эти свойства.

- 1. По условию функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ . Это означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ . Тогда, используя формулу предела суммы, имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

Из этого следует, что сумма  $\alpha(x) + \beta(x)$  является бесконечно малой функцией.

С другой стороны, если функция  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ , то это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta_1 > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta_1$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Аналогично если функция  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ , то это означает, что, например, для  $\varepsilon = 1$  можно указать такое  $\delta_2 > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta_2$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < 1. \quad (5)$$

Если выбирать как число  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$  ( $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ ), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки  $a$ , и при  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) будут выполняться оба неравенства (4) и (5). Тогда  $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ . Из этого следует, что  $\alpha(x) \cdot \beta(x)$  является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow a$ .

Для обоснования того, что функция  $c \cdot \alpha(x)$  (где  $c = \text{const}$ ) является бесконечно малой, достаточно заметить, что при  $c = 0$  это утверждение выполняется ( $\lim_{x \rightarrow a} 0 \cdot \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$ ), а при  $c \neq 0$  для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ . Тогда

$|c \cdot \alpha(x)| = |c| \cdot |\alpha(x)| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$ . Из этого следует, что функция  $c \cdot \alpha(x)$  (где  $c = \text{const}$ ) является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ .

2. По условию функция  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta_1 > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих

условию  $|x - a| < \delta_1$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \varepsilon. \quad (6)$$

По условию при всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|. \quad (7)$$

Тогда, если выбирать как число  $\delta_2$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta$  ( $\delta_2 = \min\{\delta_1; \delta\}$ ), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки  $a$ , и при  $|x - a| < \delta_2$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) будут выполняться оба неравенства (6) и (7). Получаем  $|\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon$ . Из этого следует, что функция  $\alpha(x)$  также является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ .  $\circ$

Докажем теорему о пределе произведения.

- Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то это эквивалентно тому, что  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .

Аналогично, если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то это эквивалентно тому, что  $g(x) = B + \beta(x)$ , где  $\beta(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .

Тогда  $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ .

Учитывая свойства бесконечно малых функций, получаем, что функция  $\varphi(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$  — бесконечно малая. Следовательно,  $f(x) \cdot g(x) = AB + \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — бесконечно малая функция. Из этого следует, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad \circ$$

*Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.*

Отметим, что, используя метод математической индукции, правила вычисления пределов суммы и произведения можно обобщить на случай любого количества слагаемых или множителей.

Используя правило вычисления предела произведения, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x). \text{ Следовательно,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad —$$

*постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Для доказательства теоремы о пределе частного  $\frac{f(x)}{g(x)}$  сначала рассмотрим случай, когда  $f(x) = 1$ , то есть докажем утверждение:

$$\text{если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \text{ (где } B \neq 0 \text{), то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}.$$

- По условию  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  (где  $B \neq 0$ ). Это эквивалентно тому, что  $g(x) = B + \beta(x)$ , где  $\beta(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ . Тогда для  $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих

условию  $|x - a| < \delta$  (кроме, возможно,  $x = a$ ), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}. \quad (8)$$

Используя неравенство  $|a + b| \geq |a| - |b|$  (с. 14) и неравенство (8), получаем:  $|g(x)| = |B + \beta(x)| \geq |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$ . Следовательно, для выбранных значений  $x$

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2}. \quad (9)$$

Рассмотрим для выбранных значений  $x$  выражение  $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right|$  и учтем неравенство (9):

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)| \cdot |B|} = \frac{|\beta(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} < \frac{2}{|B|^2} \cdot |\beta(x)| = \left| \frac{2}{B^2} \cdot \beta(x) \right|.$$

Поскольку функция  $\beta(x)$  — бесконечно малая (при  $x \rightarrow a$ ), то функция  $\frac{2}{B^2} \cdot \beta(x)$  также бесконечно малая ( $\frac{2}{B^2} = \text{const}$ ). Тогда по свойству 2 бес-

конечно малых функций (с. 117) получаем, что функция  $\gamma(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , из этого следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}.$$

Отсюда, если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  (где  $B \neq 0$ ), то, используя формулу предела произведения и полученную формулу, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}. \text{ Следовательно,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{где } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0). \quad \circ$$

*Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.*

**Задача 6** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 5x + 6)$ .

**Решение**

► Используя теоремы о пределах суммы, разности и произведения, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 5x + 6) &= \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 1} (5x) + \lim_{x \rightarrow 1} 6 = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6 = \\ &= 3(\lim_{x \rightarrow 1} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 1} x) - 5 \cdot 1 + 6 = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 5 + 6 = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4. ◀



**Пример 7** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ .

**Решение**

► Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя.

Разложим числитель на множители:  $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ .

Поскольку при нахождении предела в точке 3 рассматриваются только значения  $x \neq 3$ , то дробь можно сократить на  $x - 3 \neq 0$ , и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1.$$

Ответ: 1. ◀

**Теорема о единственности предела.** Если функция  $f(x)$  в точке  $a$  имеет предел, то этот предел единственный.

● Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Пусть в точке  $x = a$  функция  $f(x)$  имеет два разных предела  $A$  и  $B$ . По определению предела для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  и  $\delta_2(\varepsilon) > 0$  такие, что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta_1$  ( $x \neq a$ ), выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad (10)$$

а для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta_2$  ( $x \neq a$ ), выполняется неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon. \quad (11)$$

Из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$  можно выбрать наименьшее. Обозначим его буквой  $\delta$  ( $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ). Если взять некоторое  $x \neq a$ , которое удовлетворяет неравенству  $|x - a| < \delta$ , то для него выполняются оба неравенства (10) и (11). Вследствие того, что модуль суммы двух слагаемых не превышает суммы модулей этих слагаемых, имеем:

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| = \\ &= |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon$  — любое положительное число, то возьмем  $\varepsilon = \frac{|A - B|}{4}$ . Тогда

получим  $|A - B| < \frac{1}{2}|A - B|$ , то есть  $|A - B| < 0$ . Но это неравенство не может выполняться. Следовательно, наше предположение о существовании двух пределов неверно, и поэтому  $A = B$ . ◯

При изучении пределов иногда приходится выполнять предельный переход в неравенствах с помощью следующей теоремы.

**Теорема.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ , причем в некоторой окрестности точки  $a$  (кроме, возможно, самой точки  $a$ ) справедливо неравенство  $f(x) \leq \varphi(x)$ , то  $A \leq B$ .

- Доказательство (методом от противного). Допустим противоположное, то есть что  $A > B$ . Выберем две  $\varepsilon$ -окрестности точек  $A$  и  $B$ , а именно:  $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$  и  $(B - \varepsilon; B + \varepsilon)$ , которые не пересекаются, то есть

$$A - \varepsilon > B + \varepsilon. \quad (12)$$

Поскольку  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то найдется  $\delta_1$ -окрестность точки  $a$ , в которой  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , то есть

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \quad (13)$$

Также существует  $\delta_2$ -окрестность точки  $a$ , в которой  $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$ , то есть

$$B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon. \quad (14)$$

Из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$  выберем наименьшее и обозначим его через  $\delta$ . Тогда, учитывая неравенства (12)–(14), в  $\delta$ -окрестности точки  $a$  имеем:

$$\varphi(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

и значит,  $f(x) > \varphi(x)$ , но это противоречит условию. Следовательно,  $A \leq B$ .  $\circ$

Следствие (предел промежуточной функции). Если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ ,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , а в некоторой окрестности точки  $a$  (кроме, возможно, самой точки  $a$ ) справедливо неравенство

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad (15)$$

и существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .

- Доказательство. Поскольку все условия последней теоремы выполняются, то выполним предельный переход в неравенствах (15). Получаем  $B \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq B$ . Но эти неравенства могут выполняться только в том случае, когда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , что и требовалось доказать.  $\circ$

## 7.2. Односторонние пределы

В приведенном в пункте 7.1 определении предела функции в точке аргумент  $x$  принимает все значения из  $\delta$ -окрестности точки  $a$  (кроме, возможно,  $x = a$ ) как слева, так и справа от точки  $a$ .

Если при нахождении предела рассматривать значения  $x$  только слева от точки  $a$ , то такой предел называется *левым*, или *левосторонним*, пределом и обозначается  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $f(a-0)$ ; а если рассматривать значения  $x$  только справа от точки  $a$ , то такой предел называется *правым*, или *правосторонним*, пределом и обозначается  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $f(a+0)$ .

Левосторонние и правосторонние пределы называются *односторонними* пределами. Для случая, когда рассматривают односторонние пределы в точке  $x = 0$  (то есть при  $x \rightarrow 0$ ), запись упрощают и записывают для левостороннего предела  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$  или  $f(-0)$ , а для правостороннего предела  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  или  $f(+0)$ .

Сформулируем теперь определение односторонних пределов.

**Определение.** Число  $B_+$  называется *правосторонним пределом функции*  $f(x)$  в точке  $a$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$  из области определения функции, удовлетворяющих условию  $a < x < a + \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(x) - B_+| < \varepsilon. \quad (1)$$

Аналогично определяется число  $B_- = f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  — *левосторонний предел функции*  $f(x)$  в точке  $a$ . Здесь неравенство

$$|f(x) - B_-| < \varepsilon \quad (2)$$

должно выполняться для всех  $x$  из левой части  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , то есть при  $a - \delta < x < a$ .

Отметим связь между односторонними пределами и пределом функции в некоторой точке  $a$ .

● Если число  $B$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , то неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon \quad (3)$$

справедливо для всех значений  $x$  из  $\delta$ -окрестности точки  $a$  ( $x \neq a$ ). Тогда это неравенство справедливо для всех значений  $x$  из левой половины указанной  $\delta$ -окрестности и для всех  $x$  из ее правой половины, то есть существуют левосторонний и правосторонний пределы в точке  $a$ , и эти пределы равны  $B$ . Поэтому,

если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , то есть  $B_- = B_+ = B$ .

Имеет место и обратное утверждение: если выполняется равенство

$$B_- = B_+ = B, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B.$$

Действительно, если  $B_- = B_+ = B$ , то неравенство (1), определяющее существование правостороннего предела функции, выполняется и слева от точки  $a$  (согласно неравенству (2)), но тогда неравенство (1) фактически обращается в неравенство (3), и поэтому  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .

В связи с этим можно сформулировать такой критерий.

**Критерий существования предела.** Для того чтобы в точке  $x = a$  существовал предел  $B$  функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали левосторонний предел функции  $f(x)$ , то есть  $B_- = f(a-0)$ , и правосторонний предел функции  $f(x)$ , то есть  $B_+ = f(a+0)$ , и чтобы они равнялись друг другу:  $B_- = B_+ = B$ , при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B. \quad \circ$$

### Задача 1

Выясните существование предела функции  $f(x) = |x|$  в точке 0.

Решение

► Функция  $f(x) = |x|$  определена на всей числовой прямой. Поскольку  $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0 \end{cases}$  (см. рис. 21 на с. 40), то при  $x < 0$   $f(x) = -x$ , поэтому  $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0$ . Аналогично  $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$ .

Таким образом,  $f(-0) = f(+0) = 0$ . Поскольку односторонние пределы в точке 0 совпадают, то предел функции  $f(x)$  существует и равен их общему значению, то есть  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .  $\triangleleft$

**Задача 2** Выясните существование предела в точке 2 для функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{при } x \leq 2, \\ 4 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Решение

▶ Заданная функция определена на всей числовой прямой. Найдем односторонние пределы этой функции в точке  $x = 2$ .

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (2x + 3) = 7 \quad (\text{см. задачу 1 из пункта 7.1, с. 114});$$

та 7.1, с. 114);

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 4 = 4 \quad (\text{см. задачу 3 из пункта 7.1, с. 115}).$$

То есть  $f(2-0) \neq f(2+0)$ , и поэтому заданная функция не имеет предела в точке  $x = 2$  и не является непрерывной в этой точке. (График этой функции изображен на рисунке 70.)  $\triangleleft$

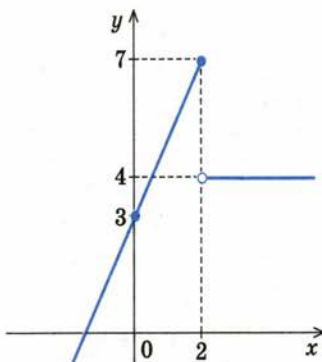


Рис. 70

### 7.3. Непрерывные функции

Напомним, что функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Доказанные свойства предела функции позволяют обосновать свойства **непрерывных функций**, приведенные в таблице 2 (с. 20):

если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то **сумма, произведение и частное непрерывных в точке  $a$  функций непрерывны в точке  $a$**  (частное в случае, когда делитель  $g(a) \neq 0$ ).

● Действительно, если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a)$ . Но это и означает,

что функция  $f(x) + g(x)$  непрерывна в точке  $a$ . Аналогично обосновывается непрерывность произведения и частного двух непрерывных функций.  $\circ$

Согласно определению, **непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  означает выполнение следующих условий:**

- 1) функция  $f(x)$  должна быть определена в точке  $x_0$ ;
- 2) у функции  $f(x)$  должен существовать предел в точке  $x_0$ ;
- 3) предел функции в точке  $x_0$  совпадает со значением функции в этой точке.

Например, функция  $f(x) = x^2$  определена на всей числовой прямой и  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ . Поскольку  $f(1) = 1$ , то значение  $f(x) = x^2$  в точке 1 совпадает

с пределом этой функции при  $x \rightarrow 1$ , поэтому по определению функция  $f(x) = x^2$  непрерывна в точке  $x = 1$ .

Если использовать определения левостороннего и правостороннего пределов, то можно дать определения левосторонней и правосторонней непрерывности функции, а именно: функция называется *непрерывной слева* в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ , и *непрерывной справа* в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a).$$

Например, функция  $f(x) = \{x\}$ , где  $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ , непрерывна в любой точке, кроме целочисленных значений аргумента  $x$ , в которых она непрерывна справа (рис. 71).

Функция называется *непрерывной на интервале*  $(a; b)$ , если она непрерывна в каждой его точке. Функция называется *непрерывной на отрезке*  $[a; b]$ , если она непрерывна на интервале  $(a; b)$ , непрерывна справа в точке  $a$  и непрерывна слева в точке  $b$ .

Если равенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  в точке  $a$  не выполняется, функция  $f(x)$  называется *разрывной* в точке  $a$  (а сама точка называется *точкой разрыва* функции  $f(x)$ ).

Например, функция из задачи 2 является разрывной в точке 2.

Если рассмотреть функцию  $y = [x]$  ( $[x]$  — *целая часть*  $x$ , то есть наибольшее целое число, которое не превышает  $x$ ), то эта функция является разрывной в каждой целочисленной точке (рис. 72).

Аналогично для функции  $y = \{x\}$  ( $\{x\}$  — *дробная часть*  $x$ , то есть разность  $x - [x]$ ) точками разрыва являются все целочисленные значения аргумента  $x$  (см. рис. 71).

Понятие непрерывности функции можно связать с понятиями приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция  $f(x)$  с областью определения  $D(f) = (a; b)$  и пусть  $x_0$  — некоторое значение аргумента из интервала  $(a; b)$ . Если  $x \in (a; b)$  — другое фиксированное значение аргумента, то разность  $x - x_0$  называется *приращением аргумента* и обозначается  $\Delta x$ , то есть  $\Delta x = x - x_0$ . Отсюда

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Разность  $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  называется *приращением функции*  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta f$ .

Очевидно, что в случае, когда  $x$  стремится к  $x_0$ , приращение аргумента стремится к нулю:  $\Delta x \rightarrow 0$ . Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то по определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , и поэтому  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ , а это означает,

$$\text{что } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Из последнего соотношения получаем, что в случае, когда функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. Учитывая это свойство, мы строим график непрерывной функции в виде сплошной линии (не отрывая карандаш от бумаги).

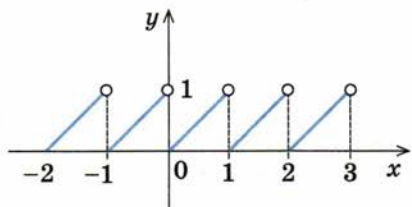


Рис. 71

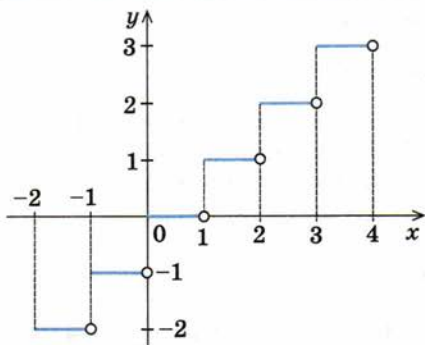


Рис. 72

Представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, хорошо подтверждается свойствами непрерывных функций, которые доказываются в курсах математического анализа. Приведем примеры таких свойств (табл. 12).

Таблица 12

Свойства непрерывных функций	Иллюстрация
1. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.	
2. Функция $f(x)$ , непрерывная на отрезке $[a; b]$ , принимает все промежуточные значения между ее значениями $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка.	
3. Если на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак.	

Отметим, что известные вам элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. Графики таких функций изображаются сплошными кривыми на любом интервале, который полностью входит в об-

ласть определения (именно на этом свойстве и основывается способ построения графика функции «по точкам»). Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на любом интервале, который не содержит точку 0 (см. рис. 45).

Свойства непрерывных функций позволяют корректно обосновать метод интервалов решения неравенств, приведенный в учебнике для 10 класса. Поэтому метод интервалов можно использовать при решении любых неравенств вида  $f(x) \geq 0$ , где  $f(x)$  — непрерывная в любой точке своей области определения функция (см. также с. 21–24).

#### 7.4. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел функции. Предел последовательности

Часто при изучении функций возникает необходимость найти предел функции на бесконечности, то есть найти такое число  $B$  (если оно существует), к которому стремится функция  $f(x)$  при неограниченном возрастании аргумента  $x$ , или когда  $x$ , увеличиваясь по абсолютной величине, остается отрицательным.

Рассмотрим функцию  $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$ . Очевидно, что при увеличении  $x$  знаменатель дроби увеличивается, и поэтому значение дроби становится как угодно малым по абсолютной величине. Таким образом, значение функции  $f(x)$  при очень больших значениях аргумента  $x$  мало отличается от числа 2. В этом случае говорят, что функция  $f(x)$  имеет своим пределом число 2 при  $x \rightarrow \infty$ , и пишут:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой. Число  $B$  называется пределом  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число<sup>1</sup>  $M > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x| > M$ , выполняется неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$ .

Это записывается так:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$ .

В некоторых случаях поведение функции  $f(x)$  разное при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ . Поэтому при исследовании свойств функции иногда отдельно рассматривают  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Эти пределы определяются аналогично определению предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , только условие  $|x| > M$  заменяется соответственно на  $x < -M$  и  $x > M$ .

Кроме рассмотренных случаев конечных пределов функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  (или при  $x \rightarrow \infty$ ), иногда используется также понятие бесконечного предела. Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , которая определена для всех  $x \neq 0$

<sup>1</sup> Заметим, что число  $M$ , вообще говоря, зависит от  $\varepsilon$  и поэтому его часто обозначают  $M(\varepsilon)$ .

(рис. 73), принимает сколь угодно большие значения при  $x \rightarrow 0$ . В этом случае говорят, что функция в точке  $x = 0$  имеет бесконечный предел, и пишут:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

**Определение.** Будем считать, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , если для любого числа  $M > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$  ( $x \neq a$ ), выполняется неравенство  $|f(x)| > M$ .

Аналогично определяют и обозначения  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (только в первом случае условие  $|f(x)| > M$  заменяют на  $f(x) > M$ , а во втором — на условие  $f(x) < -M$ ).

В математике также используется понятие бесконечного предела при  $x \rightarrow \infty$ , то есть предела типа  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , который определяется

так: если для любого числа  $M > 0$  существует такое число  $M_0 > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x| > M_0$ , выполняется условие  $|f(x)| > M$ , то говорят, что функция  $f(x)$  имеет бесконечный предел на бесконечности.

Например,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$ . Этот факт выражает известное свойство функции  $f(x) = x^2$ , которая неограниченно возрастает при увеличении значений  $|x|$ .

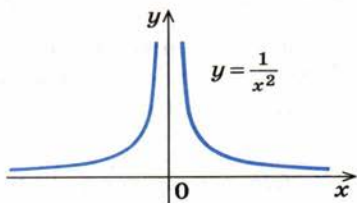


Рис. 73

**Задача 1** Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3}$ .

**Решение**

► Вынесем в числителе и знаменателе наивысшую степень переменной за скобки и сократим числитель и знаменатель на  $x^3$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left( 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Ответ:  $-2$ . <

**Задача 2** Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$ .

**Решение**

► Умножим и разделим разность, которая стоит под знаком предела, на сумму  $\sqrt{x^2 + 5} + x$ . Получим



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0. ◁

Напомним, что в случае, когда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , функция называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ . Если же  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то функция называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ . Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

Отметим, что в случае, когда функция  $f(x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  и  $f(x) \neq 0$  для  $x \neq a$  из некоторой окрестности точки  $a$ , функция  $\frac{1}{f(x)}$  будет бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ . И наоборот, если функция  $f(x)$  — бесконечно большая при  $x \rightarrow a$ , то функция  $\frac{1}{f(x)}$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  (это свойство было использовано на последнем этапе вычисления предела в задаче 2).

Например, функция  $f(x) = x$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 0$  и бесконечно большой при  $x \rightarrow \infty$  (а также при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ ). Тогда функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$  (при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ ) и бесконечно большой при  $x \rightarrow 0$  (аналогично при  $x \rightarrow -0$  и при  $x \rightarrow +0$ ).

### Предел последовательности

В математике достаточно распространенными являются бесконечные последовательности, то есть функции  $y = f(n)$ , заданные на множестве натуральных чисел  $N$ . Чтобы подчеркнуть, что аргумент такой функции принимает только значения из множества натуральных чисел, его обозначают не  $x$ , а  $n$ . Для последовательности  $f(n)$  достаточно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента  $n$  (при  $n \rightarrow +\infty$ ). Определение этого предела в основном аналогично определению предела функции на бесконечности.

**О п р е д е л е н и е.** Число  $B$  называется *пределом последовательности*  $f(n)$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $n > M$  выполняется неравенство  $|f(n) - B| < \varepsilon$ .

Обоснование того, что предел последовательности  $f(n)$  равен  $B$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = B$  (точнее  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = B$ ), с использованием определения можно проводить аналогично тому, как это делалось для предела функции на с. 117.

**Задача 3** Докажите, что если  $|q| < 1$  (и  $n \in \mathbb{N}$ ), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

**Решение**

► Если  $q = 0$ , то утверждение очевидно (покажите самостоятельно).

Пусть  $f(n) = q^n$  ( $|q| < 1$  и  $q \neq 0$ ) и  $\varepsilon$  — некоторое положительное число ( $\varepsilon > 0$ ). Учитывая, что в нашем случае  $B = 0$ , рассмотрим неравенство  $|f(n) - B| < \varepsilon$ , то есть  $|q^n| < \varepsilon$  (\*). Поскольку  $|q^n| = |q|^n$  (см. с. 7), получаем, что неравенство (\*) равносильно неравенству  $|q|^n < \varepsilon$  (\*\*).

Прологарифмируем неравенство (\*\*) по основанию  $|q|$  и учтем, что при  $0 < |q| < 1$  функция  $y = \log_{|q|} t$  является убывающей. Тогда неравенство (\*\*) равносильно неравенству  $n > \log_{|q|} \varepsilon$ . Поэтому, если выбрать\*  $M = \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil + 1$ , то при  $n > M$  будет выполняться неравенство  $n > \log_{|q|} \varepsilon$ , а значит, и неравенство  $|q^n| < \varepsilon$ , то есть  $|q^n - 0| < \varepsilon$ . Но это и значит, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . ◀

Аналогично, решению задачи 3, опираясь на определение предела последовательности, можно показать, что для пределов последовательностей выполняются все известные вам теоремы о пределах (только в их формулировках слово «функция» заменяется на слово «последовательность»).

**Задача 4** Найдите предел последовательности  $f(n) = \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{3n - 2}$ .

**Решение**

► Как и в задаче 1, вынесем в числителе и знаменателе за скобки наивысшую степень переменной, сократим числитель и знаменатель на  $n$ , а затем используем теоремы о пределах. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}}{n \left(3 - \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Ответ: 1. ◀

*Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

Рассмотрим одну из последовательностей, известных вам из курса алгебры, — геометрическую прогрессию (с первым членом  $a$  и знаменателем  $q$ ):

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad (a \neq 0, q \neq 0). \quad (1)$$

Если  $q \neq 1$ , то сумма первых ее  $n$  членов находится так:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

\* Напомним, что  $[x]$  — целая часть числа  $x$ .

Если  $|q| < 1$ , то прогрессию (1) называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Учитывая результат задачи 3 и теоремы о пределах последовательностей, получаем, что для бесконечно убывающей геометрической прогрессии при  $n \rightarrow +\infty$  существует предел последовательности  $S_n$  (так называемых частичных сумм):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-q} (1-q^n) \right) = \frac{a}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right) = \\ &= \frac{a}{1-q} (1-0) = \frac{a}{1-q}. \end{aligned}$$

Этот предел называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* (1), обозначают через  $S$  и пишут:

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q} \quad \text{при } |q| < 1. \quad (2)$$

Используя формулу (2), можно записывать значение бесконечной периодической дроби в виде обыкновенной дроби. Например, дробь

$$0,(18) = 0,181818 \dots = \frac{18}{100} + \frac{18}{100^2} + \frac{18}{100^3} + \dots$$

можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $a = \frac{18}{100}$

и знаменателем  $q = \frac{1}{100}$ . Тогда по формуле (2):

$$0,(18) = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{18}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{18}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

### 7.5. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$

Этот предел обычно называют *замечательным пределом* (точнее *первым замечательным пределом*), поскольку его часто приходится использовать при нахождении пределов тригонометрических функций.

**Теорема.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- **Доказательство.** Можно считать, что  $x$  принимает только положительные значения. Это следует из того, что функция  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  является четной функцией, так как  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$

Поскольку  $x \rightarrow 0$ , то, начиная с некоторого значения,  $x$  попадает в первую четверть. Поэтому можно считать, что  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ . На рисунке 74 изображена единичная окружность, на которой отложен угол в  $x$  радиан

и проведена линия тангенсов  $CD$ . Учитывая определения синуса и тангенса через единичную окружность, получаем  $AB = \sin x$ , а  $CD = \operatorname{tg} x$ . Сравним площади треугольников  $OBC$ ,  $ODC$  и сектора  $OBC$ . Они удовлетворяют неравенству

$$S_{\Delta OBC} \leq S_{\text{сект. } OBC} \leq S_{\Delta ODC}. \quad (1)$$

Поскольку

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2};$$

$$S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

а площадь кругового сектора  $OBC$  равна:  $S_{\text{сект. } OBC} = \frac{x}{2}$ , то, подставив эти значения в неравенство (1), получим:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Поскольку  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ , имеем  $\sin x > 0$  (и  $\cos x > 0$ ). Поэтому, разделив неравенство (2) на  $\sin x$ , получим:  $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ . Отсюда  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

(учитывая четность функций  $\cos x$  и  $\frac{\sin x}{x}$ , получаем, что это неравенство выполняется и при  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ).

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ , то по теореме о пределе промежуточной функции имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \circ$$

Кроме предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , часто используют некоторые его вариации.

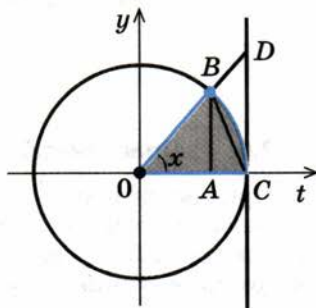


Рис. 74

**Задача 5** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ .

► Доказательство.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(\cos x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1. \quad \triangleleft$

**Задача 6** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ .

► Доказательство. Очевидно, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ . Действительно,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = 1.$$

Поскольку  $\alpha \rightarrow 0$ , то начиная с некоторого значения  $\alpha$  попадает в интервал  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  ( $\alpha \neq 0$ ). Обозначим  $\sin \alpha = x$ , тогда  $\alpha = \arcsin x$ . Если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $x = \sin \alpha \rightarrow 0$ . В этих обозначениях предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$  обращается в предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \triangleleft$$

**Задача 7** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ .

► **Доказательство.** Сначала рассмотрим предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку  $\alpha \rightarrow 0$ , то, начиная с некоторого значения,  $\alpha$  попадает в интервал  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  ( $\alpha \neq 0$ ). Обозначим  $\operatorname{tg} \alpha = x$ , тогда  $\alpha = \operatorname{arctg} x$ . Если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $x = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow 0$ . В этих обозначениях из предела  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1$  получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \triangleleft$$

## 7.6. Практическое вычисление предела функции

При вычислении предела функции обычно применяют не определение предела, а теоремы о пределах и приемы, которые мы использовали при нахождении пределов в приведенных выше задачах. Обобщим эти приемы, оформив результат в виде таблицы.

Таблица 13

Вычисление предела функции $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	
Основные этапы	Пример
1. Пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ , пытаемся подставить значение $x = a$ в $f(x)$ .	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x^2}{x - 1} = \frac{9 - 2^2}{2 - 1} = 5$
2. Если вычисляется предел при $x \rightarrow \infty$ , то пытаемся в числителе и знаменателе вынести за скобки наивысшую степень переменной.	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{9x^4 + 2x}}{x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} - \sqrt{9 + \frac{2}{x^3}} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{9 + \frac{2}{x^3}}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - \sqrt{9 + 0}}{1 - 0 + 0} = -3 \end{aligned}$

3. Если в результате подстановки $x = a$ получили выражение вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ , то:	
а) пытаемся разложить на множители числитель и знаменатель	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = 6$
б) если в числитель и знаменатель входят выражения с квадратным или кубическим корнями, то умножаем числитель и знаменатель на соответствующие выражения, чтобы избавиться от корней (иногда вводят замену: выражение с корнем обозначают новой переменной)	<p><u>1-й способ</u></p> $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x} + 2)}{x-4} =$ $= \lim_{x \rightarrow 4} (x+4)(\sqrt{x} + 2) = (4+4)(\sqrt{4} + 2) = 32$ <p><u>2-й способ.</u> Обозначим <math>\sqrt{x} = t</math>. Отсюда <math>x = t^2</math>. При <math>x \rightarrow 4</math> значение <math>t \rightarrow 2</math>. Тогда</p> $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t^2 - 4)(t^2 + 4)}{t - 2} =$ $= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t+2)(t^2 + 4)}{t - 2} =$ $= \lim_{t \rightarrow 2} (t+2)(t^2 + 4) = (2+2)(2^2 + 4) = 32$
в) если под знаком предела стоят тригонометрические или обратные тригонометрические функции, то такие пределы приводят к первому замечательному пределу или к его вариациям:	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x \cdot \arcsin 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right) \cdot 5x \cdot \cos 2x \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right) \cdot 3x}{\left(\frac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right) \cdot 7x \cdot \left(\frac{\arcsin 4x}{4x}\right) \cdot 4x}.$ <p>Сокращаем числитель и знаменатель на переменные, стоящие за скобками. Учитывая, что <math>\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1</math>, и воспользовавшись первым замечательным пределом и его вариациями, получаем, что искомый предел равен:</p> $\frac{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{15}{28}.$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$	

## Вопросы для контроля

1. Дайте определение предела функции в точке. Сформулируйте и докажите основные теоремы о пределе.
  2. Дайте определение бесконечно малой функции при  $x \rightarrow a$ . Сформулируйте и докажите свойства бесконечно малых функций.
  3. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции.
  4. Сформулируйте и докажите свойство предела промежуточной функции.
  5. Дайте определения правостороннего и левостороннего пределов функции  $f(x)$  в точке  $a$ .
  6. Сформулируйте и обоснуйте критерий существования предела.
  7. Сформулируйте определение непрерывной функции.  
Сформулируйте и обоснуйте свойства суммы, произведения и частного непрерывных в точке  $a$  функций.
  8. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах другие свойства непрерывных функций.
  9. В каком случае точка  $a$  называется точкой разрыва функции  $f(x)$ ?  
Проиллюстрируйте это понятие на графиках функций.
  10. Дайте определение предела функции на бесконечности и бесконечного предела функции. Приведите примеры.
  11. Дайте определение предела последовательности. Приведите примеры.
  12. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
  13. Пользуясь таблицей 13, предложите план вычисления следующих пределов:  
а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x}{x^3 + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^3 + 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ .
- Вычислите эти пределы.

## Упражнения

1. Пользуясь определением предела функции, докажите справедливость равенства:
  - 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3$ ;
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow 4} (8 - 2x) = 0$ ;
  - 3)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 36}{4x - 12} = 6$ ;
  - 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$ .
2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите справедливость равенства:
  - 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n + 7}{2n} = 4$ ;
  - 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n - 5}{3n} = 3$ .

3. Пользуясь теоремами о пределах, докажите, что:

- 1) многочлен  $P(x)$  является непрерывной функцией при всех значениях  $x$ ;
- 2) рациональная функция непрерывна при всех значениях  $x$ , для которых ее знаменатель не равен нулю.

4. В каких точках имеет разрыв функция (ответ обоснуйте):

$$1) f(x) = \frac{1}{x+3}; \quad 2) g(x) = \frac{1}{x^2-4}; \quad 3) \varphi(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}; \quad 4) \psi(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}?$$

5. Вычислите предел:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 3)$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x - 1}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 6x - 8}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ ;
- 6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ ;
- 7) (ВолГУ)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$ ;
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ ;
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ ;
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$ ;
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x}$ ;
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+7}}$ ;
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ;
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 4x}{2x^2}$ ;
- 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$ ;
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x \cdot \arcsin 2x}{\sin 3x \cdot \sin 5x}$ ;
- 17)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 3x^2 + 4x - 6}{7x^4 - 3x^3 - 5x + 1}$ .

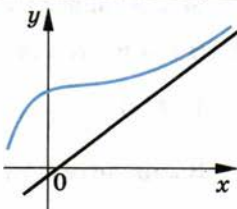
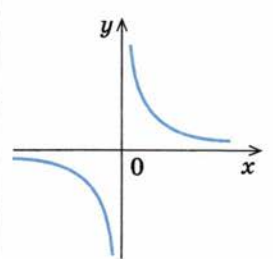
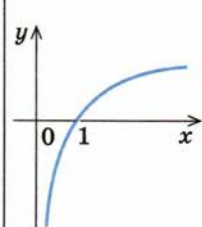
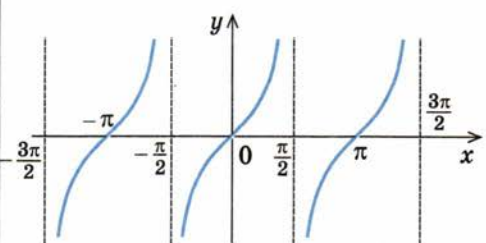
6. Решите неравенство методом интервалов:

- 1)  $\frac{x^2 - 2x + 1}{(2-x)x} \leq 0$ ;
- 2)  $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ ;
- 3) (МГУ, ИСАА)  $\frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{12+x-x^2}} \geq 0$ ;
- 4)  $\frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x^2 + x - 6}} \leq 0$ ;
- 5)  $\sqrt{x^2 - 3x - 4} > x - 2$ ;
- 6)  $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > x - 3$ ;
- 7) (ВолГУ)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1$ ;
- 8)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 3$ .



## § 8. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Таблица 14

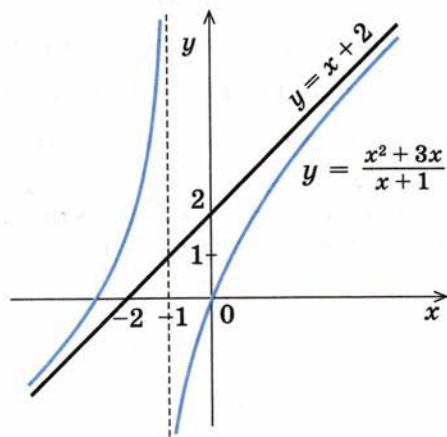
1. Понятие асимптоты		
<p>Асимптота кривой — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность.</p>		
2. Вертикальные асимптоты ( $x = a$ ) графика функции $y = f(x)$		
<p><math>x = a</math> — вертикальная асимптота, если при <math>x \rightarrow a</math> <math>f(x) \rightarrow \infty</math></p>		<p>Вертикальная асимптота <math>x = a</math> может быть в точке <math>a</math>, если точка <math>a</math> ограничивает открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции и вблизи точки <math>a</math> значения функции стремятся к бесконечности.</p>
Примеры вертикальных асимптот графиков функций		
$y = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y = \operatorname{tg} x$
<p><math>D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)</math>.          При <math>x \rightarrow +0</math> <math>y \rightarrow +\infty</math>;          при <math>x \rightarrow -0</math> <math>y \rightarrow -\infty</math>.  <math>x = 0</math> — вертикальная асимптота          (также <math>y = 0</math> — горизонтальная асимптота)</p>	<p><math>D(y) = (0; +\infty)</math>.          При <math>x \rightarrow +0</math> <math>y \rightarrow -\infty</math>.  <math>x = 0</math> — вертикальная асимптота</p>	<p><math>D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}</math>.          При <math>x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0</math> <math>y \rightarrow +\infty</math>;          при <math>x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0</math> <math>y \rightarrow -\infty</math>.  <math>x = \frac{\pi}{2}</math> — вертикальная асимптота  <math>(x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z})</math></p>
		

3. Наклонные и горизонтальные асимптоты ( $y = kx + b$ )

I. Если  $f(x)$  — дробно-рациональная функция, у которой степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна ей), то выделяем целую часть дроби и используем определение асимптоты

## Примеры

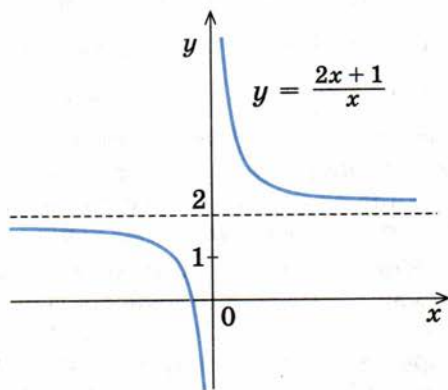
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1} = x + 2 - \frac{2}{x+1}.$$



При  $x \rightarrow \infty \frac{2}{x+1} \rightarrow 0$ , тогда  $f(x) \rightarrow x + 2$ .

Следовательно,  $y = x + 2$  — наклонная асимптота (также  $x = -1$  — вертикальная асимптота)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}.$$



При  $x \rightarrow \infty \frac{1}{x} \rightarrow 0$ , тогда  $f(x) \rightarrow 2$ .

Следовательно,  $y = 2$  — горизонтальная асимптота (также  $x = 0$  — вертикальная асимптота)

II. В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот  $y = kx + b$  можно получить с использованием формул:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

## Объяснение и обоснование

1. Понятие асимптоты. Если кривая  $y = f(x)$  имеет бесконечную ветвь, то асимптотой такой кривой называют прямую, к которой эта ветвь неограниченно приближается.

Другими словами, *асимптота кривой* — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность (то есть расстояние от точки  $(x, f(x))$  кривой до этой прямой стремится к нулю при движении ее вдоль ветви к бесконечности).

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными или наклонными.

Например, для графика функции  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 75) асимптотами будут оси координат, поскольку при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$  график функции приближается к прямой  $y = 0$ : ось  $Ox$  — *горизонтальная асимптота*.

А когда функция стремится к  $+\infty$  (или к  $-\infty$ ), то кривая приближается к прямой  $x = 0$ : ось  $Oy$  — *вертикальная асимптота*.

Если рассмотреть функцию  $y = x + \frac{1}{x}$ , то при  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ .

Вследствие этого график функции  $y = x + \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow \infty$  приближается к прямой  $y = x$ . Поэтому эта прямая будет *наклонной асимптотой* графика функции  $y = x + \frac{1}{x}$  (рис. 76) (график этой функции имеет также и вертикальную асимптоту  $x = 0$ ). Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту, поэтому не у каждого графика функции будет асимптота. Но исследование функции на наличие у ее графика асимптот позволяет уточнить свойства функции и поведение ее графика.

**2. Вертикальные асимптоты.** Если прямая  $x = a$  — вертикальная асимптота, то по определению около точки  $a$  кривая должна иметь бесконечную ветвь, то есть предел данной функции при  $x \rightarrow a$  (слева или справа) должен равняться бесконечности ( $\infty$ ). Исходя из непрерывности элементарных функций, которые рассматривались в школьном курсе математики, такими точками могут быть только точки, ограничивающие открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции.

Например, у функции  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  область определения ( $x \neq 1$ ) имеет разрыв в точке  $x = 1$  (область определения:  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$  и точка 1 ограничивает открытые промежутки области определения). Поэтому можно предположить, что прямая  $x = 1$  будет вертикальной асимптотой. Для того чтобы убедиться в этом, необходимо проверить, будет ли функция стре-

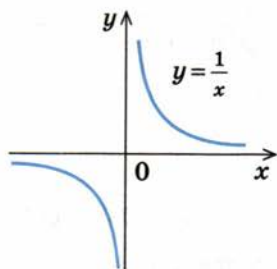


Рис. 75

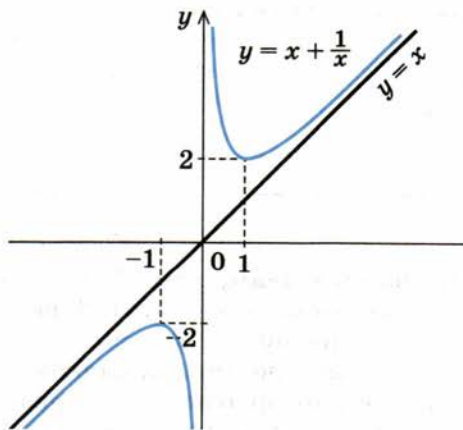


Рис. 76

миться к бесконечности около точки 1 (слева или справа). Для этого рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty. \text{ Аналогично } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

Таким образом, прямая  $x = 1$  является вертикальной асимптотой, поскольку при стремлении функции к бесконечности ее график неограниченно приближается к прямой  $x = 1$  (рис. 77, а).

Отметим, что не всегда в точке разрыва области определения функция будет иметь вертикальную асимптоту. Например, функция  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  имеет область определения  $x \neq 0$ . Поэтому прямая  $x = 0$  «подозрительна» на вертикальную асимптоту. Но  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Аналогично  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ . Следовательно, около прямой  $x = 0$  функция  $f(x)$  не стремится к бесконечности, и поэтому прямая  $x = 0$  не является асимптотой графика данной функции (рис. 77, б).

**3. Наклонные и горизонтальные асимптоты** довольно просто находятся для графиков дробно-рациональных функций, у которых степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна степени знаменателя). Для этого достаточно выделить целую часть заданной дроби и использовать определение асимптоты.

Например, еще раз рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .

Выделим целую часть:  $f(x) = \frac{(x^2-1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ .

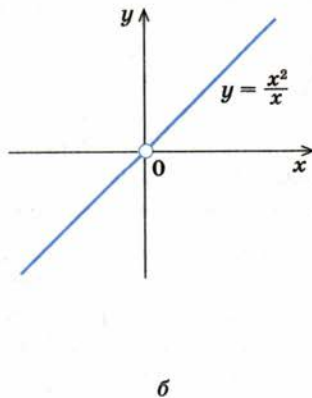
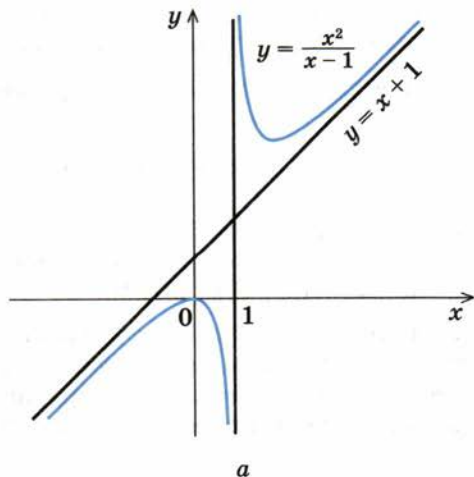


Рис. 77

При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ , то есть график нашей функции будет неограниченно приближаться к прямой  $y = x + 1$  при  $x \rightarrow \infty$ . Из этого следует, что наклонной асимптотой графика данной функции<sup>1</sup> будет прямая  $y = x + 1$  (рис. 77).

Рассмотрим, как находятся наклонные и горизонтальные асимптоты в общем случае.

● Пусть наклонной (или горизонтальной) асимптотой графика функции  $y = f(x)$  является прямая  $y = kx + b$ . По определению асимптоты при  $x \rightarrow \infty$  график функции  $f(x)$  неограниченно приближается к прямой  $y = kx + b$ . Другими словами, при  $x \rightarrow \infty$  с любой точностью будет выполняться равенство

$$f(x) \approx kx + b. \quad (1)$$

Это равенство не нарушится, если обе его части разделить на  $x \neq 0$ . По-

лучим:  $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{b}{x}$ .

При  $x \rightarrow \infty$  отношение  $\frac{b}{x} \rightarrow 0$ , поэтому отношение  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow k$  при  $x \rightarrow \infty$ . То есть

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (2)$$

Возвращаясь к формуле (1), получаем, что при  $x \rightarrow \infty$   $b \approx f(x) - kx$ , то есть

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (3)$$

Полученные формулы (2) и (3) дают возможность находить наклонные и горизонтальные асимптоты для графика любой функции  $y = f(x)$  (при условии, что они существуют).

Отметим, что если у графика функции  $f(x)$  есть горизонтальная асимптота, то ее уравнение будет  $y = b$  (в этом случае  $k = 0$ ). Но при  $k = 0$  из формулы (3) получаем  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Следовательно, если существует число

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , то график функции  $y = f(x)$  имеет горизонтальную асимптоту  $y = b$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно рассмотреть более общее определение наклонной и горизонтальной асимптоты.

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на интервале  $(M; +\infty)$ , где  $M$  — некоторое число. Прямую  $l — y = kx + b$  называют асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если выполняется условие  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ .

Последнее равенство означает, что расстояние от точки  $A(x; f(x))$  кривой до точки  $B(x; kx + b)$  прямой стремится к нулю (тогда и расстояние от точки  $A$  до прямой  $l$  стремится к нулю), но при таком определении кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке.

<sup>1</sup> Построение графиков таких функций рассмотрено в § 6.

Например, для функции  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  получаем, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

Следовательно, прямая  $y = 0$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  (рис<sup>1</sup>. 78).

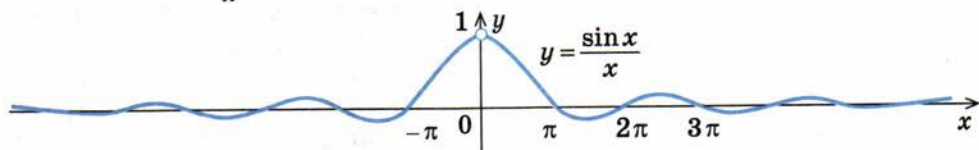


Рис. 78

**Задача 1** Пользуясь общими формулами, найдите наклонную асимптоту графика функции  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .

Решение

► Будем искать наклонную асимптоту в виде  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  находятся по формулам (2) и (3):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Асимптотой графика данной функции будет прямая  $y = kx + b$ , то есть прямая  $y = x + 1$ . ◀

**Задача 2** Найдите асимптоты графика функции  $f(x) = \sqrt{x^4 + 9} - x^2$ .

Решение

► Область определения функции:  $x$  — любое действительное число. То есть  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  (или  $D(f) = \mathbf{R}$ ). На всей области определения эта функция непрерывна, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет. Будем искать наклонные и горизонтальные асимптоты в виде  $y = kx + b$ . Тогда

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 9} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^4 + 9} - x^2)(\sqrt{x^4 + 9} + x^2)}{x(\sqrt{x^4 + 9} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 9 - x^4}{x(\sqrt{x^4 + 9} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x(\sqrt{x^4 + 9} + x^2)} = 0; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> На рисунке 78 масштаб по осям  $Ox$  и  $Oy$  различный.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 9} - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^4 + 9} - x^2)(\sqrt{x^4 + 9} + x^2)}{\sqrt{x^4 + 9} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 9 - x^4}{\sqrt{x^4 + 9} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{x^4 + 9} + x^2} = 0.$$

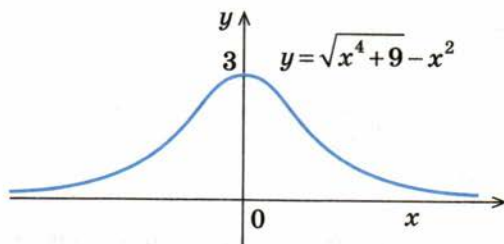


Рис. 79

Поэтому заданная функция имеет только горизонтальную асимптоту  $y = 0$  ( $y = 0 \cdot x + 0$ ) (рис. 79).  $\triangleleft$

Отметим, что иногда график функции  $y = f(x)$  может иметь разные асимптоты при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ . Поэтому при использовании формул (2) и (3) иногда приходится отдельно находить значения  $k$  и  $b$  при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ .

### Вопросы для контроля

1. Объясните смысл понятия «асимптота кривой».
2. Приведите примеры графиков функций, имеющих вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Объясните, почему соответствующие прямые являются асимптотами.
3. Обоснуйте формулы для нахождения коэффициентов горизонтальных и наклонных асимптот ( $y = kx + b$ ) графика функции  $y = f(x)$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

### Упражнения

Найдите асимптоты графиков функций (если они существуют) (1–4).

1. 1)  $y = \frac{3}{x}$ ;      2)  $y = 4 - \frac{1}{x-3}$ ;      3)  $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ ;      4)  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .
2. 1)  $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ ;      2)  $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ ;      3)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ ;      4)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$ .
3. 1)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;      2)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ;      3)  $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2}$ ;      4)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ .
4. 1)  $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$ ;      2)  $y = \sqrt{x^2+3x+2}$ ;      3)  $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$ ;      4)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ .

## § 9.

ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Таблица 15

1. Формулы производных обратных тригонометрических функций	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
2. Доказательство тождеств с помощью производной	
Условие постоянства функции	
Функция $f(x)$ является постоянной ( $f(x) = C$ ) на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала (а если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ , то $f(x) = C$ на $[a; b]$ ).	
Схема доказательства тождеств вида $\varphi(x) = g(x)$ с помощью производной	Пример
	Доказать, что $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leq x \leq 1$ .
<p>1. Рассмотреть вспомогательную функцию <math>(x) = \varphi(x) - g(x)</math> (на ее области определения или заданном интервале).</p> <p>2. Проверить, что <math>f'(x) = 0</math> на этом интервале.</p> <p>3. Исходя из условия постоянства функции, сделать вывод, что функция <math>f(x) = C</math> на рассматриваемом интервале.</p> <p>4. Чтобы найти постоянную <math>C</math>, нужно подставить вместо <math>x</math> любое значение <math>x_0</math> из рассматриваемого интервала и доказать, что <math>C = f(x_0) = 0</math>.</p> <p>5. Сделать следующий вывод: поскольку <math>f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0</math>, то <math>\varphi(x) = g(x)</math>.</p>	<p>► Рассмотрим функцию</p> $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x.$ <p>Ее область определения <math>D(f) = [-1; 1]</math>. На интервале <math>(-1; 1)</math></p> $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$ <p>Тогда по условию постоянства функции получаем, что <math>f(x) = C</math> при всех значениях <math>x</math> из интервала <math>(-1; 1)</math>, а с учетом того, что функция <math>f(x)</math> непрерывна на своей области определения, и при всех значениях <math>x</math> из отрезка <math>[-1; 1]</math>. Чтобы найти значение <math>C</math>, подставим в равенство <math>f(x) = C</math> вместо <math>x</math>, например, значение <math>x = 0</math>. Получаем:</p> $C = f(0) = \arccos 0 - \frac{\pi}{2} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0.$ <p>Значит, при всех значениях <math>x</math> из отрезка <math>[-1; 1]</math> <math>f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x = 0</math>.</p> <p>Отсюда <math>\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x</math> при <math>-1 \leq x \leq 1</math>. ◁</p>



## Объяснение и обоснование

**1. Формулы производных обратных тригонометрических функций** докажем, используя определение этих функций (существование их производных примем без доказательства).

- Например, если  $y = \arcsin x$ , то согласно определению арксинуса  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\sin y = x$ . Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную  $\sin y$  как производную сложной функции.

Получаем  $(\sin y)' = x'$ , то есть  $\cos y \cdot y' = 1$ . Отсюда  $y' = \frac{1}{\cos y}$ .

Но  $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$ . Учитывая, что  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , где  $\cos y \geq 0$ ,

получаем  $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ . Тогда при  $-1 < x < 1$  (в этом случае  $1 - x^2 \neq 0$

и  $1 - x^2 > 0$ ) имеем  $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ . Поэтому при  $-1 < x < 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \circ$$

- Аналогично, если  $y = \arccos x$ , то согласно определению арккосинуса  $y \in [0; \pi]$  и  $\cos y = x$ . Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную  $\cos y$  как производную сложной функции.

Получаем  $(\cos y)' = x'$ , то есть  $(-\sin y) \cdot y' = 1$ . Отсюда  $y' = -\frac{1}{\sin y}$ . Но

$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$ . Учитывая, что  $y \in [0; \pi]$ , где  $\sin y \geq 0$ ,

получаем  $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ . Тогда при  $-1 < x < 1$  (в этом случае  $1 - x^2 \neq 0$

и  $1 - x^2 > 0$ ) имеем  $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ . Поэтому при  $-1 < x < 1$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \circ$$

- Найдем производную функции  $y = \operatorname{arctg} x$ . По определению арктангенса  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\operatorname{tg} y = x$ . После дифференцирования последнего равенства

получаем  $(\operatorname{tg} y)' = x'$ , то есть  $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$ . Отсюда  $y' = \cos^2 y$ . Но

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}. \quad \text{Тогда } \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно, при любых значениях  $x$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad \circ$$

- Аналогично, если  $y = \operatorname{arcctg} x$ , то согласно определению арккотангенса  $y \in (0; \pi)$  и  $\operatorname{ctg} y = x$ . После дифференцирования последнего равенства

получаем  $(\operatorname{ctg} y)' = x'$ , то есть  $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$ . Отсюда  $y' = -\sin^2 y$ . Но

$$1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}. \text{ Тогда } \sin^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно, при любых значениях  $x$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad \circ$$

**2. Доказательства тождеств с помощью производной.** В пункте 6.1 рассмотрено условие постоянства функции: если на некотором интервале  $(a; b)$   $f'(x) = 0$  во всех точках этого интервала, то функция  $f(x)$  постоянна на этом интервале. Если функция  $f(x)$  также непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она постоянна и на отрезке  $[a; b]$ .

Это условие можно использовать для доказательства некоторых тождеств.

**Задача 1** Докажите тождество  $2 \operatorname{arccos} x = \operatorname{arccos}(2x^2 - 1)$ , где  $0 \leq x \leq 1$ .

Решение

▶ Рассмотрим вспомогательную функцию  $f(x) = 2 \operatorname{arccos} x - \operatorname{arccos}(2x^2 - 1)$  и найдем ее производную при  $0 < x < 1$ :

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

По условию постоянства функции получаем, что  $f(x) = C$  при всех значениях  $x$  из интервала  $(0; 1)$ , а учитывая, что функция  $f(x)$  непрерывна на своей области определения, — и при всех  $x$  из отрезка  $[0; 1]$ . Чтобы найти  $C$ , отметим, что равенство  $f(x) = C$  выполняется тождественно, то есть при любом значении  $x$ . Подставляя в это равенство  $x = 0$ , получаем:

$$C = f(0) = 2 \operatorname{arccos} 0 - \operatorname{arccos}(-1) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = 0. \text{ Поэтому } C = 0 \text{ и, значит, } f(x) = 0,$$

то есть  $2 \operatorname{arccos} x - \operatorname{arccos}(2x^2 - 1) = 0$  или  $2 \operatorname{arccos} x = \operatorname{arccos}(2x^2 - 1)$ . ◁

Приведенное решение позволяет предложить следующую схему доказательства тождеств вида  $\varphi(x) = g(x)$  с помощью производной.

1. Рассмотреть вспомогательную функцию  $f(x) = \varphi(x) - g(x)$  (на ее области определения или на заданном интервале).
2. Проверить, что  $f'(x) = 0$  на этом интервале.
3. Пользуясь признаком постоянства функции, сделать вывод, что  $f(x) = C$  на рассмотренном интервале (если функция  $f(x)$  также непрерывна на отрезке, содержащем концы рассмотренного интервала, то  $f(x) = C$  на этом отрезке).
4. Чтобы найти  $C$ , подставляем вместо  $x$  любое значение  $x_0$  из рассмотренного промежутка и доказываем, что  $C = f(x_0) = 0$ .
5. Сделать вывод: поскольку  $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$ , то  $\varphi(x) = g(x)$ .

Пример использования этой схемы приведен в пункте 2 таблицы 15 на с. 143.

## Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций:  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ .
2. Обоснуйте формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций.
3. Объясните на примере схему использования производной для доказательства тождеств.

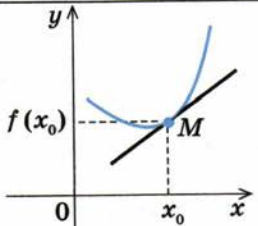
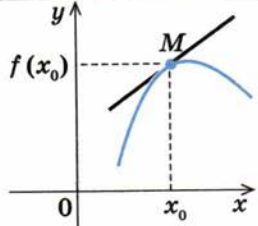
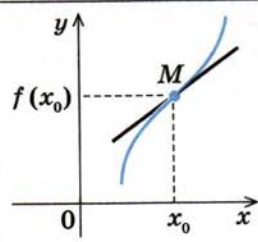
## Упражнения

1. Найдите производную функции:
  - 1)  $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$ ;
  - 2)  $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$ ;
  - 3)  $f(x) = x^4 \arcsin 2x$ ;
  - 4)  $f(x) = \arcsin 3x + \arccos 4x$ ;
  - 5)  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ;
  - 6)  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$ .
2. Запишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:
  - 1)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 1$ ;
  - 2)  $f(x) = \arcsin 2x$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
3. Докажите тождество, используя производную:
  - 1)  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ ;
  - 2)  $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  при  $-1 \leq x < 0$ ;
  - 3)  $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ,  $0 < x \leq 1$ ;
  - 4)  $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $-1 < x < 1$ ;
  - 5)  $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ ,  $-1 < x < 1$ ;
  - 6)  $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ ,  $x \geq 1$ ;
  - 7)  $(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$ .

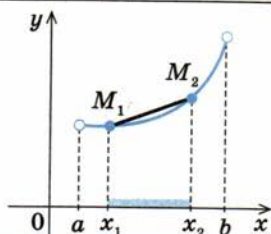
## § 10.

## ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПОНЯТИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

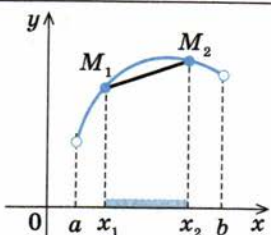
Таблица 16

1. Понятие второй производной		
Понятие	Запись	Пример
<p>Пусть функция <math>y = f(x)</math> имеет производную <math>f'(x)</math> во всех точках некоторого промежутка. Эта производная, в свою очередь, является функцией аргумента <math>x</math>. Если функция <math>f'(x)</math> дифференцируема, то ее производную называют <i>второй производной</i> функции <math>f(x)</math> и обозначают <math>f''(x)</math> (или <math>y''</math>)</p>	$y = f(x),$ $y' = f'(x),$ $y'' = (f'(x))' = (y)'$	$y = x^5,$ $y' = 5x^4,$ $y'' = (5x^4)' = 20x^3.$
2. Понятие выпуклости и точек перегиба дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции		
	<p>Функция <math>f(x)</math> называется <i>выпуклой вниз</i> на интервале <math>(a; b)</math>, если для любой точки <math>x_0</math> из этого интервала при всех <math>x \in (a; b)</math> и <math>x \neq x_0</math> <b>график функции лежит выше касательной к этому графику в точке <math>(x_0; f(x_0))</math>.</b></p>	
	<p>Функция <math>f(x)</math> называется <i>выпуклой вверх</i> на интервале <math>(a; b)</math>, если для любой точки <math>x_0</math> из этого интервала при всех <math>x \in (a; b)</math> и <math>x \neq x_0</math> <b>график функции лежит ниже касательной к этому графику в точке <math>(x_0; f(x_0))</math>.</b></p>	
	<p>Точка <math>M</math> графика непрерывной функции <math>f(x)</math>, в которой существует касательная и при переходе через которую <b>кривая меняет направление выпуклости</b>, называется <i>точкой перегиба графика функции</i>. В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую.</p> <p>Абсциссу <math>x_0</math> точки <math>M</math> перегиба графика функции <math>f(x)</math> называют <i>точкой перегиба функции <math>f(x)</math></i>. Точка <math>x_0</math> разделяет интервалы выпуклости функции.</p>	

## 3. Свойство графиков выпуклых функций



Если функция  $f(x)$  **выпукла вниз** на интервале  $(a; b)$  и точки  $M_1$  и  $M_2$  являются точками ее графика на этом интервале, то на интервале  $(x_1; x_2)$  график функции  $y = f(x)$  лежит ниже отрезка  $M_1M_2$ , то есть **график лежит ниже хорды**.



Если функция  $f(x)$  **выпукла вверх** на интервале  $(a; b)$  и точки  $M_1$  и  $M_2$  являются точками ее графика на этом интервале, то на интервале  $(x_1; x_2)$  график функции  $y = f(x)$  лежит выше отрезка  $M_1M_2$ , то есть **график лежит выше хорды**.

4. Достаточные условия выпуклости функции, имеющей вторую производную на заданном интервале  $(a; b)$ 

Условие выпуклости вниз

Условие выпуклости вверх

Если на интервале  $(a; b)$  дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет положительную вторую производную (то есть  $f''(x) > 0$  при всех  $x \in (a; b)$ ), то ее **график на интервале  $(a; b)$  направлен выпуклостью вниз**.

Если на интервале  $(a; b)$  дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет отрицательную вторую производную (то есть  $f''(x) < 0$  при всех  $x \in (a; b)$ ), то ее **график на интервале  $(a; b)$  направлен выпуклостью вверх**.

## 5. Нахождение точек перегиба функции, имеющей вторую производную на заданном интервале

Необходимое условие

Достаточное условие

**В точках перегиба функции  $f(x)$  ее вторая производная равна нулю или не существует.**

Пусть функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(a; b)$  вторую производную. Тогда, если  $f''(x)$  меняет знак при переходе через  $x_0$ , где  $x_0 \in (a; b)$ , то  $x_0$  — **точка перегиба функции  $f(x)$** .

$x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$

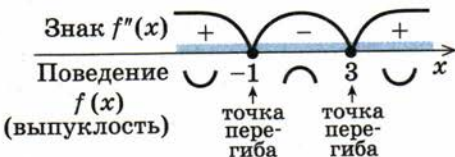
⇒

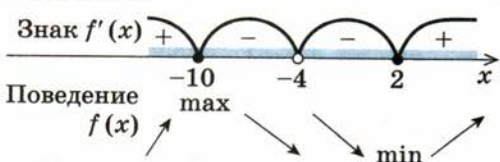
$f''(x_0) = 0$   
или  $f''(x_0)$   
не существует

В точке  $x_0$  знак  $f''(x)$  меняется с «+» на «-» или с «-» на «+»

⇒

$x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$

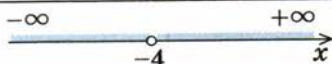
6. Исследование функции $y = f(x)$ на выпуклость и точки перегиба	
Схема	Пример
1. Найти область определения функции.	Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ на выпуклость и точки перегиба. ▶ 1. Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$ . Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения (как многочлен).
2. Найти вторую производную.	2. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$ . $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$ .
3. Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует.	3. $f''(x)$ существует и непрерывна на всей области определения функции $f(x)$ . $f''(x) = 0; 12(x^2 - 2x - 3) = 0; x_1 = -1, x_2 = 3$ .
4. Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.	4. 
5. Записать нужный результат исследования (интервалы и характер выпуклости и точки перегиба).	5. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ график функции направлен выпуклостью вниз ( $f''(x) > 0$ ), а на интервале $(-1; 3)$ — выпуклостью вверх ( $f''(x) < 0$ ). Точки перегиба: $x = -1$ и $x = 3$ (в этих точках $f''(x)$ меняет знак). ◁
7. Расширенная схема исследования функции для построения ее графика	
Схема	Пример
1. Найти область определения функции.	Постройте график функции $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$ . ▶ 1. Область определения: $x \neq -4$ . (то есть $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$ ).

2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической*).	2. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ , и не периодическая.
3. Точки пересечения графика с осями координат (если их можно найти).	3. На оси $Oy$ значение $x = 0$ , тогда $y = 0$ . На оси $Ox$ значение $y = 0$ : $\frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$ , $x^2 - 5x = 0$ , $x(x - 5) = 0$ . Тогда $x = 0$ , $x = 5$ — абсциссы точек пересечения графика с осью $Ox$ .
4. Производная и критические точки функции.	4. $f'(x) = \frac{(2x - 5)(x + 4) - (x^2 - 5x)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x + 4)^2}$ . Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ . Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения. $f'(x) = 0$ . При $x \neq -4$ имеем $x^2 + 8x - 20 = 0$ , $x_1 = 2$ , $x_2 = -10$ — критические точки.
5. Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума (и значения функции в этих точках).	<p>5. Отметим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (см. рисунок).</p>  <p>Следовательно, функция возрастает на каждом из промежутков <math>(-\infty; -10]</math> и <math>[2; +\infty)</math> и убывает на промежутках <math>[-10; -4]</math> и <math>(-4; 2]</math>. Так как в критической точке <math>(-10)</math> производная меняет знак с «+» на «-», то <math>x = -10</math> — точка максимума. В критической точке <math>2</math> производная меняет знак с «-» на «+», поэтому <math>x = 2</math> — точка минимума. Итак,</p> <p><math>x_{\max} = -10</math>, тогда <math>y_{\max} = f(-10) = -25</math>;  <math>x_{\min} = 2</math>, тогда <math>y_{\min} = f(2) = -1</math>.</p>

\* Чаще всего периодичность устанавливают для тригонометрических функций. В рассмотренном примере функция не может быть периодической, так как ограничения области определения не повторяются.

Продолж. табл. 16

6. Поведение функции на концах промежутков области определения и асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные).



При  $x \rightarrow -4$  слева  $f(x) \rightarrow \left(\frac{36}{-0}\right) \rightarrow -\infty$ ,

а при  $x \rightarrow -4$  справа  $f(x) \rightarrow \left(\frac{36}{+0}\right) \rightarrow +\infty$

(то есть  $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = +\infty$ ).

Следовательно, прямая  $x = -4$  — *вертикальная симптота*.

Так как

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4} = \frac{x(x + 4) - 9(x + 4) + 36}{x + 4} = x - 9 + \frac{36}{x + 4},$$

то при  $x \rightarrow \infty$   $\frac{36}{x + 4} \rightarrow 0$ , тогда  $f(x) \rightarrow x - 9$ , то есть прямая  $y = x - 9$  — *наклонная асимптота*.

7. Вторая производная и исследование функции на выпуклость и точки перегиба (и значения функции в этих точках).

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(2x + 8)(x + 4)^2 - 2(x + 4)(x^2 + 8x - 20)}{(x + 4)^4} = \frac{72}{(x + 4)^3}.$$

Поскольку  $f''(x) \neq 0$ , то знак второй производной может меняться только в точке  $x = -4$ . Получаем такие знаки второй производной и соответствующий характер выпуклости (см. рисунок).

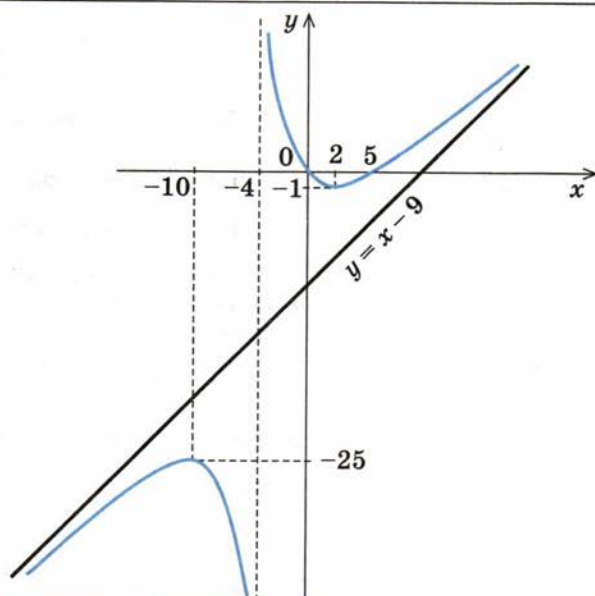


8. Найти координаты дополнительных точек графика функции (если нужно уточнить его поведение).

$x$	-7	-2
$y$	-28	7



9. На основании проведенного исследования построить график функции.



### Объяснение и обоснование

**1. Вторая производная и производные высших порядков.** Если функция  $y = f(x)$  имеет производную  $f'(x)$  во всех точках некоторого промежутка, то эту производную можно рассматривать как функцию от аргумента  $x$ . Если функция  $f'(x)$  является дифференцируемой, то ее производную называют *второй производной* от  $f(x)$  и обозначают  $f''(x)$  (или  $y''$ ).

Например, если  $f(x) = 2x - \sin x$ , то  $f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x$ , тогда  $f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x$ .

По аналогии со второй производной определяют и производные высших порядков. Производную от второй производной функции  $f(x)$  называют *третьей производной*, или *производной третьего порядка* этой функции, и т. д. Таким образом, *производной  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  называют производную от производной  $(n-1)$ -го порядка этой функции*. Производную  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  обозначают  $f^{(n)}(x)$ .

Например, если  $f(x) = x^5$ , то  $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$ ;  $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$ ;  
 $f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$ ;  $f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x$ ;  $f^{(5)}(x) = (120x)' = 120$ ;  
 $f^{(6)}(x) = (120)' = 0$ .

**2. Выпуклость функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a; b)$ , а в точке  $x_0 \in (a; b)$  имеет конечную производную. Тогда к графику этой

\* Четвертую, пятую и шестую производные функции  $f(x)$  часто обозначают соответственно так:  $f^{IV}(x)$ ,  $f^V(x)$ ,  $f^{VI}(x)$ .

функции в точке  $M(x_0; f(x_0))$  можно провести касательную. В зависимости от расположения графика функции относительно касательной функцию называют *выпуклой вниз*, если график расположен выше касательной (рис. 80), или *выпуклой вверх*, если график расположен ниже касательной (рис. 81). Соответственно и сам график в первом случае называют *выпуклым вниз*, а во втором — *выпуклым вверх*. Приведем соответствующие определения и свойства для функции  $f(x)$ , определенной и дифференцируемой дважды на интервале  $(a; b)$ .

**Функция  $f(x)$  называется выпуклой вниз на интервале  $(a; b)$ , если для любой точки  $x_0$  из этого интервала при всех  $x \in (a; b)$  и  $x \neq x_0$  график функции лежит выше касательной к этому графику в точке  $(x_0; f(x_0))$ .**

**Функция  $f(x)$  называется выпуклой вверх на интервале  $(a; b)$ , если для любой точки  $x_0$  из этого интервала при всех  $x \in (a; b)$  и  $x \neq x_0$  график функции лежит ниже касательной к этому графику в точке  $(x_0; f(x_0))$ .**

Отметим, что на интервале, где функция  $f(x)$  является выпуклой вниз, ее производная  $f'(x)$  возрастает. Действительно, как видно из рисунка 80, при возрастании аргумента  $x$  величина угла  $\varphi$ , который касательная к графику функции  $f(x)$  образует с положительным направлением оси  $Ox$ , возрастает, принимая значения между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$  также возрастает.

На интервале, где функция  $f(x)$  является выпуклой вверх, ее производная  $f'(x)$  убывает. Действительно, как видно из рисунка 81, при возрастании аргумента  $x$  величина угла  $\varphi$ , который касательная к графику функции  $f(x)$  образует с положительным направлением оси  $Ox$ , убывает, принимая значения между  $\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$  также убывает.

Можно доказать, что имеют место и обратные утверждения.

1. Если производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  возрастает на интервале  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  является выпуклой вниз на этом интервале.
2. Если производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  убывает на интервале  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  является выпуклой вверх на этом интервале.

Эти свойства позволяют сформулировать *достаточные условия выпуклости функции (и графика функции)*.

1. Если на интервале  $(a; b)$  дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет положительную вторую производную (то есть  $f''(x) > 0$  при всех  $x \in (a; b)$ ), то ее график на интервале  $(a; b)$  направлен выпуклостью вниз.

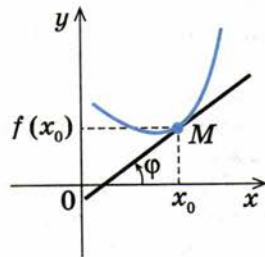


Рис. 80

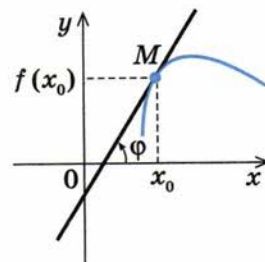


Рис. 81

2. Если на интервале  $(a; b)$  дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет отрицательную вторую производную (то есть  $f''(x) < 0$  при всех  $x \in (a; b)$ ), то ее график на интервале  $(a; b)$  направлен выпуклостью вверх.

Действительно, пусть, например,  $f''(x) > 0$  при всех  $x \in (a; b)$ . Если рассматривать  $f'(x)$  как функцию от  $x$ , то  $f''(x)$  является производной этой функции ( $f''(x) = (f'(x))'$ ). Тогда, имея положительную производную, функция  $f'(x)$  возрастает на интервале  $(a; b)$ . Следовательно, по свойству 1 функция  $f(x)$  является выпуклой вниз на этом интервале, а значит, и ее график будет выпуклым вниз на интервале  $(a; b)$ . Аналогично обосновывается и второе достаточное условие.

Отметим, что эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми. Например, функция  $y = x^4$  выпуклая вниз на всей числовой прямой (рис. 82), хотя в точке  $x = 0$  ее вторая производная  $y'' = 12x^2$  равна нулю.

Обратим внимание, что в случае, когда функция  $f(x)$  выпуклая вниз на интервале  $(a; b)$ , и точки  $M_1$  и  $M_2$  являются точками ее графика на этом интервале (рис. 83), то на интервале  $(x_1; x_2)$ , где  $a < x_1 < x_2 < b$ , график функции  $y = f(x)$  лежит ниже отрезка  $M_1M_2$ . Этот отрезок по аналогии с отрезком, соединяющим две точки дуги окружности, часто называют хордой кривой. Следовательно, в этом случае на интервале  $(x_1; x_2)$  график лежит ниже хорды.

Если функция  $f(x)$  выпуклая вверх на интервале  $(a; b)$  и точки  $M_1$  и  $M_2$  являются точками ее графика на этом интервале (рис. 84), то на интервале  $(x_1; x_2)$ , где  $a < x_1 < x_2 < b$ , график функции  $y = f(x)$  лежит выше отрезка  $M_1M_2$ , то есть график лежит выше хорды.

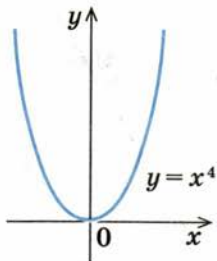


Рис. 82

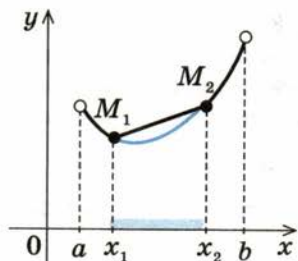


Рис. 83

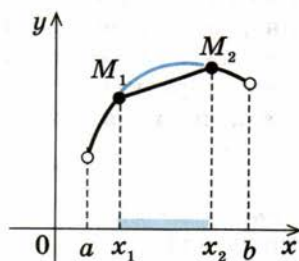


Рис. 84

### 3. Точки перегиба

Точка  $M$  графика непрерывной функции  $f(x)$ , в которой существует касательная и при переходе через которую кривая изменяет направление выпуклости, называется *точкой перегиба графика функции*.

Учитывая определения выпуклости функции вверх и выпуклости функции вниз (с. 153), получаем, что касательная к графику функции по одну сторону от точки касания расположена выше графика, а по другую сторону — ниже графика, то есть в точке перегиба касательная пересекает

кривую (рис. 85), а сам график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Отметим, что абсциссу  $x_0$  точки перегиба графика функции  $f(x)$  называют *точкой перегиба функции*. Тогда  $x_0$  является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз функции  $f(x)$ .

Точки перегиба дважды дифференцируемой функции можно находить с помощью ее второй производной. Приведем *достаточное условие существования точки перегиба*.

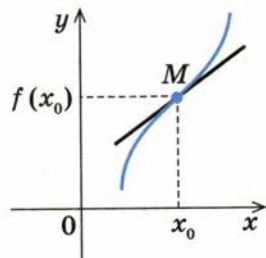


Рис. 85

Пусть функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(a; b)$  вторую производную. Тогда, если  $f''(x)$  меняет знак при переходе через  $x_0$ , где  $x_0 \in (a; b)$ , то  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$ .

- Действительно, если функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(a; b)$  вторую производную, то она имеет на этом интервале и первую производную. Следовательно, функция  $f(x)$  непрерывна на заданном интервале и существует касательная к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$ . Пусть  $f''(x) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) > 0$  при  $x > x_0$  (на заданном интервале). Тогда, используя достаточные условия выпуклости функции, получаем, что при  $x < x_0$  график функции  $f(x)$  направлен выпуклостью вверх, а при  $x > x_0$  график направлен выпуклостью вниз. Таким образом, точка  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f(x)$ . Аналогично рассматривается и случай, когда  $f''(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) < 0$  при  $x > x_0$ . И в этом случае  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f(x)$ . ○

Для нахождения промежутков выпуклости функции и точек ее перегиба следует учесть следующее.

- Пусть функция  $f(x)$  задана на интервале  $(a; b)$  и в каждой точке этого интервала имеет вторую производную  $f''(x)$ , которая является непрерывной функцией на заданном интервале. Если для точки  $x_0$  из этого интервала  $f''(x_0) > 0$ , то, учитывая непрерывность функции  $f''(x)$ , получаем, что в некоторой  $\delta$ -окрестности этой точки вторая производная также будет положительной. То есть для всех  $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  значения  $f''(x) > 0$ . Но тогда в интервале  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  функция  $f(x)$  направлена выпуклостью вниз и точка  $x_0$  не может быть точкой перегиба функции  $f(x)$ . Аналогично, если  $f''(x_0) < 0$ , то в некоторой окрестности точки  $x_0$  функция  $f(x)$  направлена выпуклостью вверх и точка  $x_0$  не может быть точкой перегиба функции  $f(x)$ . Следовательно, в рассмотренном случае точкой перегиба может быть только та точка  $x_0$ , в которой вторая производная равна нулю. Получаем *необходимое условие существования точек перегиба* (для дважды дифференцируемой функции):

*если функция  $f(x)$  задана на интервале  $(a; b)$ , в каждой точке этого интервала имеет вторую производную  $f''(x)$ , которая является непрерывной функцией на заданном интервале, и имеет точку перегиба  $x_0$ , то  $f''(x_0) = 0$ .* ○

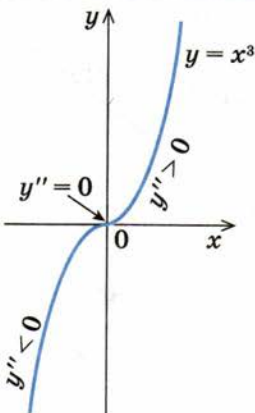


Рис. 86

Например, функция  $y = x^3$  (рис. 86) имеет точку перегиба  $x = 0$ , в которой ее вторая производная равна нулю. Действительно,  $y' = 3x^2$ ,  $y'' = 6x$ ,  $y''(0) = 0$ . При  $x > 0$  значение  $y''(x) > 0$ : график направлен выпуклостью вниз; при  $x < 0$  значение  $y''(x) < 0$ : график направлен выпуклостью вверх. Следовательно,  $0$  — точка перегиба функции.

Отметим, что *точка перегиба функции  $f(x)$  может быть и в той точке  $x_0$ , в которой  $f''(x_0)$  не существует* (но  $f'(x_0)$  существует).

Например, функция  $y = x\sqrt[3]{x^2}$  (рис. 87) определена на всей числовой прямой, имеет перегиб в точке  $0$ , в которой существует ее первая производная  $y' = (\sqrt[3]{x^5})' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$  ( $y'(0) = 0$ ), но не существует вторая производная

$$y'' = \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$

( $y''(0)$  не существует).

При  $x > 0$  значения  $y''(x) > 0$  и график направлен выпуклостью вниз, а при  $x < 0$  значения  $y''(x) < 0$  и график направлен выпуклостью вверх. Следовательно,  $0$  — точка перегиба функции.

Для нахождения промежутков выпуклости функции  $f(x)$  необходимо решить неравенства  $f''(x) > 0$  и  $f''(x) < 0$  на области определения функции  $f(x)$ . Поскольку  $f''(x)$  также можно рассматривать как функцию переменной  $x$ , то в случае, когда функция  $f''(x)$  является непрерывной в каждой точке своей области определения, для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, основанное на следующем свойстве: *точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции  $f(x)$  на промежутки, в каждом из которых  $f''(x)$  сохраняет постоянный знак.*

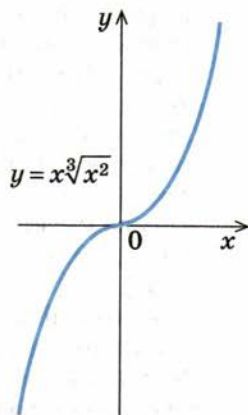


Рис. 87

Учитывая это свойство и рассмотренные условия выпуклости функции и существования ее точек перегиба, можно выделить такую *схему исследования функции  $f(x)$  на выпуклость и точки перегиба.*

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную.

3. Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует\*.
4. Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.
5. Записать необходимый результат исследования (интервалы и характер выпуклости и точки перегиба).

Применение этой схемы показано в таблице 16.

Обратим внимание, что использование второй производной позволяет более детально исследовать свойства функции для построения ее графика. В таблице 16 (с. 149) приведена расширенная схема (по сравнению со схемой на с. 82) исследования функции для построения ее графика и пример ее использования. В эту схему дополнительно включено нахождение интервалов выпуклости функции, точек перегиба и асимптот графика функции (см. также § 8).

### Вопросы для контроля

1. Используя график функции, объясните, какая функция называется выпуклой вверх, а какая — выпуклой вниз.
2. Используя график функции, объясните, какая точка называется точкой перегиба графика функции. Что называют точкой перегиба функции?
3. Объясните, как располагаются на соответствующем интервале графики выпуклых вверх и выпуклых вниз функций относительно хорды, соединяющей две точки этого графика.
4. Сформулируйте достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз функции, имеющей вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек перегиба функции, которая имеет вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.
6. Охарактеризуйте схему исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
7. Охарактеризуйте расширенную схему исследования функции для построения ее графика.

### Упражнения

1. Найдите вторую производную данной функции:
 

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ ;	2) $f(x) = x^4 \ln x$ ;
3) $f(x) = x \cos x$ ;	4) $f(x) = x^2 \sin x$ .

\* По аналогии с критическими точками (см. с. 63) те внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует, часто называют критическими точками второго рода, или критическими точками по второй производной.

2. Найдите интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз и точки перегиба для функции:

1)  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ ;

2)  $f(x) = \cos 2x$  при  $-\pi < x < \pi$ ;

3)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ;

4)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

3. Исследуйте функцию по расширенной схеме и постройте ее график:

1)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ;

2)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ;

3)  $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ ;

5)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ ;

6)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ ;

7)  $f(x) = e^{-x^2}$ .

§ 11.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

11.1.

### Применение производной к решению уравнений и неравенств

В учебнике для 10 класса (см. § 3, 28, 37) было рассмотрено использование свойств функций для решения некоторых уравнений. Иногда для выяснения необходимых свойств функций целесообразно использовать производную. Это прежде всего нахождение промежутков возрастания и убывания функции и оценка области значений функции (соответствующие приемы такого исследования приведены в таблице 17).

Таблица 17

1. Оценка значений левой и правой частей уравнения						
Ориентир						
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x) = g(x)</math></td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle; padding: 0 10px;"><math>\Leftrightarrow</math></td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle; padding: 0 10px;"><math>\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x) \geq a</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>g(x) \leq a</math></td> </tr> </table>	$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$	$f(x) \geq a$	$g(x) \leq a$	<p>Если нужно решить уравнение вида <math>f(x) = g(x)</math> и выяснилось, что <math>f(x) \geq a</math>, <math>g(x) \leq a</math>, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда одновременно <math>f(x)</math> и <math>g(x)</math> равны <math>a</math>.</p>
$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow$			$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$		
$f(x) \geq a$						
$g(x) \leq a$						
Пример						
<p style="text-align: center;">Решите уравнение <math>\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6</math>.</p> <p>► Оценим значения левой и правой частей уравнения.  <math>g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2</math>, <math>f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}</math>. Исследуем функцию <math>f(x)</math> на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. <math>D(f): \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases}</math> то есть <math>1 \leq x \leq 3</math>. <math>f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}</math>. Производная не существует в точках 1 и 3 из области определения функции <math>f(x)</math>, но эти точки не являются внутренними для <math>D(f)</math>, следовательно, они не являются критическими.</p>						

$$f'(x) = 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0,$$

$$\sqrt{3-x} = \sqrt{x-1},$$

$$3-x = x-1,$$

$x = 2$  — критическая точка ( $f'(2) = 0$ ).

Непрерывная функция\*  $f(x)$  задана на отрезке  $[1; 3]$ , поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах этого отрезка, или в критической точке этого отрезка. Поскольку  $f(1) = f(3) = \sqrt{2}$ , а  $f(2) = 2$ , то  $\max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 2$ , то есть\*\*  $f(x) \leq 2$ . Кроме того,  $g(x) \geq 2$ .

Следовательно, заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2, \\ (x-2)^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2. <

## 2. Использование возрастания и убывания функций

### Схема решения уравнения

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения, или оценку значений левой и правой частей уравнения, или следующее свойство функций: возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения).

#### Теоремы о корнях уравнения

#### Пример

1. Если в уравнении  $f(x) = a$  функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не больше чем один корень на этом промежутке.

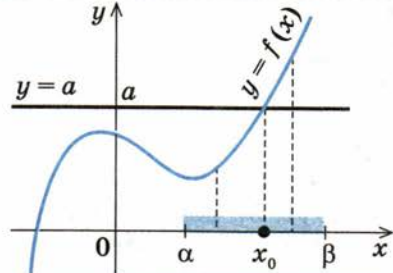
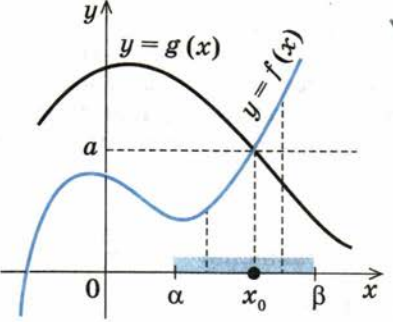
1. Уравнение  $2x + \cos x = \pi$  имеет корень\*\*\*  $x = \frac{\pi}{2}$   
 $\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi, \text{ то есть } \pi = \pi\right).$

\* В точке  $x = 1$  функция  $f(x)$  непрерывна справа, а в точке  $x = 3$  — слева (см. с. 124).

\*\* Мы могли бы точнее оценить область значений непрерывной функции  $f(x)$ : поскольку  $\min_{[1;3]} f(x) = f(1) = f(3) = \sqrt{2}$ , то  $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$ , но для приведенного решения достаточно оценки  $f(x) \leq 2$ .

\*\*\* Корни в примерах 1 и 2 получены подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений:  $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ , которые подставляют в заданное уравнение, а для тригонометрических уравнений проверяют также «табличные» значения:  $x = 0, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \dots$



	<p>Других корней это уравнение не имеет, поскольку функция <math>f(x) = 2x + \cos x</math> возрастает (ее производная <math>f'(x) = 2 - \sin x &gt; 0</math> при всех значениях <math>x</math> из области определения: <math>D(f) = \mathbb{R}</math>).</p> <p>Ответ: <math>\frac{\pi}{2}</math>.</p>
<p>2. Если в уравнении <math>f(x) = g(x)</math> функция <math>f(x)</math> возрастает на некотором промежутке, а функция <math>g(x)</math> убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не больше чем один корень на этом промежутке.</p> 	<p>2. Уравнение <math>e^x - x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}</math> имеет корень* <math>x = 0</math> (<math>e^0 - 0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}</math>, то есть <math>1 = 1</math>). Других корней это уравнение не имеет, поскольку его ОДЗ: <math>x \geq 0</math> и на этой ОДЗ функция <math>f(x) = e^x - x</math> является возрастающей (ее производная <math>f'(x) = e^x - 1</math> равна нулю при <math>x = 0</math> и <math>f'(x) &gt; 0</math> при <math>x &gt; 0</math>, а учитывая непрерывность функции <math>f(x)</math>, получаем, что <math>f(x)</math> возрастает при <math>x \geq 0</math>). Функция <math>g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}</math> убывает при <math>x \geq 0</math></p> <p><math>(g'(x) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2} &lt; 0</math> при <math>x \geq 0</math>). Следовательно, уравнение <math>f(x) = g(x)</math> имеет единственный корень <math>x = 0</math>.</p> <p>Ответ: 0.</p>

### Объяснение и обоснование

Как отмечалось в § 3 учебника 10 класса, для решения уравнений в курсе математики используются методы точного и приближенного решения. При

\* Корни в примерах 1 и 2 получены подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений:  $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ , которые подставляют в заданное уравнение, а для тригонометрических уравнений проверяют также «табличные» значения:  $x = 0, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \dots$

этом методы точного решения уравнений не могут полностью удовлетворить потребности практики, поскольку с их помощью в основном решаются только некоторые уравнения отдельных видов. В курсах высшей математики обосновано, что даже для уравнения вида  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  — многочлен, точное решение можно записать для любого уравнения только в том случае, когда оно не выше четвертой степени. Если же  $f(x)$  — тригонометрическая, показательная или логарифмическая функция, то для произвольного уравнения вида  $f(x) = 0$  нет общих методов точного решения. С помощью элементарных функций корни таких уравнений можно выразить через их коэффициенты лишь в отдельных, достаточно ограниченных частных случаях. Поэтому важное значение для удовлетворения потребностей практики имеют различные методы приближенного решения уравнений.

В курсах математики используются так называемые численные методы, с помощью которых можно определять корни уравнений различных видов с заданной точностью.

При этом, как правило, численное решение состоит из двух этапов. Сначала отделяем корни, то есть находим достаточно узкие промежутки области определения уравнения, на каждом из которых находится лишь один корень данного уравнения.

Для отделения корней уравнения  $f(x) = 0$  можно воспользоваться свойством непрерывной функции, приведенным в § 7: *если непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю*. Если также известно, что на рассматриваемом отрезке функция возрастает (или убывает), то на этом отрезке уравнение  $f(x) = 0$  будет иметь единственный корень и такая точка будет единственной. Например, в уравнении

$$5x^5 - 10x^3 + 10x - 76 = 0 \quad (1)$$

для непрерывной функции  $f(x) = 5x^5 - 10x^3 + 10x - 76$  значение  $f(1) = -71 < 0$  и  $f(2) = 24 > 0$ . Следовательно, на отрезке  $[1; 2]$  заданное уравнение имеет корень. Также на этом интервале (и на всей числовой прямой) функция возрастает, поскольку  $f'(x) = 25x^4 - 30x^2 + 10 = (5x^2 - 3)^2 + 1 > 0$ , поэтому на отрезке  $[1; 2]$  уравнение  $5x^5 - 10x^3 + 10x - 76 = 0$  имеет единственный корень.

Концы промежутка  $[a; b]$ , в котором находится корень, можно рассматривать как первое приближение искомого корня. Левый конец промежутка является приближением корня с недостатком, правый — с избытком. На втором этапе происходит сужение границ промежутка, который содержит корень уравнения. Такое сужение проводят несколько раз до тех пор, пока не будет найдено приближенное значение корня с нужной точностью. Для этого применяется соответствующий сходящийся циклический процесс, с помощью которого по известному приближению корня определяется его более точное приближение.

Одним из таких процессов, с которым вы знакомились в курсе информатики, является метод половинного деления. Напомним его.

Пусть на отрезке  $[a; b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$ . Если значения функции на концах отрезка имеют разные знаки, то по свойству непрерывной функции это означает, что внутри данного отрезка находится хотя бы один корень уравнения  $f(x) = 0$ . Пусть для определенности корень один. Суть метода состоит в сокращении на каждом шаге вдвое длины отрезка. Находим середину отрезка  $[a; b]$ :  $c = \frac{a+b}{2}$ . Вычисляем значение функции  $f(c)$ . Если  $f(c) = 0$ , то корень найден, а если  $f(c) \neq 0$ , то выбираем тот отрезок, на котором функция  $f(x)$  меняет свой знак. Новый отрезок вновь делим пополам. И этот процесс продолжаем до тех пор, пока длина отрезка не сравняется с наперед заданной погрешностью  $\varepsilon$  вычисления корня (или станет меньше  $\varepsilon$ ).

Например, пусть требуется найти корень уравнения (1) с точностью до  $\varepsilon = 0,07$ .

Сначала отделяем корень на отрезке  $[1; 2]$  (напомним, что  $f(1) < 0$  и  $f(2) > 0$ ) и выполняем несколько однотипных шагов вычислений.

Находим середину отрезка  $[1; 2]$ :  $c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$  и находим  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -41\frac{25}{32} < 0$ .

Поскольку на отрезке  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$  функция  $f(x)$  меняет свой знак, то искомый корень находится на этом отрезке.

Теперь находим середину отрезка  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ :  $c = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}$ , находим  $f\left(\frac{7}{4}\right) = -30\frac{29}{1024} < 0$  и берем отрезок  $\left[\frac{7}{4}; 2\right]$ , где функция меняет свой знак.

Дальше находим середину отрезка  $\left[\frac{7}{4}; 2\right]$ :  $c = \frac{\frac{7}{4}+2}{2} = \frac{15}{8}$ , находим  $f\left(\frac{15}{8}\right) = -7\frac{9717}{32768} < 0$  и выбираем отрезок  $\left[\frac{15}{8}; 2\right]$ , где функция меняет свой знак.

Поскольку длина полученного отрезка равна  $0,125 > 0,07$ , то снова находим середину отрезка  $\left[\frac{15}{8}; 2\right]$ :  $c = \frac{\frac{15}{8}+2}{2} = \frac{31}{16}$ , находим  $f\left(\frac{31}{16}\right) = 7\frac{165147}{1048576} > 0$

и выбираем отрезок  $\left[\frac{15}{8}; \frac{31}{16}\right]$ , где функция меняет свой знак. Длина последнего отрезка равна  $0,0625 < 0,07$ . Поскольку искомый корень  $x$  находится в последнем отрезке, то  $1,875 < x < 1,9375$  и в качестве приближенного значения можно выбрать, например, среднюю точку последнего отрезка, то есть с точностью до  $\varepsilon = 0,07$  значение корня уравнения (1) равно  $x \approx 1,90$ . Естественно, в практических задачах приведенные вычисления проводятся

с использованием специальных компьютерных программ. Например, более точное значение корня уравнения (1), вычисленное с помощью такой программы:  $x \approx 1,90777\dots$

Отметим, что численные методы решения уравнений не только не уступают методам их точного решения, но и имеют значительно более широкую область применения при решении задач практики. Однако в курсе алгебры и начал анализа из приближенных методов обычно рассматривается только графический метод решения уравнений, который не дает высокой точности нахождения корней уравнения, с его помощью чаще всего можно получить лишь грубые приближения корней. Поэтому, как уже отмечалось в учебнике 10 класса, в школьном курсе алгебры и начал математического анализа под требованием «решить уравнение» обычно понимается следующее: «используя методы точного решения, найти корни данного уравнения», а приближенные методы решения уравнений можно использовать только тогда, когда об этом идет речь в условии задачи. В силу указанных причин поиск плана решения приведенных ниже уравнений (многие из которых предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы страны) ведется исходя из предпосылки, что у каждого из этих уравнений имеются «достаточно хорошие» корни (которые иногда даже удается подобрать). Если же для заданного уравнения эта предпосылка окажется неверной, то для его решения придется использовать методы приближенного решения.

В таблице 17 показано применение производной для реализации способов решения уравнений, которые связаны с использованием свойств функций и были рассмотрены и обоснованы в учебнике для 10 класса. Напомним, что эти способы чаще используются в тех случаях, когда мы не можем решить заданное уравнение с помощью равносильных преобразований или уравнений-следствий (или тогда, когда такое решение является очень громоздким). Отметим, что использование производной также позволяет при решении некоторых уравнений реализовать следующую схему рассуждений.

Допустим, мы смогли подобрать два корня заданного уравнения вида  $f(x) = a$ . Чтобы доказать, что уравнение не имеет других корней, достаточно убедиться, что функция  $f(x)$  имеет только два промежутка возрастания или убывания (на каждом из которых уравнение  $f(x) = a$  может иметь только один корень). Если функция  $f(x)$  дифференцируема на каком-либо промежутке, то характер возрастания или убывания функции  $f(x)$  на этом промежутке может измениться только в ее критических точках. Например, если в точке  $x_0$  возрастание дифференцируемой (а следовательно, и непрерывной) функции изменилось на убывание, то это означает, что в точке  $x_0$  функция имеет максимум, но тогда  $x_0$  — критическая точка. Таким образом, для того чтобы дифференцируемая на интервале функция имела на этом интервале не больше двух промежутков\* возрастания или убывания, достаточно, чтобы на этом интервале она имела только одну критическую точку.

\* Имеется в виду, что рассматриваются промежутки наибольшей длины.

**Пример**

Решим с помощью указанной выше схемы уравнение  
 $3^{x+2} - 26x = 29$ .

**Решение**

► Заданное уравнение имеет корни  $x = -1$  ( $3^{-1+2} - 26 \cdot (-1) = 29$ ,  $29 = 29$ ) и  $x = 2$  ( $3^{2+2} - 26 \cdot 2 = 29$ ,  $29 = 29$ ). Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого достаточно доказать, что функция  $f(x) = 3^{x+2} - 26x$  имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Действительно,  $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 3^{x+2} \ln 3 - 26$  существует на всей области определения функции  $f(x)$ . Если  $f'(x) = 0$ , то  $3^{x+2} \ln 3 - 26 = 0$ ,  $3^{x+2} \ln 3 = 26$ ,  $3^{x+2} = \frac{26}{\ln 3} > 0$ . Тогда  $x = \log_3 \left( \frac{26}{\ln 3} \right) - 2 = x_0$  — единственная критическая точка функции  $f(x)$ . Если отметить эту критическую точку на области определения функции  $f(x)$  (на множестве  $\mathbf{R}$ ), то область определения разобьется на два промежутка, в каждом из которых функция будет или возрастать, или убывать (на промежутке  $(-\infty; x_0]$  функция  $f(x)$  убывает, а на промежутке  $[x_0; +\infty)$  — возрастает). Тогда в каждом из этих промежутков уравнение  $f(x) = 29$  может иметь не больше чем один корень, то есть всего заданное уравнение может иметь не больше двух корней. Два корня этого уравнения мы уже подобрали. Следовательно, заданное уравнение имеет только эти два корня:  $x = -1$  и  $x = 2$ .

Ответ:  $-1, 2$ . ◁

Аналогичные рассуждения для случая, когда для уравнения вида  $f(x) = a$  удается подобрать три корня, приведены далее в задаче 2 на с. 166.

Отметим также, что при решении неравенств вида  $f(x) \geq 0$  методом интервалов описанные выше приемы решения уравнений с использованием производной часто приходится применять для нахождения нулей функции  $f(x)$  (см. задачу 5, с. 169).

**Примеры решения задач****Задача 1**

Решите уравнение  $3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$ . (1)

**Комментарий**

Поскольку у нас нет формул, которые позволяли бы преобразовывать одновременно и показательные, и тригонометрические выражения, то попробуем решить заданное уравнение, используя свойства соответствующих функций. В частности, оценим область значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Для функции, стоящей в правой части уравнения, это легко сделать и без производной, а для исследования функции, стоящей в левой части уравнения, можно использовать производную (см. решение) или *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0 \text{ (тогда } \frac{3^x + 3^{2-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}}, \text{ следовательно,}$$

$$3^x + 3^{2-x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^{x+2-x}} = 2 \cdot \sqrt{3^2} = 6).$$

## Решение

▶ ОДЗ заданного уравнения — все действительные числа  $\mathbf{R}$ . Оценим значения левой и правой частей уравнения. Поскольку  $\cos 2\pi x$  принимает все значения от  $(-1)$  до  $1$ , то  $1 + \cos 2\pi x$  принимает все значения от  $0$  до  $2$ . Тогда функция  $g(x) = 3(1 + \cos 2\pi x)$  принимает все значения от  $0$  до  $6$ . Следовательно,  $0 \leq g(x) \leq 6$ .

Функцию  $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$  исследуем с помощью производной.  $D(f) = \mathbf{R}$ .

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{2-x} \ln 3 = 3^{2-x} \ln 3 (3^{2x-2} - 1)$  существует на всей области определения функции  $f(x)$ .

$f'(x) = 0$ ,  $3^{2-x} \ln 3 (3^{2x-2} - 1) = 0$ . Поскольку  $3^{2-x} \ln 3 \neq 0$ , то  $3^{2x-2} - 1 = 0$ ,  $3^{2x-2} = 1$ ,  $2x - 2 = 0$ ,  $x = 1$  — критическая точка. Отмечаем критическую точку на области определения функции  $f(x)$  и находим знаки производной в каждом из полученных промежутков (рис. 88).

Непрерывная функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(-\infty; +\infty)$  только одну критическую точку, и это точка минимума (в ней производная меняет знак с минуса на плюс). Следовательно, в этой точке функция принимает свое наименьшее значение:  $f(1) = 6$ . Таким образом,  $f(x) \geq 6$ .

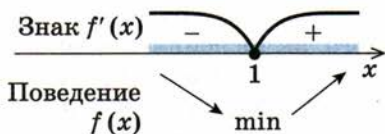


Рис. 88

Учитывая, что  $g(x) \leq 6$ , получаем, что заданное уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно системе 
$$\begin{cases} f(x) = 6, \\ g(x) = 6. \end{cases}$$

Но значение  $6$  функция  $f(x)$  принимает только при  $x = 1$ , что удовлетворяет и второму уравнению системы:  $g(1) = 3(1 + \cos 2\pi) = 6$ .

Следовательно, полученная система (а значит, и заданное уравнение) имеет единственный корень  $x = 1$ .

Ответ: 1. ◁

Отметим, что уравнение (1) можно решить еще одним способом, описанным в учебнике для 10 класса (см. § 37) под названием «Ищи квадратный трехчлен», в котором предлагается *попробовать рассмотреть заданное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или относительно какой-либо функции)*.

▶ В частности, заданное уравнение можно записать так:

$$3^x + \frac{3^2}{3^x} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0. \text{ Замена } 3^x = t, \text{ где } t > 0, \text{ дает уравнение}$$

$$t + \frac{9}{t} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0, \text{ которое при } t > 0 \text{ равносильно уравнению}$$

$$t^2 - 3(1 + \cos 2\pi x)t + 9 = 0. \quad (2)$$

Если уравнение (2) рассмотреть как квадратное относительно переменной  $t$ , то для существования корней его дискриминант должен быть неотрицательным. Следовательно,  $D = 9(1 + \cos 2\pi x)^2 - 36 \geq 0$ . Тогда  $(1 + \cos 2\pi x)^2 \geq 4$ , а учитывая, что  $1 + \cos 2\pi x \geq 0$  всегда, получаем  $1 + \cos 2\pi x \geq 2$ ,

то есть  $\cos 2\pi x \geq 1$ . Но в последнем неравенстве знак «больше» не может выполняться (значения косинуса не бывают больше 1), следовательно,

$$\cos 2\pi x = 1. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение  $t^2 - 6t + 9 = 0$ , то есть  $(t - 3)^2 = 0$ ,  $t = 3$ .

Обратная замена дает:  $3^x = 3$ , следовательно,  $x = 1$ , что удовлетворяет и уравнению (3).

Ответ: 1.  $\triangleleft$

**Задача 2** Решите уравнение  $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$ .

### Комментарий

Заданное уравнение можно решить, используя методы приближенного вычисления корней, но сначала попробуем решить его, используя свойства соответствующих функций. В частности, *попытаемся подобрать корни этого уравнения и доказать, что других корней оно не имеет* (удобно предварительно привести уравнение к виду  $f(x) = 0$ ). Последовательно подставляя  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ , выясняем, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(3) = 0$ , то есть уравнение  $f(x) = 0$  имеет три корня. Чтобы доказать, что других корней нет, достаточно доказать, что у функции  $f(x)$  не больше трех промежутков возрастания или убывания; а учитывая непрерывность  $f(x)$  на всей числовой прямой, для этого достаточно доказать, что у нее не больше двух критических точек, то есть уравнение  $f'(x) = 0$  имеет не больше двух корней. Рассматривая теперь уравнение  $f'(x) = 0$ , мы после его преобразования можем провести аналогичные рассуждения, но уже для двух корней (как это было сделано в примере на с. 164). Выполняя преобразование уравнения  $f'(x) = 0$ , учтем, что все его члены имеют одинаковую степень —  $x$  (то есть оно является однородным относительно трех функций от переменной  $x$ , а именно:  $2^x$ ,  $3^x$ ,  $4^x$ ). С помощью деления обеих частей уравнения  $f'(x) = 0$  на степень с основанием 2, 3 или 4 удастся уменьшить количество выражений с переменной на одно.

### Решение

► Заданное уравнение равносильно уравнению  $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$ , то есть

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \quad (1)$$

Обозначим  $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$ . Поскольку  $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$ ,  $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$ ,  $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$ , то уравнение  $f(x) = 0$  имеет три корня: 0, 1, 3. Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Для этого достаточно доказать, что у функции  $f(x)$  есть не больше трех промежутков возрастания или убывания, а учитывая непрерывность функции  $f(x)$  на всей числовой прямой, достаточно доказать, что функция имеет не больше двух критических точек.

Область определения:  $D(f) = \mathbf{R}$ .

Производная  $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$  существует при всех

значениях  $x$ . Следовательно, критическими точками могут быть только те значения  $x$ , при которых  $f'(x) = 0$ . Получаем уравнение

$$8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0.$$

Поскольку  $3^x \neq 0$ , то после деления обеих частей последнего уравнения на  $3^x$  получаем равносильное уравнение

$$8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \quad (2)$$

Чтобы доказать, что уравнение (2) имеет не больше двух корней, достаточно доказать, что функция  $\varphi(x) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3$ , стоящая в левой части уравнения, имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Учитывая непрерывность этой функции на всей числовой прямой, достаточно доказать, что она имеет только одну критическую точку.

Действительно,  $\varphi'(x) = (8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (2 \ln 4) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3}$  существует при всех значениях  $x$ . Следовательно, критическими точками могут быть только те значения  $x$ , при которых  $\varphi'(x) = 0$ . Получаем однородное уравнение

$$(8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (4 \ln 2) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3} = 0.$$

Поскольку  $(4 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$ , то после деления обеих частей уравнения на это выражение получаем равносильное уравнение  $2 \ln \frac{2}{3} + 2^x \cdot \ln \frac{4}{3} = 0$ . Отсюда

$$2^x = \frac{-2 \ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}}. \text{ Учитывая, что } \ln \frac{2}{3} < 0, \text{ а } \ln \frac{4}{3} > 0, \text{ получаем: } \frac{-2 \ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}} > 0. \text{ Следова-}$$

тельно, последнее уравнение имеет единственный корень. Тогда функция  $\varphi(x)$  имеет единственную критическую точку, и поэтому уравнение (2) имеет не больше двух корней. Это означает, что функция  $f(x)$  имеет не больше двух критических точек. Тогда уравнение (1) (а значит, и заданное уравнение) имеет не больше трех корней. Но три корня заданного уравнения мы уже знаем: 0, 1, 3. Следовательно, других корней заданное уравнение не имеет.  
**Ответ:** 0, 1, 3. <

### Задача 3

Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3x - 3y = \sin x - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$$

#### Решение

▶ Заданная система равносильна системе 
$$\begin{cases} 3x - \sin x = 3y - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

#### Комментарий

Решить заданную систему с помощью равносильных преобразований не удастся. Поэтому попробуем использовать свойства функций.



Рассмотрим функцию

$$f(t) = 3t - \sin t.$$

Поскольку  $f'(t) = 3 - \cos t > 0$  всегда, то на своей области определения ( $t \in \mathbf{R}$ ) функция  $f(t)$  является возрастающей. Тогда первое уравнение системы (1), которое имеет вид  $f(x) = f(y)$ , равносильно уравнению  $x = y$ . Следовательно, система (1) равно-

сильна системе  $\begin{cases} x = y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$  Под-

ставляя  $x = y$  во второе уравнение системы, имеем

$$2y^3 - y^3 = 1, y^3 = 1, y = 1.$$

Тогда

$$x = y = 1.$$

Ответ: (1; 1). ◁

Если в первом уравнении системы члены с переменной  $x$  перенести в одну сторону, а с  $y$  — в другую, то получим в левой и правой частях уравнения значения одной и той же функции. С помощью производной легко проверить, что эта функция является возрастающей. Но равенство  $f(x) = f(y)$  для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда  $x = y$ , поскольку каждое свое значение возрастающая (или убывающая) функция может принимать только при одном значении аргумента. Коротко этот результат можно сформулировать так: **если функция  $f(x)$  является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве  $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$ .**

**Задача 4** Решите неравенство  $x^{11} - x^6 + 2x < -4$ .

Решение

▶ Заданное неравенство равносильно неравенству  $x^{11} - x^6 + 2x + 4 < 0$ .

Функция  $f(x) = x^{11} - x^6 + 2x + 4$  непрерывна в каждой точке своей области определения, поэтому для решения неравенства можно использовать метод интервалов.

1. ОДЗ:  $x \in \mathbf{R}$ .

2. Нули функции:  $f(x) = 0$ . Найдем производную функции  $f(x)$ :

$f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2$ . Если обозначить  $x^5 = t$ , то  $f' = 11t^2 - 6t + 2$ . Но квадратный трехчлен  $11t^2 - 6t + 2$  имеет отрицательный дискриминант, тогда для всех  $t$ :

$11t^2 - 6t + 2 > 0$ . Следовательно, для всех  $x$  значение  $f'(x) > 0$ . Тогда функция  $f(x)$  возрастает на всей числовой прямой и уравнение  $f(x) = 0$  может иметь только

Комментарий

Заданное неравенство не удается решить с помощью равносильных преобразований, поэтому используем метод интервалов. Для этого неравенство необходимо привести к виду  $f(x) \geq 0$ , где  $f(x)$  — непрерывная в каждой точке своей области определения функция, поскольку она является многочленом.

Напомним схему решения неравенств методом интервалов.

1. Найти ОДЗ неравенства.
2. Найти нули функции:  $f(x) = 0$ .
3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции  $f(x)$  в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.
4. Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.

один корень. Поскольку  $f(-1) = 0$ , то  $x = -1$  — единственный нуль функции  $f(x)$ .

3. Отмечаем нули на ОДЗ и находим знак в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 89).



Рис. 89

Ответ:  $(-\infty; -1)$ .  $\triangleleft$

Для нахождения нулей функции надо решить уравнение  $f(x) = 0$ , которое не удастся решить с помощью равносильных преобразований. Поэтому для его решения целесообразно использовать свойства функции  $f(x)$ , в частности ее монотонность, которую можно обосновать с помощью производной.

**Задача 5 (ВШЭ)** Решите неравенство  $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \geq 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ .

#### Комментарий

Попробуем решить заданное неравенство методом интервалов (см. схему решения в задаче 4). Для этого его необходимо привести к виду  $f(x) \geq 0$  (где функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке своей области определения).

При нахождении нулей функции для решения уравнения  $f(x) = 0$  целесообразно использовать свойства соответствующих функций, в частности оценку значений левой и правой частей уравнения вида  $g(x) = \varphi(x)$ . Значение

функции  $\varphi(x) = 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$  легко оценить и без применения производ-

ной, а для исследования функции  $g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$  используем производную. Отметим, что в данном случае внутри ОДЗ мы не найдем ни одного нуля функции  $f(x)$  (см. далее решение: нулем является только крайняя точка ОДЗ). Но метод интервалов применим и в этом случае — мы получаем единственный интервал, в котором функция сохраняет свой знак.

#### Решение

- Заданное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 3 + \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \geq 0. \quad (1)$$

Функция  $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 3 + \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$  непрерывна в каждой точке\*

своей области определения, поэтому для решения неравенства (1) можно использовать метод интервалов.

\* Конечно, если учесть, что в точке 3 функция  $f(x)$  непрерывна справа, а в точке 4 — слева (см. ее ОДЗ).

$$1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ -1 \leq -\frac{x}{4} \leq 1, \end{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 5, \\ -4 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad 3 \leq x \leq 4.$$

$$2. \text{ Нули: } f(x) = 0. \quad \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 3 + \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} = 0. \quad (2)$$

Оценим значения функций  $g(x)$  и  $\varphi(x)$ , стоящих соответственно в левой и правой частях уравнения (2).

$$\text{Поскольку } 0 \leq \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \leq \pi, \text{ то } 0 \leq \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leq 1.$$

$$\text{Тогда } 2 \leq 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leq 3.$$

Исследуем функцию  $g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$  на ОДЗ неравенства (1), то есть при  $x \in [3; 4]$ .

Функция  $g(x)$  непрерывна на отрезке  $[3; 4]$ , поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах, или в критических точках этого отрезка.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

не существует в точке 3 отрезка  $[3; 4]$ , но эта точка не является внутренней точкой этого отрезка, следовательно, она не является критической. Выясним, когда  $g'(x) = 0$ .

$$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{5-x}}, \quad \sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}, \quad 5-x = x-3, \quad x = 4.$$

$$\text{Сравнивая значения } g(3) = \sqrt{2} \text{ и } g(4) = 2, \text{ получаем: } \min_{[3; 4]} g(x) = g(3) = \sqrt{2},$$

$\max_{[3; 4]} g(x) = g(4) = 2$ . Следовательно,  $\sqrt{2} \leq g(x) \leq 2$ . Тогда уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2. \end{cases} \quad \text{Поскольку } 2 \text{ — наибольшее значение функции}$$

$g(x)$ , которое достигается только при  $x = 4$ , то уравнение  $g(x) = 2$  имеет единственный корень  $x = 4$ , удовлетворяющий и уравнению  $\varphi(x) = 2$

(действительно,  $\varphi(4) = 3 - \frac{\arccos(-1)}{\pi} = 3 - \frac{\pi}{\pi} = 2$ ). Следовательно, функция  $f(x)$  имеет только один нуль:  $x = 4$ .

Отмечаем нуль на ОДЗ и находим знак функции в полученном промежутке (рис. 90).



Рис. 90

Как видим, функция  $f(x)$  не принимает положительных значений и в неравенстве (1) знак «больше» не может выполняться. Следовательно, может выполняться только знак «равно», но  $f(x) = 0$  только при  $x = 4$ .

Ответ: 4. ◁

Замечание. Используя введенные обозначения, заданное неравенство можно записать так:  $g(x) \geq \varphi(x)$ . После выполнения оценки значений функций  $g(x)$  и  $\varphi(x)$  имеем:  $\sqrt{2} \leq g(x) \leq 2$ ,  $2 \leq \varphi(x) \leq 3$  и без метода интервалов можно сделать вывод, что неравенство  $g(x) > \varphi(x)$  не может выполняться. Следовательно, заданное неравенство равносильно уравнению  $g(x) = \varphi(x)$ ,

которое равносильно системе  $\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2, \end{cases}$  имеющей единственное решение

$x = 4$ . Но такие рассуждения можно провести только для этого конкретного неравенства, в то время как метод интервалов можно использовать для решения любого неравенства вида  $f(x) \geq 0$  (где функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке своей области определения). Поэтому основным способом решения таких неравенств мы выбрали метод интервалов.

### Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях удастся решить уравнение с помощью оценки значений его левой и правой частей. Приведите пример.
2. Объясните, как можно использовать возрастание и убывание функций для решения уравнений. Приведите примеры.

### Упражнения

Решите уравнение (1–7).

- 1)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11;$       2)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29.$
- 1)  $x + \frac{1}{x} = 2 \sin \frac{\pi x}{2};$       2)  $2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3};$
- 3)  $4^x + 4^{1-x} = 1 + 3 \sin \pi x.$
- 1)  $x^5 - x^3 + 2x - 28 = 0;$       2)  $5x + 3 \cos x = 3;$
- 3)  $2x^3 - 3x^2 + \sqrt{x-1} = 5.$
- 1)  $\sin 5x - 2 \cos x - 8x = x^5 - 2;$       2)  $4 \cos 3x + 5 \sin \frac{x}{2} + 15x = 4 - x^3;$
- 3)  $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}.$
- 1)  $2^{x+1} - 4x = 0;$       2)  $3^{x-1} - 4x = -3;$
- 3)  $5^{x+2} - 12x = 25.$
- 1)  $3 \cdot 2^{x+2} + 5^x = 8 \cdot 3^x + 5;$       2)  $3 \cdot 2^x - 3^{x+1} + 4^x = 1;$
- 3)  $3 \cdot 2^{x+4} + 6 \cdot 7^{x+1} = 3 \cdot 5^{x+2} + 15.$

7. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x - \sin x = 4y - \sin y, \\ 3x^2 - y = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 2y = \sin x - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$$

Решите неравенство (8–9).

8. 1)  $x^7 - x^4 + 3x > -5$ ;

2)  $2x^9 - x^5 + x > 2$ ;

3)  $\log_2(2 - x) > 4x + 1$ .

9 (ВПЭ). 1)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq \frac{9}{2} - \frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$ ;

2)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{20-x} \geq 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$ .

### 11.2. Применение производной к доказательству неравенств

Производную иногда удается использовать при доказательстве неравенств с одной переменной. Рассмотрим схему такого доказательства.

**Пример** Докажите неравенство  $\ln(1+x) \leq x$  при  $x \geq 0$ .

**Решение**

► Для доказательства данного неравенства достаточно доказать неравенство  $\ln(1+x) - x \leq 0$  при  $x \geq 0$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \ln(1+x) - x$  при  $x \geq 0$ . Ее производная  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$  при  $x > 0$ . Следовательно, функция  $f(x)$  убывает на интервале  $(0; +\infty)$ , а учитывая непрерывность функции  $f(x)$  в точке 0 (она непрерывна на всей области определения), получаем, что функция  $f(x)$  убывает и на промежутке  $[0; +\infty)$ . Но  $f(0) = 0$ . Тогда при  $x \geq 0$  значение  $f(x) \leq f(0) = 0$ . Следовательно,  $\ln(1+x) - x \leq 0$ , то есть  $\ln(1+x) \leq x$  при  $x \geq 0$ , что и требовалось доказать. (Отметим, что при  $x > 0$  значение  $f(x) < f(0) = 0$ , а при  $x = 0$  заданное неравенство обращается в равенство.) ◀

Это решение позволяет предложить следующую *схему доказательства неравенств вида*  $\varphi(x) > g(x)$  (или  $\varphi(x) < g(x)$ ) *с помощью производной.*

1. Рассмотреть вспомогательную функцию  $f(x) = \varphi(x) - g(x)$  (на ее области определения или на заданном промежутке).
2. Исследовать с помощью производной поведение функции  $f(x)$  (возрастание или убывание, ее наибольшее или наименьшее значение) на рассматриваемом промежутке.
3. Обосновать (опираясь на поведение функции  $f(x)$ ), что  $f(x) > 0$  (или  $f(x) < 0$ ) на рассматриваемом промежутке, и сделать вывод, что  $\varphi(x) > g(x)$  (или  $\varphi(x) < g(x)$ ) на этом промежутке.

Обратим внимание, что при доказательстве некоторых неравенств эту схему приходится использовать несколько раз (см. решение задачи 1).

## Примеры решения задач

**Задача 1** Докажите неравенство  $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

## Комментарий

Попробуем применить производную к доказательству данного неравенства. Для этого исследуем функцию, которая является разностью левой и правой частей неравенства:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}.$$

Учитывая, что эта функция непрерывна на всей числовой прямой и  $f(0) = 0$ , достаточно доказать, что функция возрастает на заданном промежутке. (Тогда из непрерывности функции следует, что она будет возрастать и на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  и в этом промежутке из неравенства  $x > 0$  будет вытекать неравенство  $f(x) > f(0) = 0$ , равносильное заданному.) Для доказательства того, что функция возрастает на заданном промежутке, достаточно доказать, что ее производная  $f'(x) > 0$ . Если обозначить производную  $f'(x)$  как новую функцию  $g(x) = f'(x)$ , то нам надо доказать неравенство  $g(x) > 0$ , а для этого снова можно использовать приведенные выше рассуждения.

## Решение

▶ Заданное неравенство равносильно неравенству  $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}$ . Эта функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную  $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$ . Теперь рассмотрим функцию  $g(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$  и докажем, что  $g(x) > 0$  на промежутке  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Функция  $g(x)$  непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную  $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi}$ . Учитывая, что  $\frac{4}{\pi} > 1 \geq \sin x$ , получаем  $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi} > 0$ . Следовательно, функция  $g(x)$  возрастает на всей числовой прямой и, в частности, на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда согласно определению возрастающей функции при  $x > 0$  получаем, что  $g(x) > g(0)$ . Но  $g(0) = \cos 0 - 1 + \frac{4 \cdot 0}{\pi} = 0$ , то есть при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$   $f'(x) = g(x) > 0$ . Это означает, что функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , а так как она непрерывна, то возрастает и на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда из неравенства  $x > 0$  вытекает неравенство  $f(x) > f(0)$ .

Но  $f(0) = \sin 0 - 0 + \frac{2 \cdot 0^2}{\pi} = 0$ , следовательно,  $f(x) > 0$  при всех  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Таким образом, на этом интервале выполняется неравенство  $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$ , а значит, и неравенство  $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$ .  $\triangleleft$

**Задача 2** Докажите, что при всех действительных значениях  $x$  выполняется неравенство  $e^x \geq 1 + x$ .

Решение

► Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Область определения:  $D(f) = \mathbf{R}$ .

Производная  $f'(x) = e^x - 1$  существует на всей области определения. Следовательно, функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой;

$$f'(x) = 0, e^x - 1 = 0, e^x = 1,$$

$x = 0$  — критическая точка.

Отмечаем критическую точку на области определения функции  $f(x)$ , определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 91).

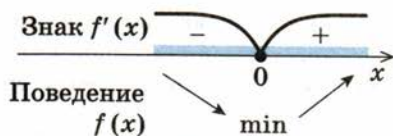


Рис. 91

Как видим, непрерывная функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(-\infty; +\infty)$  только одну критическую точку, и это точка минимума, то есть в этой точке функция принимает наименьшее значение на этом интервале. Тогда при всех действительных значениях  $x$  значения  $f(x) \geq f(0) = 0$ , то есть  $e^x - 1 - x \geq 0$ . Следовательно,  $e^x \geq 1 + x$  при всех действительных значениях  $x$ .  $\triangleleft$

Комментарий

Используем производную для доказательства данного неравенства. Для этого исследуем функцию  $f(x)$ , которая является разностью левой и правой частей неравенства. При всех действительных значениях  $x$  эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей, и поэтому рассуждения, приведенные при решении предыдущих задач, нельзя использовать. Тогда попробуем в результате исследования найти наибольшее или наименьшее значение функции  $f(x)$  на всей числовой прямой. Для этого можно использовать свойство: *если непрерывная функция  $f(x)$  имеет на заданном интервале только одну точку экстремума  $x_0$  и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке  $x_0$* . Далее воспользуемся тем, что когда в точке  $x_0$  функция принимает наименьшее значение на заданном интервале, то для всех значений  $x$  из этого интервала  $f(x) \geq f(x_0)$  (если необходимо, то можно также уточнить, что знак равенства достигается только в точке  $x_0$ ).

При доказательстве числовых неравенств или для сравнения двух чисел часто бывает удобно перейти к более общему функциональному неравенству.

**Задача 3**

 Сравните числа  $\pi^e$  и  $e^\pi$ .

**Комментарий**

Чтобы составить план решения, можно рассуждать следующим образом. Мы не знаем, какое из заданных чисел больше:  $\pi^e$  или  $e^\pi$ , поэтому в ходе анализа поставим между ними знак « $\vee$ ». Этот знак неравенства, направленный вниз острым концом, свидетельствует о том, что мы не знаем, в какую сторону его следует направить. Будем выполнять преобразование неравенства до тех пор, пока не выясним, какое число больше. Затем заменим знак « $\vee$ » соответствующим знаком неравенства: « $>$ » или « $<$ », которое и запишем в решении. (В ходе анализа, если необходимо поменять знак неравенства, знак « $\vee$ » меняем на знак « $\wedge$ », а в записи решения в соответствующем месте меняем знак неравенства.) При анализе запись вида  $\pi^e \vee e^\pi$  также будем называть неравенством (но, конечно, не в решении).

Рассмотрим неравенство  $\pi^e \vee e^\pi$ . Это неравенство с положительными членами ( $\pi > 0$  и  $e > 0$ ), следовательно, обе его части можно прологарифмировать. Поскольку функция  $\ln t$  является возрастающей, то после логарифмирования обеих частей по основанию  $e$  знак неравенства не изменится и мы получим неравенство  $\ln(\pi^e) \vee \ln(e^\pi)$ , то есть неравенство  $e \ln \pi \vee \pi \ln e$ . Так как  $e\pi > 0$ , то после деления обеих частей последнего неравенства на  $e\pi$  знак неравенства не изменится и мы получим неравенство  $\frac{\ln \pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$ . Замечаем, что в левой и правой частях этого неравенства стоят значения одной и той же функции  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Исследуем эту функцию с помощью производной на возрастание и убывание. Далее, учитывая, что  $\pi > e$ , сравним полученные выражения, а затем и заданные выражения (выполняя все те преобразования, что и в ходе анализа, только в обратном порядке).

**Решение**

▶ Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Ее область определения:  $x > 0$ . Производная  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  существует на всей области определения. Выясним,

когда  $f'(x) = 0$ :  $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ . Тогда на области определения получаем равносильное уравнение  $\ln x = 1$ , то есть  $x = e$  — критическая точка. Отмечаем критическую точку на области определения функции  $f(x)$  и определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 92).

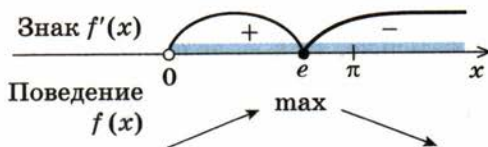


Рис. 92

Функция  $f(x)$  убывает на интервале  $(e; +\infty)$ , а так как она непрерывна на всей области определения, то она убывает и на промежутке  $[e; +\infty)$ .



Поскольку  $\pi > e$ , то  $f(\pi) < f(e)$ , то есть  $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$ . Умножив обе части этого неравенства на положительное число  $\pi e$  (знак неравенства не меняется), получаем неравенство  $e \ln \pi < \pi \ln e$ . Тогда  $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$ . Поскольку функция  $\ln t$  является возрастающей ( $e > 1$ ), то  $\pi^e < e^\pi$ .  
**Ответ:**  $\pi^e < e^\pi$ .  $\triangleleft$

При доказательстве некоторых неравенств иногда можно использовать вторую производную и выпуклость соответствующих функций.

**Задача 4** Докажите, что при всех  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  выполняется неравенство

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x.$$

**Решение**

► Если  $f(x) = \sin x$ , то  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ . При  $0 < x < \frac{\pi}{2}$   $f''(x) < 0$ , следовательно, на интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$  функция  $f(x) = \sin x$  выпукла вверх. Тогда на этом интервале ее график лежит выше хорды  $OA$  (рис. 93).

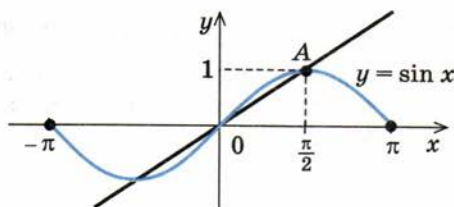


Рис. 93

Прямая  $OA$  имеет уравнение  $y = kx$  и проходит через точку  $A(\frac{\pi}{2}; 1)$ . Следовательно,  $1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$ , то есть  $k = \frac{2}{\pi}$ . Отсюда уравнение прямой  $OA$ :  $y = \frac{2}{\pi} x$ . Таким образом, при всех  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  выполняется неравенство

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x. \quad \triangleleft$$

### Комментарий

На тех интервалах, где функция  $f(x) = \sin x$  выпукла вверх, график функции  $f(x)$  лежит выше соответствующей хорды (рис. 94, а), а на тех интервалах, где эта функция выпукла вниз, график лежит ниже хорды (рис. 94, б).

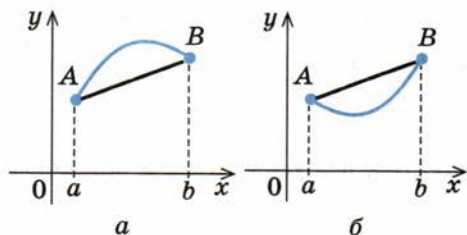


Рис. 94

Используем это при доказательстве данного неравенства: с помощью второй производной исследуем функцию  $f(x) = \sin x$  на выпуклость, рассмотрим уравнение соответствующей хорды  $AB$  и сравним уравнение хорды с уравнением прямой  $y = \frac{2}{\pi} x$  (где  $\frac{2}{\pi} x$  — функция, стоящая в правой части неравенства).

## Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно применить производную к доказательству неравенства с одной переменной. Приведите примеры.

## Упражнения

Докажите неравенство (1–4).

1. 1)  $x^5 - 2x^3 + 2x > 20$  при  $x > 2$ ;      2)  $a^3 + 4 > a^2 + 3a$  при  $a \geq 0$ ;

3)  $2x + \frac{1}{x^2} > 5$  при  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

2. 1)  $e^{-x} > 1 - x$  при  $x < 0$ ;      2)  $e^x > ex$  при  $x > 1$ ;

3)  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$  при  $x \geq 0$ .

3. 1)  $\operatorname{tg} x > x$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ;      2)  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ;

4. 1)  $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$  при  $x > -1$ ;      2)  $2x \ln x \leq x^2 - 1$  при  $x \geq 1$ .

5. Сравните числа:

1)  $1000^{1001}$  и  $1001^{1000}$ ;

2)  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$  и  $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ ;

3)  $(\lg 5)^3$  и  $3^{\lg 5}$ .

## § 12.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

При решении задач с параметрами производная может использоваться для исследования функции на монотонность и экстремумы, для исследования функции и построения ее графика, для записи уравнений касательных к графикам функций, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

## Задача 1

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция  $y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$  убывает для всех  $x \in \mathbf{R}$ .

Решение

► Область определения функции:

$$D(y) = \mathbf{R}.$$

Функция дифференцируема на всей числовой прямой:  $y' = 3(a + 2)x^2 - 6ax + 9a$ . Заданная функция будет убывать при всех  $x \in \mathbf{R}$ , если  $y' \leq 0$  на всей числовой прямой, причем уравнение  $y' = 0$  имеет только конечное (или счетное) множество корней.

Комментарий

Используем уточненный вариант условия убывания функции (с. 74).

Если  $f'(x) \leq 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , причем уравнение  $f'(x) = 0$  имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция  $f(x)$  убывает на этом интервале.

Отметим, что это условие является не только достаточным, но и необходимым для дифференцируемой

Если  $a = -2$ , то  $y' = 12x - 18$  и неравенство  $y' \leq 0$  не выполняется на всей числовой прямой ( $12x - 18 \leq 0$  только при  $x \leq 1,5$ ).

Если  $a \neq -2$ , то производная является квадратичной функцией относительно переменной  $x$ , она принимает значения  $y' \leq 0$  на всей числовой прямой тогда и только тогда (см. таблицу в комментарии), когда выполняются условия

$$\begin{cases} a + 2 < 0, \\ D \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

(при этом уравнение  $y' = 0$  может иметь разве что один корень).

Из неравенства  $a + 2 < 0$  получаем

$$a < -2.$$

Из неравенства  $D \leq 0$  имеем:

$$\begin{aligned} 36a^2 - 4 \cdot 3(a + 2) \cdot 9a &\leq 0, \\ 36a(a - 3a - 6) &\leq 0, \\ 36a(-2a - 6) &\leq 0, \\ -72a(a + 3) &\leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая полученное условие  $a < -2$ , получаем, что  $(-72a) > 0$ , тогда из неравенства (2) имеем  $a + 3 \leq 0$ , то есть  $a \leq -3$ . Следовательно, система (1)

равносильна системе  $\begin{cases} a < -2, \\ a \leq -3. \end{cases}$  Отсю-

да получаем  $a \leq -3$ .

Ответ:  $(-\infty; -3]$ .  $\triangleleft$

на интервале функции (если на каком-либо интервале функция  $f(x)$  дифференцируема и убывает, то  $f'(x) \leq 0$  на этом интервале — см. с. 66). Следовательно, условия задачи могут удовлетворять те и только те значения параметра, которые мы найдем по этому условию.

Анализируя производную данной функции, учитываем, что она является квадратичной функцией только в случае, когда  $a + 2 \neq 0$  (то есть  $a \neq -2$ ). Поэтому случай  $a + 2 = 0$  (то есть  $a = -2$ ) следует рассмотреть отдельно.

Для квадратичной функции вспоминаем все возможные варианты расположения параболы относительно оси абсцисс (см. таблицу ниже) и выясняем, когда неравенство  $y' \leq 0$  выполняется для всех  $x \in \mathbf{R}$ .

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a + 2 > 0$			
$a + 2 < 0$			

Обратим внимание, что неравенство  $D \leq 0$  (при  $a \neq -2$ ), которое свелось к неравенству (2), можно было решать отдельно или методом интервалов, или с помощью графика квадратичной функции (исключая точку с абсциссой  $a = -2$ ), а уже затем находить общее решение системы (1).

### Задача 2

Найдите наименьшее значение  $k$ , при котором график функции  $y = x^4 - 4k^3x + 3k^2$  касается оси абсцисс.

#### Решение

► По условию ось абсцисс (имеющая уравнение  $y = 0$  и угловой коэффициент 0) должна быть касательной к графику функции  $y = f(x) = x^4 - 4k^3x + 3k^2$ .

#### Комментарий

Для того чтобы график функции касался оси абсцисс, необходимо, чтобы ось абсцисс была касательной к этому графику. Зная уравнение оси абсцисс:  $y = 0$  (то есть

Если  $x_0$  — абсцисса точки касания, то, учитывая геометрический смысл производной, получаем  $f'(x_0) = 0$ . Чтобы касательной была именно ось абсцисс (а не параллельная ей прямая, имеющая такой же угловой коэффициент), достаточно проверить, что  $f(x_0) = 0$ .

Поскольку  $f'(x) = 4x^3 - 4k^3$  то  $f'(x) = 0$ , если

$$4x^3 - 4k^3 = 0.$$

Следовательно,  $x^3 = k^3$  и, учитывая возрастание функции  $y = t^3$ , получаем единственный корень  $x = k$ .

Тогда

$$f(x_0) = k^4 - 4k^4 + 3k^2 = 3k^2 - 3k^4$$

Выясним, при каких значениях  $k$   $f(x_0) = 0$ .

Получаем

$$3k^2 - 3k^4 = 0,$$

$$3k^2(1 - k^2) = 0,$$

$$3k^2(1 - k)(1 + k) = 0,$$

$$k = 0, k = 1, k = -1.$$

Следовательно, при этих значениях  $k$  график функции  $f(x)$  касается оси абсцисс. Наименьшее из этих значений  $k = -1$ .

Ответ:  $-1$ . ◀

$y = 0x + 0$ ), заданную ситуацию можно исследовать двумя способами.

1. Если касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  имеет уравнение  $y = 0$ , то угловой коэффициент касательной равен 0. Тогда по геометрическому смыслу производной  $f'(x_0) = 0$ . Но угловой коэффициент 0 имеет не только ось абсцисс, но и все прямые, параллельные оси  $Ox$  (рис. 95, а, б). Чтобы касательной была именно ось абсцисс, необходимо, чтобы точка касания  $M$  находилась на оси  $Ox$  (рис. 95, а), то есть чтобы ордината этой точки равнялась 0, следовательно,  $f(x_0) = 0$ .

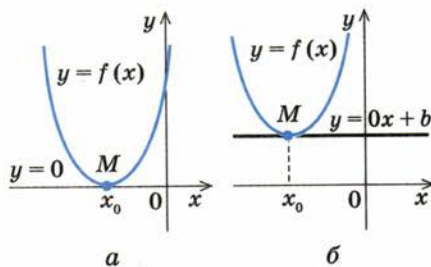


Рис. 95

2. Можно записать также уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  и сравнить полученное уравнение с уравнением оси абсцисс:  $y = 0x + 0$

(снова получим те же условия  $f'(x_0) = 0$  и  $f(x_0) = 0$ ).

### Задача 3

Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\cos 2x + \frac{a}{\sin x} = -7 \text{ имеет хотя бы один корень.}$$

Решение

▶ ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ . На этой ОДЗ заданное уравнение равносильно

Комментарий

Сначала начнем решать заданное уравнение по схеме решения тригоно-

$$\text{уравнениям } 1 - 2 \sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7,$$

$$a = 2 \sin^3 x - 8 \sin x.$$

Замена  $\sin x = t$  (где  $t \in [-1; 1]$  и  $t \neq 0$  на ОДЗ) дает равносильное уравнение

$$2t^3 - 8t = a. \quad (1)$$

Для заданного уравнения требование задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение (1) будет иметь хотя бы один ненулевой корень в промежутке  $[-1; 1]$ .

Для этого достаточно обеспечить, чтобы число  $a$  входило в область значений функции  $f(t) = 2t^3 - 8t$  при  $t \in [-1; 1]$  и  $t \neq 0$ . Найдем эту область значений. Производная  $f'(t) = 6t^2 - 8$  существует на всей числовой прямой, и  $f'(t) = 0$  при  $6t^2 - 8 = 0$ ,  $t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$  (то есть критические точки не входят в отрезок  $[-1; 1]$ , поскольку  $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ).

Следовательно, на всем заданном отрезке  $f'(t)$  сохраняет свой знак. Поскольку  $f'(0) = -8 < 0$ , то  $f'(t) < 0$  при  $t \in [-1; 1]$ , то есть функция  $f(t)$  убывает на отрезке  $[-1; 1]$ . Тогда ее наибольшее значение на этом отрезке равно  $f(-1) = 6$ , а наименьшее —  $f(1) = -6$ .

Учитывая, что  $f(0) = 0$ , получаем, что при  $t \in [-1; 1]$  и  $t \neq 0$  непрерывная функция  $f(t)$  принимает все значения из промежутков  $[-6; 0)$  и  $(0; 6]$ . Именно при этих значениях  $a$  и будет выполняться требование задачи.  
**Ответ:**  $[-6; 0) \cup (0; 6]$ .  $\triangleleft$

метрических уравнений (см. учебник для 10 класса, § 20), а именно: *попробуем привести все тригонометрические функции к одному аргументу; если удалось привести к одному аргументу, то попробуем привести все тригонометрические выражения к одной функции...* Указанные два этапа можно выполнить одновременно, используя формулу  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ .

После замены  $\sin x = t$  для исследования существования корней у полученного кубического уравнения удобно использовать графическую иллюстрацию решений (приведя уравнение к виду  $f(t) = a$ ). Также можно найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции  $f(t)$ , заданной на отрезке, или воспользоваться свойствами функции  $f(t)$  на отрезке  $[-1; 1]$ , исследованными с помощью производной (см. решение).

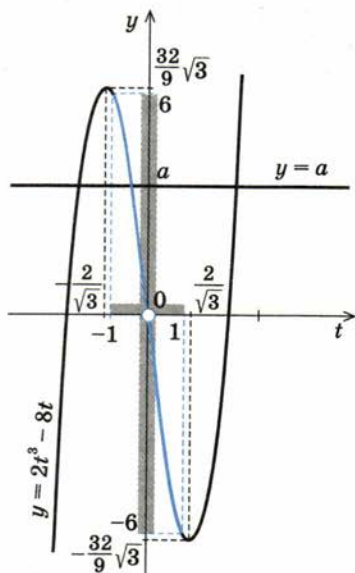


Рис. 96

Напомним, что после замены переменной требование задачи в задачах с параметрами чаще всего изменяется, поэтому необходимо выяснить новое требование для уравнения (1).

Отметим, что достаточно наглядной является графическая иллюстрация решения (рис. 96), но исследование функции  $f(t)$  для построения графика более громоздко, чем в приведенном решении.

**Задача 4** При каких отрицательных значениях  $a$  уравнение  $\sin^3 x \times \cos x = a$  имеет единственный корень на интервале  $(0; \pi)$ ?

#### Комментарий

Поскольку в условии задачи идет речь о количестве корней уравнения, то для его исследования удобно использовать графическую иллюстрацию решения. Для этого исследуем функцию  $y = \sin^3 x \cos x$  с помощью производной и построим на интервале  $(0; \pi)$  график этой функции, а также график функции  $y = a$ . Количество точек пересечения этих графиков и будет равняться количеству корней заданного уравнения. При построении графика функции  $y = \sin^3 x \cos x$  удобно воспользоваться непрерывностью функции на всей числовой прямой и построить график на отрезке  $[0; \pi]$ , а затем исключить крайние точки. Для определения критических точек функции  $y$  приходится решать уравнение  $\sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$ , из которого получаем  $\sin^2 x = 0$  или  $3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0$ . Последнее уравнение — однородное, решается делением на наивысшую степень одной из переменных. Учитывая, что случай  $\sin^2 x = 0$  уже рассмотрен, удобно обе части полученного однородного уравнения разделить на  $\sin^2 x \neq 0$  (напомним, что при делении на  $\cos^2 x$  случай  $\cos x = 0$  необходимо рассмотреть отдельно).

#### Решение

► Исследуем функцию  $y = \sin^3 x \cos x$  на интервале  $(0; \pi)$ .

Область определения функции  $y = \sin^3 x \cos x$  — множество всех действительных чисел, следовательно, заданный интервал полностью входит в область определения функции.

Найдем точки пересечения с осями координат. На оси  $Oy$   $x = 0$ , тогда  $y = 0$  (но значение  $x = 0$  не принадлежит заданному промежутку). На оси  $Ox$   $y = 0$ :  $\sin^3 x \cos x = 0$ , откуда  $\sin x = 0$  или  $\cos x = 0$ , то есть  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , или  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . В интервал  $(0; \pi)$  входит только значение  $x = \frac{\pi}{2}$  (а в отрезок  $[0; \pi]$  входят точки  $x = 0$  и  $x = \pi$ , которые также являются нулями функции).

Производная  $y' = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x)$  существ-

вует на всей области определения функции. Следовательно, в критических точках  $y' = 0$ , то есть

$$\sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \text{ Тогда} \\ \sin^2 x = 0 \quad (1)$$

или

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) имеет корни  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , которые не принадлежат интервалу  $(0; \pi)$ . Если  $\sin x \neq 0$ , то, разделив обе части однородного уравнения (2) на  $\sin^2 x \neq 0$ , получим равносильное ему уравнение  $3 \operatorname{ctg}^2 x - 1 = 0$ . Отсюда  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  или  $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Тогда  $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , или  $x = \frac{2\pi}{3} + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Интервалу  $(0; \pi)$  из множества корней, заданных первой формулой, принадлежит только  $x = \frac{\pi}{3}$ , а из множества корней, заданных второй формулой, —

только  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

Отмечаем эти критические точки на интервале  $(0; \pi)$  и выясняем поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 97).

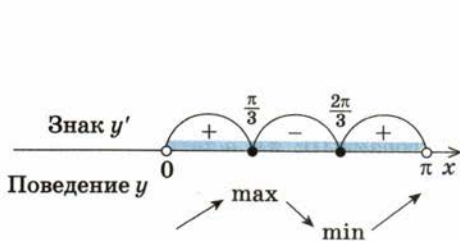


Рис. 97

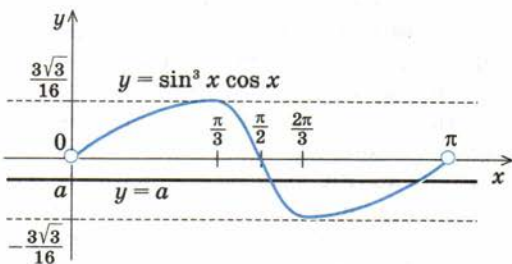


Рис. 98

Находим значения функции в критических точках  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ ,  $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$  и строим график функции на интервале  $(0; \pi)$  (рис. 98). На этом же рисунке строим и график функции  $y = a$  при  $a < 0$ . Как видим, при  $a < 0$  уравнение  $\sin^3 x \cos x = a$  имеет единственный корень на интервале  $(0; \pi)$  только при

$$a = -\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Ответ:  $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ .  $\triangleleft$

### Упражнения

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$y = \frac{a^2 - 1}{3} x^3 - (a - 1)x^2 + 2x + 1 \text{ возрастает при всех } x \in \mathbb{R}.$$

2 (РЭА). При каком значении  $a$  прямая  $16x + y - 13 = 0$  является касательной к графику функции  $y = \frac{a+x^2}{x^2}$ ?

3 (МИСиС). Найдите наибольшее значение  $k$ , при котором график функции  $y = x^2 + 2(k+1)x + 2k^2 + k - 1$  касается оси абсцисс.

4. Зная, что уравнение  $x^3 + 2 = ax$  при  $x > 0$  имеет только один корень, найдите этот корень и соответствующее значение  $a$ .

5 (ГАНГ). График функции  $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$  пересекает ось  $Ox$  в точке с абсциссой  $x = -2$  и касается оси  $Ox$  в точке с абсциссой  $x = 7$ . Найдите точки локального минимума этой функции.

6 (ВолГТУ). Найдите значения  $a$  и  $b$ , при которых прямая  $y = 7x - 2$  касается графика функции  $y = ax^2 + bx + 1$  в точке  $A(1; 5)$ .

7 (РЭА). Найдите значение  $a$ , при котором касательная к параболу  $y = 2x^2 + 3x + 5$  в точке  $x_0 = -2$  является касательной к параболу  $y = -x^2 + 4x + a$ .

8 (МАИ). Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция

$f(x) = \frac{3-x^2}{a-2-3x-x^2}$  не является убывающей ни на каком отрезке, который принадлежит ее области определения.

9 (ЕГЭ С). При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^3 + \frac{48}{x} = a$  имеет хотя бы один корень?

10 (ЕГЭ С). Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $4 \sin^3 x = a + 7 \cos 2x$  не имеет корней.

11 (ЕГЭ С). Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$3 \cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -17$$

имеет хотя бы один корень.

12 (ЕГЭ С). Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$7 - 2 \cos x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

имеет хотя бы один корень.

13 (ГУУ). Стороны треугольника лежат на осях координат и касательной к графику функции  $y = x^2 + 4x + 4$  в точке, абсцисса  $a$  которой удовлетворяет условию  $-1 \leq a \leq 0$ . Найдите значение  $a$ , при котором площадь треугольника будет наибольшей.



## § 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет производную  $f'(x_0)$ .

*Дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется произведение производной  $f'(x_0)$  на приращение аргумента  $\Delta x$  в точке  $x_0$ .*

Дифференциал функции обозначается символом  $df(x_0)$ . Поэтому

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (1)$$

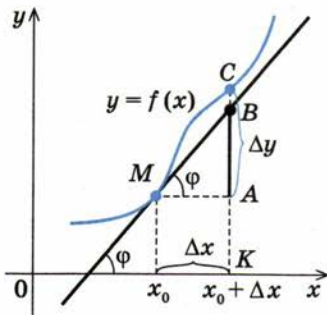


Рис. 99

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала. На рисунке 99  $MB$  — касательная в точке  $M$  к графику функции  $y = f(x)$ , длина отрезка  $MA = \Delta x$ . Учитывая, что согласно геометрическому смыслу производной  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$ , из прямоугольного треугольника  $AMB$  получаем  $AB = AM \operatorname{tg} \varphi$ , то есть  $AB = f'(x_0) \Delta x$ . Поэтому длина отрезка  $AB$  равна величине дифференциала функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ :  $AB = df(x_0)$ .

Исходя из того, что  $AB = BK - AK$ , можно сформулировать геометрический смысл дифференциала:  $df(x_0) = BK - AK$ .

*С геометрической точки зрения  $df(x_0)$  является приращением ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , которому соответствует приращение аргумента  $\Delta x$ .*

При нахождении дифференциала функции  $f(x)$  в любой точке  $x \in D(f)$  на основании формулы (1) получим:

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Это равенство справедливо для любой функции. В частности, для функции  $f(x) = x$  равенство (2) обращается в следующее равенство:  $df(x) = 1 \cdot \Delta x$ . Отсюда получаем, что дифференциал аргумента  $dx$  равен приращению аргумента  $\Delta x$ :  $dx = \Delta x$ .

Подставляя  $dx$  вместо  $\Delta x$  в формулу (2), получаем:

$$df(x) = f'(x) dx. \quad (3)$$

Найденное равенство является основанием для нахождения дифференциала функции.

**Задача 1** Найдите  $df(x)$  для функции  $f(x) = \sin x$ .

**Решение**

► Поскольку  $f'(x) = \cos x$ , то  $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$ . ◀

Равенство (3) также показывает, что между понятием производной и понятием дифференциала существует тесная связь. Поэтому и **правила**

нахождения дифференциалов аналогичны правилам дифференцирования функций, а именно:

1.  $dC = 0$ .
2.  $d(Cu) = C \cdot du$ .
3.  $d(u \pm v) = du \pm dv$ .
4.  $d(uv) = (du) \cdot v + (dv) \cdot u$ .
5.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(du) \cdot v - (dv) \cdot u}{v^2}$ .

Обоснуем, например, правило 2:

$$d(Cu) = (Cu)' dx = Cu' dx = Cdu.$$

Другие правила обосновываются аналогично (обоснуйте их самостоятельно).

Вспомним, что согласно определению производной  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ . Используя понятие бесконечно малой функции (таблица 11), это равенство можно записать так:  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда приращение  $\Delta f$  дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $f(x)$  равно:

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

В этом равенстве первое слагаемое правой части является дифференциалом функции, следовательно,

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(x) \cdot \Delta x. \quad (4)$$

Учитывая, что  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем, что второе слагаемое при  $\Delta x \rightarrow 0$  стремится к нулю быстрее, чем  $\Delta x$ . В этом случае говорят, что  $\alpha(x) \cdot \Delta x$  является величиной более высокого порядка малости, чем  $\Delta x$ , то есть второе слагаемое значительно меньше первого слагаемого. Это позволяет сделать следующий вывод:

*дифференциал функции  $df(x_0)$  является главной частью приращения функции.*

С геометрической точки зрения (см. рис. 99) при  $\Delta x \rightarrow 0$  расстояние  $BC$  становится значительно меньше, чем расстояние  $AB = df(x_0)$ , поэтому  $AB = df(x_0)$  — главная (т. е. большая) часть отрезка  $AC = \Delta f$ .

Если в равенстве (4) пренебречь вторым слагаемым (которое при малых значениях  $\Delta x$  значительно меньше первого слагаемого), то получим приближенное равенство  $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ , то есть  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ . Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (5)$$

Последнее равенство используется для разных приближенных вычислений функций в тех случаях, когда  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  нетрудно вычислить.

**Задача 2** Пользуясь формулой (5), найдите приближенное значение  $\sqrt{9,06}$ .

## Решение

► Если рассмотреть функцию  $f(x) = \sqrt{x}$ , то  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Возьмем  $x_0 = 9$ . Тогда  $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{9} = 3$  и  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$ . По формуле (5) имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

При  $\Delta x = 0,06$  и  $x_0 = 9$  получаем

$$\sqrt{9,06} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 3,01. \triangleleft$$

## Комментарий

При вычислении значения  $\sqrt{9,06}$  по формуле (5):

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$  естественно рассмотреть функцию  $f(x) = \sqrt{x}$  и взять за  $x_0$  число 9, поскольку 9,06 близко к 9. Тогда  $\Delta x = 0,06$  и значения  $f(x_0) = \sqrt{x_0}$  и  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$  легко находятся при  $x_0 = 9$ .

Отметим, что значение  $\sqrt{9,06}$ , вычисленное с помощью калькулятора, равно 3,00998...

## Упражнения

1. Найдите дифференциал функции:

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

2)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ;

3)  $f(x) = \arcsin x$ ;

4)  $f(x) = \sin^2 3x$ ;

5)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot \operatorname{ctg} x$ ;

6)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$ .

2. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1)  $\sqrt{4,08}$ ;

2)  $\sqrt{9,06}$ ;

3)  $\sqrt{1,004}$ ;

4)  $\sqrt{25,012}$ .

3. Докажите приближенную формулу  $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ .

4. Вычислите значение:

1)  $1,001^{100}$ ;

2)  $1,03^{200}$ ;

3)  $0,995^6$ ;

4)  $0,998^{20}$ .

5. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,03\right)$ ;

2)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$ ;

3)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right)$ ;

4)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right)$ .

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

- Определите сумму решений уравнения:
  - $|x + 5| = 7$ ;
  - $|2x - 1| = 5$ ;
  - $|x + 7| = 2$ ;
  - $|4x - 8| + |2 - x| = 4$ ;
  - $2|x - 3| - |3 - x| = 5$ ;
  - $5|x + 4| - 2|4 - x| = 4$ .
- Определите  $x + y$ , если:
  - $|x - y| + |4 - x| = 0$ ;
  - $|2x - y| + 2|2 - x| = 0$ .
- Определите  $xy$ , если:
  - $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$ ;
  - $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$ .
- Найдите количество целых решений неравенства:
  - $|x - 1| \leq 2$ ;
  - $|x + 2| \leq 4$ ;
  - $|x - 3| \leq 6$ ;
  - $|x + 4| < 5$ .
- Найдите количество целых решений неравенства в промежутке  $[-5; 5]$ :
  - $|x + 2| \geq 3$ ;
  - $|x - 1| \geq 4$ ;
  - $|x - 2| \geq 3$ ;
  - $|2x - 1| \geq 3$ .
- Определите наибольшее целое решение неравенства:
  - $|3x - 1| < 2x + 2$ ;
  - $|2 - 3x| - x \leq 8$ ;
  - $|7 - 3x| - 2x \leq 2$ .
- Определите наименьшее целое решение неравенства:
  - $|1 - 2x| - x \leq 10$ ;
  - $|3x - 2| + 2x \leq 8$ ;
  - $|4x - 4| + 4x \geq 5$ .
- Определите наименьшее решение неравенства:
  - $|3x + 1| \leq x + 7$ ;
  - $|2x + 3| \leq x + 12$ ;
  - $|4x + 3| \leq x + 21$ .
- Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет решение:
  - $|2x - 1| = 1 - 4a$ ;
  - $|3x + 2| = 3 - 4a$ .
- Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет решение:
  - $|2x - 1| = 4a + 1$ ;
  - $|3x + 3| = 5a - 7$ .
- Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет решение:
  - $2|x - 3| - a|3 - x| = 5$ ;
  - $3|x - 2| + a|2 - x| = -4$ .
- Найдите наименьшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет решение:
  - $8|x - 3| + a|3 - x| = 5$ ;
  - $3|x - 2| - a|2 - x| = -6$ .
- Определите значение параметра  $m$ , при котором уравнение имеет точно четыре решения:
  - $|x(|x - 5|) = m$ ;
  - $|(x + 1)(|x + 1| - 3)| = m$ ;
  - $|2(5 - |x|)x| = m$ .
- (МГСУ). При каком наименьшем целом значении параметра  $m$  уравнение  $x^2 - |16x - 48| = m$  имеет четыре решения?
- (МГСУ). При каком значении параметра  $m$  уравнение  $x^2 - |14x - 28| = m$  имеет единственное решение?
- К какому числу стремится значение функции, если:
  - $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}$ ,  $x \rightarrow 1$ ;
  - $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ ,  $x \rightarrow 1$ ;
  - $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $x \rightarrow 1$ ;
  - $f(x) = \frac{2}{\pi^x - \pi^{-x}}$ ,  $x \rightarrow 1$ ;

5)  $f(x) = \cos x + \sin x, x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ;

6)  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x, x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ?

17. Найдите предел:

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ ;

6)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ .

18. Найдите асимптоты графика функции:

1)  $y = \frac{2x^2+x}{x-3}$ ;

2)  $y = \frac{x^3+1}{x^3-2x+4}$ ;

3)  $y = \ln(3-x^2)$ ;

4)  $y = \log_2(\operatorname{arctg} x)$ .

19. Исследуйте на непрерывность функцию:

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ;

2)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ;

3)  $f(x) = \sin x$ ;

4)  $f(x) = \cos x$ ;

5)  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

6)  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

7)  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \end{cases}$

8)  $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

20. Исследуйте на непрерывность функцию на указанном промежутке:

1)  $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}, [-5; 0]$ ;

2)  $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}, [0; 5]$ .

21. Найдите точки разрыва функции:

1)  $\begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ 1 & \text{при } x = -2; \end{cases}$

2)  $y = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } x \neq 1, \\ 3 & \text{при } x = 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \end{cases}$

4)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \text{ — несократимая дробь, } x = \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

Исследуйте функцию и постройте ее график (22–23).

22. 1)  $y = \frac{4x}{x^2+1}$ ;

2)  $y = \frac{2x}{x^2+2}$ ;

3)  $y = \frac{x^3-x}{x^2-4}$ ;

4)  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ ;

5)  $y = \frac{x^2-1}{x^2-9}$ ;

6)  $y = \frac{x^2-4}{x^2-25}$ ;

7)  $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$ ;

8)  $y = \frac{1}{x^2+5x+6}$ .

23. 1)  $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ ;      2)  $y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x$ ;      3)  $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ;  
 4)  $y = x^4 + 6x^2 + 9$ ;      5)  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ;      6)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ ;  
 7)  $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ ;      8)  $y = \frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$ .

24. Решите неравенство:

- 1)  $f'(x) < g'(x)$ , если  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ ,  $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$ ;  
 2)  $f'(x) + g'(x) \leq 0$ , если  $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ ,  $g(x) = 9x^2 + 72x$ .

25. Решите уравнение:

- 1)  $f'(x) = \frac{2}{x} \cdot f(x) = 0$ , если  $f(x) = x^3 \ln x$ ;  
 2)  $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$ , если  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

26. Найдите область определения функции и ее производную:

- а)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ ;      б)  $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ .

27. Найдите производную функции  $y(x)$  и вычислите ее значение в точке  $x_0$ :

- 1)  $y = \sqrt{\sin\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)}$ ,  $x_0 = 1$ ;      2)  $y = \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ,  $x_0 = 1$ ;  
 3)  $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2^x + x^2}$ ,  $x_0 = 1$ ;      4)  $y = \log_{x^2} 4 + \log_{-x} 2$ ,  $x_0 = -e$ ;  
 5)  $y = \log_x 2 + \log_{x^2}(x^2 + 1)$ ,  $x_0 = e$ ;      6)  $y = \ln^2\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{-x^2} \cdot e^x$ ,  $x_0 = \pi$ ;  
 7)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;      8)  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

28. Под каким углом\* пересекается с осью  $Oy$  график функции:

- 1)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ;      2)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ?

29 (МИСиС). 1) На кривой  $y = x^2 - 7x + 3$  найдите точку, в которой касательная параллельна прямой  $y = -5x + 3$ .

2) В каких точках касательные к кривой  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$  параллельны прямой  $y = 2x - 1$ ?

30. 1) Найдите точку, в которой касательная к графику функции  $y = x^2$  перпендикулярна к прямой  $2x - y + 1 = 0$ .

2) Найдите на графике функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{14}{5}$  все точки, в каждой из которых касательная к графику перпендикулярна к прямой  $5x - 3y + 2 = 0$ .

\* Имеется в виду угол между осью  $Oy$  и касательной к графику функции, проведенной в точке пересечения графика и оси.

31. 1) В какой точке кривой  $y = ax^2 + bx + c$  необходимо провести касательную к ней для того, чтобы касательная проходила через начало координат? Исследуйте, при каких значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  задача имеет решение.  
2) В какой точке кривой  $y = x^2 - 5x + 6$  необходимо провести касательную, чтобы она проходила через точку  $M(a; b)$ ? Исследуйте, при каких значениях  $a$  и  $b$  задача имеет решение.
32. 1) Найдите угол между касательными к графику функции  $y = x^3 - x$  в точках с абсциссами  $-1$  и  $0$ .  
2) Найдите угол между касательными к графику функции  $y = x^2$ , проходящими через точку с координатами  $(0; -1)$ .
33. 1) Из точки  $A(1; 6)$  проведены касательные к окружности  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ . Составьте уравнение этих касательных.  
2) Составьте уравнение касательных к кривой  $y = x^2 - 4x + 3$ , проходящих через точку  $M(2; -5)$ .
34. 1) Составьте уравнения касательных к кривым  $y = 2x^2 - 5$  и  $y = x^2 - 3x + 5$ , проходящих через точки пересечения этих кривых.  
2) Составьте уравнения касательных к графикам функций  $y = \sqrt{2x}$  и  $y = \frac{x^2}{2}$ , проведенных через точку пересечения этих кривых.
- 35 (РЭА). 1) При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = x^3 + 3(a - 7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$  имеет точку максимума?  
2) При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + (a + 2)x^2 + (a - 1)x + 2$  имеет точку минимума?
- 36 (МГУ, хим. ф-т). 1) Найдите наименьшее из расстояний от точки  $M$  с координатами  $(0; -2)$  до точек  $(x; y)$ , таких, что  $y = \frac{16}{\sqrt{3x^3}} - 2$ ,  $x > 0$ .  
2) Найдите расстояние от точки  $M(1; 0)$  до графика функции  $y = x^2 + 6x + 10$  (то есть наименьшее из всех расстояний от точки  $M$  до точек графика).
37. 1) Найдите координаты точки  $M$ , лежащей на графике функции  $y = 1 + \cos x$  при  $0 \leq x \leq \pi$  и наименее удаленной от прямой  $x\sqrt{3} + 2y + 4 = 0$ .  
2) Найдите координаты точки  $M$ , которая лежит на графике функции  $y = 1 - \sin x$  при  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  и которая наименее удалена от прямой  $x - \sqrt{2}y - 5 = 0$ .
38. 1) Найдите расстояние между графиками функций  $y = x^2$  и  $y = x - 1$  (то есть наименьшее из всех расстояний между точками этих графиков).  
2) Найдите расстояние между графиками функций  $y = -x$  и  $y = \frac{1}{x}$ .

- 39 (ННГУ). 1) Фигура ограничена параболой  $y = x^2 + 1$  и отрезками прямых  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . В какой точке  $M$  данной кривой  $y = x^2 + 1$ ,  $x \in [1; 2]$ , необходимо провести касательную, чтобы она отсекала от этой фигуры трапецию наибольшей площади?
- 2) В фигуру, ограниченную линиями  $y = 3x$  и  $y = x^2$ , вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найдите площадь этого прямоугольника.
40. 1) Найдите все значения  $a$ , при которых функция  $f(x) = a \cdot 8^x - (3a - 2) \cdot 4^x + 3(3a - 2) \cdot 2^x$  не имеет экстремумов.
- 2) Найдите все значения  $a$ , при которых функция  $f(x) = a \cdot 8^x + (3a + 1) \cdot 4^x + (9a + 1) \cdot 2^x - 1$  не имеет экстремумов.
- 41 (МТУСИ). 1) Найдите число, которое в сумме со значениями своего квадрата дает наименьшее значение этой суммы.
- 2) Найдите такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.
- 42 (ГАУ). 1) Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет наибольший объем.
- 2) Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет наибольшую боковую поверхность.
- 43 (МПГУ). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и образует с плоскостью основания угол  $\alpha$ . При каком значении  $\alpha$  объем пирамиды будет наибольшим?



## СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

**1. Из истории дифференциального исчисления.** Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется *дифференциальным исчислением*. Приращения аргумента и функции вида  $\Delta x$  и  $\Delta f$ , представляющие собой разности, играют заметную роль в работе с производными. Поэтому естественно появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculus differentialis* нового исчисления, которое переводится как *исчисление разностей*; это название появилось уже в конце XVII в., то есть во время возникновения нового метода.

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова *dérivée*, которое ввел в 1797 г. Ж. Лагранж (1736–1813); он же ввел современное обозначение  $y'$ ,  $f'$ . Такое название отражает смысл понятия: функция  $f'(x)$  происходит от  $f(x)$ , является производной от  $f(x)$ .

Дифференциальное исчисление создано сравнительно недавно, в конце XVII в. Тем удивительнее, что задолго до этого Архимед (ок. 287–212 гг. до н. э.) не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль (используя при этом предельные переходы), но и смог найти максимум функции  $f(x) = x^2(a - x)$ . Развитию начал дифференциального исчисления способствовали работы математика и юриста П. Ферма (1601–1665), который в 1629 г. предложил способы нахождения экстремумов многочленов. Следует подчеркнуть, что фактически в своих работах Ферма активно применял предельные переходы, имея простейшее дифференциальное условие максимума и минимума. Развитию нового исчисления способствовали также работы Р. Декарта (1596–1650), разработавшего метод координат и положившего начало аналитической геометрии.

Систематическое учение о производных было развито И. Ньютоном (1643–1727) и Г. Лейбницем (1646–1716), которые независимо друг от друга создали дифференциальное исчисление. Ньютон исходил в основном из задач механики (ньютонов анализ создавался одновременно с ньютоновой классической механикой), а Лейбниц преимущественно исходил из геометрических задач. В частности, к определению производной Ньютон пришел, решая задачу о мгновенной скорости, а Лейбниц — рассматривая геометрическую задачу о проведении касательной к кривой.

В дальнейшем благодаря работам Л. Эйлера (1707–1783), О. Коши (1789–1857), К. Гаусса (1777–1855) и других математиков дифференциальное исчисление было превращено в целостную теорию для исследования функциональных зависимостей.

**2. О понятии действительного числа.** Хотя математический анализ возник в конце XVII в., однако полное его обоснование было дано только в конце XIX в., когда вслед за теорией пределов, созданной О. Коши, сразу была построена немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831–1916), К. Вейерштрассом (1815–1897) и Г. Кантором (1845–1918) в нескольких формах теория действительного числа.

Первые представления о числах формировались под влиянием практики. С давних времен числа применялись в ходе счета и измерения величин.

Ответ на вопрос «Сколько элементов содержит данное конечное множество?» всегда выражается или натуральным числом, или числом нуль. Следовательно, множество

$$\{0; 1; 2; \dots\}$$

всех неотрицательных чисел удовлетворяет всем потребностям счета.

Иначе с измерением величин. Расстояние между двумя пунктами может равняться 3,5 км, площадь комнаты — 16,45 кв. м и т. п.

Исторически положительные действительные числа появились как отношение длин отрезков.

С открытием несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его стороной стало понятным, что отношение длин отрезков не всегда можно выразить не только натуральным, но и рациональным числом. Чтобы числовое значение каждого отрезка при фиксированной единице измерения было определено, необходимо было ввести новые числа — иррациональные.

Все практические измерения величин имеют только приближенный характер. Их результат с необходимой точностью можно выразить с помощью рациональных дробей или конечных десятичных дробей. Например, измеряя диагональ квадрата со стороной 1 м с точностью до 1 см, мы выясним, что ее длина приближенно равна 1,41 м. Измеряя с точностью до 1 мм, получим, что эта длина приближенно равна 1,414 м.

Однако в математике часто уклоняются от приближенного характера практических измерений. Последовательный теоретический подход к измерению длин отрезков приводит к необходимости рассмотрения бесконечных десятичных дробей. (Именно такими дробями являются числа  $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ ,  $\pi = 3,14159265\dots$ .)

Отношение длины любого отрезка к длине отрезка, принятого за единицу измерения, всегда можно выразить числом, представленным в виде бесконечной десятичной дроби.

Полная теория действительных чисел достаточно сложна и не входит в программу средней школы. Она обычно рассматривается в курсах математического анализа. Однако с одним из способов ее построения мы ознакомимся в общих чертах.

1. Пусть:

- а) каждому действительному числу соответствует (как его запись) бесконечная десятичная дробь:

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots;$$

- б) каждая бесконечная десятичная дробь является записью действительного числа.

Но при этом естественно считать десятичную дробь, оканчивающуюся бесконечной последовательностью девяток, только другой записью числа, представленного десятичной дробью, оканчивающейся бесконечной последовательностью нулей (см. также с. 9):  $0,9999\dots = 1,0000\dots$ ;  $12,765999\dots = 12,766000\dots$

Только исключив из рассмотрения десятичные дроби с девяткой в периоде, получим взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей.

Число  $a_0$  — целая часть положительного числа  $x$ ,

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \text{ — дробная часть числа } x.$$

Число  $x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$  называют десятичным приближением  $x$  с точностью до  $10^{-n}$  с недостатком, а число  $x'_n = x_n + 10^{-n}$  — десятичным приближением с точностью до  $10^{-n}$  с избытком для числа

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Если число  $x$  отрицательно, то есть

$$x = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \text{ то считают, что}$$

$$x'_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \text{ и } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

- Вводят правило сравнения двух действительных чисел. По определению число  $x$  меньше числа  $y$ , когда по меньшей мере для одного  $n$  выполняется неравенство  $x_n < y_n$ , где  $x_n$  и  $y_n$  — десятичные приближения с точностью до  $10^{-n}$  с недостатком для чисел  $x$  и  $y$ . (Мы воспользовались тем, что правило сравнения конечных десятичных дробей уже известно.)
- Определяют арифметические действия над действительными числами (при этом также пользуются тем, что эти действия уже определены для конечных десятичных дробей).

Суммой двух действительных чисел  $x$  и  $y$  (обозначается  $x + y$ ) называют такое действительное число  $z$ , что для любого  $n$  выполняются неравенства

$$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

В курсах математического анализа доказывается, что такое число существует и оно единственное.

Аналогично произведением двух неотрицательных чисел  $x$  и  $y$  называют такое число  $z$  (обозначают  $xy$ ), что при любом  $n$  выполняются неравенства

$$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

Такое число существует, и оно единственное.

Напомним, что примеры выполнения таким образом определенных действий сложения и умножения действительных чисел было рассмотрены в курсе алгебры 8 класса (см. также с. 10).

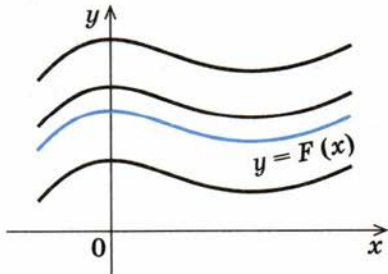
Воспользовавшись тем, что произведение неотрицательных чисел  $|x|$  и  $|y|$  уже определено, полагают, что для действительных чисел разных знаков  $xy = -|x| \cdot |y|$ , а для чисел одинаковых знаков —  $xy = |x| \cdot |y|$ .

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: разностью  $x - y$  чисел  $x$  и  $y$  называется такое число  $z$ , что  $y + z = x$ . Деление определяется как действие, обратное умножению: частным  $x : y$  называется такое число  $z$ , что  $yz = x$ .

- Показывают, что неравенства и арифметические операции, определенные выше, сохраняют основные свойства, присущие им во множестве рациональных чисел (соответствующие свойства для операций сложения и умножения приведены в § 20).

## § 14. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Таблица 18

1. Первообразная	
Определение	Пример
<p>Функция <math>F(x)</math> называется <i>первообразной для функции <math>f(x)</math></i> на заданном промежутке, если для любого <math>x</math> из этого промежутка <math>F'(x) = f(x)</math>.</p>	<p>Для функции <math>f(x) = x^3</math> на интервале <math>(-\infty; +\infty)</math> первообразной является функция <math>F(x) = \frac{x^4}{4}</math>, поскольку</p> $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$
2. Основное свойство первообразной	
Свойство	Геометрический смысл
<p>Если функция <math>F(x)</math> является первообразной для функции <math>f(x)</math> на данном промежутке, а <math>C</math> — произвольной постоянной, то функция <math>F(x) + C</math> также является первообразной для функции <math>f(x)</math>, при этом любая первообразная для функции <math>f(x)</math> на данном промежутке может быть записана в виде <math>F(x) + C</math>, где <math>C</math> — произвольная постоянная.</p> <p>Пример</p> <p>Поскольку функция <math>F(x) = \frac{x^4}{4}</math> является первообразной для функции <math>f(x) = x^3</math> на интервале <math>(-\infty; +\infty)</math> (см. выше), то <i>общий вид всех первообразных для функции <math>f(x) = x^3</math></i> можно записать следующим образом: <math>\frac{x^4}{4} + C</math>, где <math>C</math> — произвольная постоянная.</p>	<p>Графики любых первообразных для данной функции получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси <math>Oy</math>.</p> 

3. Неопределенный интеграл		
Определение		Пример
<p>Совокупность всех первообразных для данной функции <math>f(x)</math> называется неопределенным интегралом и обозначается символом <math>\int f(x) dx</math>, то есть</p> $\int f(x) dx = F(x) + C,$ <p>где <math>F(x)</math> — одна из первообразных для функции <math>f(x)</math>, а <math>C</math> — произвольная постоянная.</p>		$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$ <p>поскольку для функции <math>f(x) = x^3</math> на интервале <math>(-\infty; +\infty)</math> все первообразные можно записать следующим образом: <math>\frac{x^4}{4} + C</math> (см. пункт 2 табл. 18).</p>
4. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования)		
<p>1. Если <math>F</math> — первообразная для <math>f</math>, а <math>G</math> — первообразная для <math>g</math>, то <math>F + G</math> — первообразная для <math>f + g</math>. Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.</p>		$1. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ <p>Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.</p>
<p>2. Если <math>F</math> — первообразная для <math>f</math> и <math>c</math> — постоянная, то <math>cF</math> — первообразная для функции <math>cf</math>.</p>		$2. \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx,$ <p>где <math>c</math> — постоянная. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.</p>
<p>3. Если <math>F</math> — первообразная для <math>f</math>, а <math>k</math> и <math>b</math> — постоянные (причем <math>k \neq 0</math>), то <math>\frac{1}{k} F(kx + b)</math> — первообразная для функции <math>f(kx + b)</math>.</p>		$3. \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$
5. Таблица первообразных (неопределенных интегралов)		
Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x) + C$ , где $C$ — произвольная постоянная	Запись с помощью неопределенного интеграла
0	$C$	$\int 0 \cdot dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^\alpha$ ( $\alpha \neq -1$ )	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ( $\alpha \neq -1$ )
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$

Продолж. табл. 18

$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$e^x$	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

### Объяснение и обоснование

**1. Понятие первообразной. Основное свойство первообразной.** В первом разделе мы по заданной функции находили ее производную и применяли эту операцию дифференцирования к решению разнообразных задач. Одной из таких задач было нахождение скорости и ускорения прямолинейного движения по известному закону изменения координаты  $x(t)$  материальной точки:

$$v(t) = x'(t), \quad a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Например, если в начальный момент времени  $t = 0$  скорость тела равна нулю, то есть  $v(0) = 0$ , то при свободном падении тело за промежуток времени  $t$  пройдет путь

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда скорость и ускорение находят с помощью дифференцирования:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt, \quad a(t) = v'(t) = (gt)' = g.$$

Важно уметь не только находить производную заданной функции, но и решать обратную задачу: находить функцию  $f(x)$  по ее заданной производной  $f'(x)$ . Например, в механике часто приходится определять координату  $x(t)$ , зная закон изменения скорости  $v(t)$ , а также определять скорость  $v(t)$ , зная закон изменения ускорения  $a(t)$ . Нахождение функции  $f(x)$  по ее заданной производной  $f'(x)$  называют операцией *интегрирования*.

Таким образом, операция интегрирования является обратной операции дифференцирования. Операция интегрирования позволяет по заданной производной  $f'(x)$  найти (восстановить) функцию  $f(x)$  (латинское слово *integratio* означает «восстановление»).

Приведем определения понятий, связанных с операцией интегрирования.

**Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на данном промежутке, если для любого  $x$  из этого промежутка  $F'(x) = f(x)$ .**

Например, для функции  $f(x) = 3x^2$  на интервале  $(-\infty; +\infty)$  первообразной является функция  $F(x) = x^3$ , поскольку  $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$ .

Отметим, что функция  $x^3 + 5$  имеет ту же производную  $(x^3 + 5)' = 3x^2$ . Следовательно, функция  $x^3 + 5$  также является первообразной для функции  $3x^2$  на множестве  $\mathbf{R}$ . Понятно, что вместо числа 5 можно подставить любое другое число. Поэтому задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений. Найти все эти решения позволяет *основное свойство первообразной*.

Если функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  на заданном промежутке, а  $C$  — произвольной постоянной, то функция  $F(x) + C$  также является первообразной для функции  $f(x)$ , при этом любая первообразная для функции  $f(x)$  на данном промежутке может быть записана в виде  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

Выражение  $F(x) + C$  называют *общим видом первообразных* для функции  $f(x)$ .

- 1) По условию функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  на некотором промежутке  $I$ . Следовательно,  $F'(x) = f(x)$  для любого  $x$  из этого промежутка  $I$ . Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

то есть  $F(x) + C$  также является первообразной для функции  $f(x)$ .

- 2) Пусть функция  $F_1(x)$  — другая первообразная для функции  $f(x)$  на том же промежутке  $I$ , то есть  $F_1'(x) = f(x)$  для всех  $x \in I$ . Тогда

$$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно условию постоянства функции (с. 62), если производная функции  $F_1(x) - F(x)$  равна нулю на промежутке  $I$ , то эта функция принимает некоторое постоянное значение  $C$  на этом промежутке. Следовательно, для всех  $x \in I$  функция  $F_1(x) - F(x) = C$ . Отсюда  $F_1(x) = F(x) + C$ . Таким образом, любая первообразная для функции  $f(x)$  на данном промежутке может быть записана в виде  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. ○

Например, поскольку для функции  $f(x) = 2x$  на интервале  $(-\infty; +\infty)$  одной из первообразных является функция  $F(x) = x^2$  (действительно,  $F'(x) = (x^2)' = 2x$ ), то общий вид всех первообразных функции  $f(x) = 2x$  можно записать так:  $x^2 + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

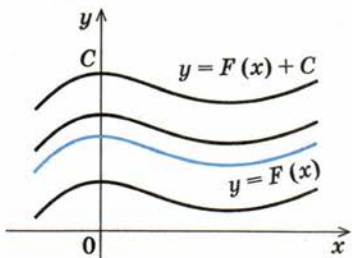


Рис. 100

**Замечание.** Для краткости при нахождении первообразной функции  $f(x)$  промежутков, на котором задана функция  $f(x)$ , чаще всего не указывают. При этом имеются в виду промежутки возможно большей длины.

Геометрически основное свойство первообразной означает, что *графики любых первообразных для данной функции  $f(x)$  получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси  $Oy$*  (рис. 100). Действительно, график про-

извольной первообразной  $F(x) + C$  можно получить из графика первообразной  $F(x)$  параллельным переносом вдоль оси  $Oy$  на  $C$  единиц.

**2. Неопределенный интеграл.** Пусть функция  $f(x)$  имеет на некотором промежутке первообразную  $F(x)$ . Тогда согласно основному свойству первообразной совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на заданном промежутке задается формулой  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для данной функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом  $\int f(x) dx$ , то есть

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $F(x)$  — одна из первообразных для функции  $f(x)$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

В приведенном равенстве знак  $\int$  называют знаком интеграла, функцию  $f(x)$  — подынтегральной функцией, выражение  $f(x) dx$  — подынтегральным выражением, переменную  $x$  — переменной интегрирования и слагаемое  $C$  — постоянной интегрирования.

Например, как отмечалось выше, общий вид первообразных для функции  $f(x) = 2x$  записывается так:  $x^2 + C$ , следовательно,  $\int 2x dx = x^2 + C$ .

**3. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования).** Эти правила аналогичны соответствующим правилам дифференцирования.

**Правило 1.** Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $G$  — первообразная для  $g$ , то  $F + G$  — первообразная для  $f + g$ .

*Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.*

- Действительно, если  $F$  — первообразная для  $f$  (в этой краткой формулировке имеется в виду, что функция  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$ ), то  $F' = f$ . Аналогично, если  $G$  — первообразная для  $g$ , то  $G' = g$ . Тогда согласно правилу вычисления производной суммы имеем

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

а это и означает, что  $F + G$  — первообразная для  $f + g$ .  $\circ$

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

то есть *интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*

Отметим, что правило 1 может быть распространено на любое количество слагаемых (поскольку производная от любого количества слагаемых равна сумме производных слагаемых).

**Правило 2.** Если  $F$  — первообразная для  $f$  и  $c$  — постоянная, то  $cF$  — первообразная для функции  $cf$ .

- Действительно, если  $F$  — первообразная для  $f$ , то  $F' = f$ . Учитывая, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, имеем  $(cF)' = cF' = cf$ , следовательно,  $cF$  — первообразная для  $cf$ .  $\circ$



С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, \text{ где } c \text{ — постоянная,}$$

то есть *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*.

Правило 3. Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $k$  и  $b$  — постоянные (причем  $k \neq 0$ ), то  $\frac{1}{k} F(kx+b)$  — первообразная для функции  $f(kx+b)$ .

- Действительно, если  $F$  — первообразная для  $f$ , то  $F' = f$ . Учитывая правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b),$$

а это и означает, что  $\frac{1}{k} F(kx+b)$  — первообразная для функции  $f(kx+b)$ . ○

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

**4. Таблица первообразных (неопределенных интегралов).** Для вычисления первообразных (или неопределенных интегралов), кроме правил нахождения первообразных, полезно помнить табличные значения первообразных для некоторых функций, приведенные в пункте 5 таблицы 18. Чтобы обосновать правильность этих формул, достаточно проверить, что производная от указанной первообразной (без постоянного слагаемого  $C$ ) равна заданной функции. Это будет означать, что рассмотренная функция действительно является первообразной для заданной функции. Поскольку в записи всех первообразных во второй колонке присутствует постоянное слагаемое  $C$ , то по основному свойству первообразных можно сделать вывод, что это действительно общий вид всех первообразных заданной функции. Приведем обоснование формул для нахождения первообразных функций  $x^\alpha$  и  $\frac{1}{x}$ , а для других функций предлагаем провести аналогичную проверку самостоятельно.

- Для всех  $x \in \mathbf{R}$  при  $\alpha \neq -1$  производная  $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha$ .

Следовательно, функция  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  при  $\alpha \neq -1$  является первообразной для функции  $x^\alpha$ . Тогда согласно основному свойству первообразных **общий вид всех первообразных для функции  $x^\alpha$  при  $\alpha \neq -1$  будет**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \quad \circ$$

С помощью неопределенного интеграла это утверждение записывается так:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

- У функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  область определения  $x \neq 0$ . Рассмотрим функцию  $F(x) = \ln|x|$  отдельно при  $x > 0$  и при  $x < 0$ .

При  $x > 0$   $F(x) = \ln x$ , тогда  $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

При  $x < 0$   $F(x) = \ln(-x)$ , тогда  $F'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

Следовательно, на каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$  функция  $F(x) = \ln|x|$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Тогда

общий вид всех первообразных для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  будет  $\ln|x| + C$ .

С помощью неопределенного интеграла это утверждение записывается так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad \circ$$

### Примеры решения задач

**Задача 1** Проверьте, что функция  $F(x) = 2\sqrt{x}$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  на промежутке  $(0; +\infty)$ .

Решение

►  $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , а это и означает, что  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . ◀

Комментарий

По определению функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ .

**Задача 2** 1) Найдите одну из первообразных для функции  $f(x) = x^4$  на  $\mathbf{R}$ .

2) Найдите все первообразные для функции  $f(x) = x^4$ .

3\*) Найдите  $\int x^4 dx$ .

Решение

► 1) Одной из первообразных для функции  $f(x) = x^4$  на множестве  $\mathbf{R}$  будет функция  $F(x) = \frac{x^5}{5}$ , поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4. \quad \triangleleft$$

Комментарий

1) Первообразную для функции  $f(x) = x^4$  можно попытаться найти подбором. При этом можно рассуждать так: чтобы после нахождения производной получить  $x^4$ , необходимо брать производную от  $x^5$ . Но  $(x^5)' = 5x^4$ . Чтобы производная равнялась  $x^4$ , достаточно поставить перед функцией  $x^5$  коэффициент  $\frac{1}{5}$ .

▶ 2) По основному свойству первообразных все первообразные для функции  $f(x) = x^4$  можно записать в виде  $\frac{x^5}{5} + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. ◀

▶ 3\*)  $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. ◀

Проще непосредственно использовать формулу из пункта 5 таблицы 17: одной из первообразных для функции  $x^\alpha$  является функция  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .

2) Если мы знаем одну первообразную  $F(x)$  для функции  $f(x)$ , то согласно основному свойству первообразных любую первообразную для функции  $f(x)$  можно записать в виде  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

3) Согласно определению

$\int f(x) dx = F(x) + C$ , то есть неопределенный интеграл  $\int f(x) dx$  — это просто специальное обозначение общего вида всех первообразных для данной функции  $f(x)$  (которые мы уже нашли в пункте 2 решения).

**Задача 3** Для функции  $f(x) = \sqrt{x}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(9; 10)$ .

Решение

▶  $D(f) = [0; +\infty)$ . Тогда  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ . Общий вид всех первообразных для функции  $f(x)$  следующий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

По условию график первообразной проходит через точку  $M(9; 10)$ . Следовательно, при  $x = 9$  получим:

$$\frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{9} + C = 10.$$

Отсюда  $C = -8$ . Тогда искомая первообразная:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8. \quad \triangleleft$$

Комментарий

Сначала запишем общий вид первообразных для заданной функции  $F(x) + C$ , затем воспользуемся тем, что график полученной функции проходит через точку  $M(9; 10)$ . Следовательно, при  $x = 9$  значение функции  $F(x) + C$  равно 10. Чтобы найти первообразную для функции  $f(x) = \sqrt{x}$ , учтем, что область определения этой функции  $x \geq 0$ . Тогда эту функцию можно записать так:

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  и использовать формулу нахождения первообразной для функции  $x^\alpha$ , а именно:  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ .

**Задача 4\*** Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 2 \cos 3x.$$

**Решение**

► Запишем одну из первообразных для каждого слагаемого.

Для функции  $\frac{1}{\sin^2 2x}$  первообразной является функция  $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x$ .

Второе слагаемое запишем так:  $\frac{1}{\sqrt{2-x}} = (2-x)^{-\frac{1}{2}}$ . Тогда первообразной для этой функции будет функция:

$$\frac{1}{-1} \cdot \frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -2(2-x)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2-x}.$$

Первообразной для функции  $2 \cos 3x$  будет функция  $2 \cdot \frac{1}{3} \sin 3x = \frac{2}{3} \sin 3x$ .

Тогда общий вид первообразных для заданной функции будет следующим:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x - 2\sqrt{2-x} - \frac{2}{3} \sin 3x + C. \triangleleft$$

**Комментарий**

Используем правила нахождения первообразных. Сначала обратим внимание на то, что заданная функция является алгебраической суммой трех слагаемых. Следовательно, ее первообразная равна соответствующей алгебраической сумме первообразных для слагаемых (правило 1). Затем учтем, что все функции-слагаемые являются сложными функциями от аргументов вида  $kx + b$ . Следовательно, по правилу 3 мы должны перед каждой функцией-первообразной (аргумента  $kx + b$ ), которую мы получим по таблице первообразных, поставить множитель  $\frac{1}{k}$ .

Для каждого из слагаемых удобно сначала записать одну из первообразных (без постоянного слагаемого  $C$ ), а затем уже записать общий вид первообразных для заданной функции (прибавить к полученной функции постоянное слагаемое  $C$ ).

Для третьего слагаемого также учтем, что постоянный множитель 2 можно поставить перед соответствующей первообразной (правило 2).

Для первого слагаемого учитываем (см. таблицу первообразных, с. 196), что первообразной для  $\frac{1}{\sin^2 x}$

является  $(-\operatorname{ctg} x)$ , для второго — первообразной для  $x^\alpha$  является  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ,

для третьего — первообразной для  $\cos x$  является  $\sin x$  (конечно, преобразование второго слагаемого выполняется на области определения этой функции, то есть при  $2-x > 0$ ).

## Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на заданном промежутке. Приведите примеры.
2. Сформулируйте основное свойство первообразных и проиллюстрируйте его на примерах.
- 3\*. Сформулируйте определение неопределенного интеграла. Приведите примеры его вычисления.
4. Сформулируйте правила нахождения первообразных. Объясните их на примерах.
- 5\*. Докажите правила нахождения первообразных.
- 6\*. Запишите и сформулируйте правила нахождения первообразных с помощью неопределенных интегралов.
- 7\*. Запишите и докажите общий вид первообразных для функций:

$$x^\alpha \ (\alpha \neq -1), \ \frac{1}{x}, \ \sin x, \ \cos x, \ \frac{1}{\cos^2 x}, \ \frac{1}{\sin^2 x}, \ e^x, \ a^x \ (a > 0, \ a \neq 1).$$

Запишите соответствующие формулы с помощью неопределенного интеграла.

## Упражнения

Докажите, что функция  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$  на указанном промежутке (1–2).

- 1°. 1)  $F(x) = x^5, f(x) = 5x^4, x \in (-\infty; +\infty)$ ;  
 2)  $F(x) = x^{-3}, f(x) = -3x^{-4}, x \in (0; +\infty)$ ;  
 3)  $F(x) = \frac{1}{7}x^7, f(x) = x^6, x \in (-\infty; +\infty)$ ;  
 4)  $F(x) = \frac{1}{6}x^6, f(x) = x^{-7}, x \in (0; +\infty)$ .
2. 1)  $F(x) = \sin^2 x, f(x) = \sin 2x, x \in \mathbf{R}$ ;  
 2)  $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x, f(x) = -\sin 2x, x \in \mathbf{R}$ ;  
 3)  $F(x) = \sin 3x, f(x) = 3 \cos 3x, x \in \mathbf{R}$ ;  
 4)  $F(x) = 3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}, f(x) = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}, x \in (-\pi; \pi)$ .

3. Проверьте, что функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ . Найдите общий вид первообразных для  $f$ , если:

$$1) F(x) = \sin x - x \cos x, f(x) = x \sin x; \quad 2) F(x) = \sqrt{x^2 + 1}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$3) F(x) = \cos x + x \sin x, f(x) = x \cos x; \quad 4) F(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

Определите, является ли функция  $F(x)$  первообразной для функции  $f(x)$  на указанном промежутке (4–5).

- 4°. 1)  $F(x) = 3 - \sin x, f(x) = \cos x, x \in (-\infty; +\infty)$ ;

2)  $F(x) = 5 - x^4, f(x) = -4x^3, x \in (-\infty; +\infty)$ ;

3)  $F(x) = \cos x - 4, f(x) = -\sin x, x \in (-\infty; +\infty)$ ;

4)  $F(x) = x^{-2} + 2, f(x) = \frac{1}{2x^3}, x \in (0; +\infty)$ .

5. 1)  $F(x) = 2x + \cos \frac{x}{2}; f(x) = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}, x \in \mathbf{R}$ ;

2)  $F(x) = \sqrt{4-x^2}, f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2; 2)$ ;

3)  $F(x) = \frac{1}{x^2}, f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}, x \in (0; +\infty)$ ;

4)  $F(x) = 4x\sqrt{x}, f(x) = 6\sqrt{x}, x \in (0; +\infty)$ .

6°. Найдите общий вид первообразных для функции (6-8).

1)  $f(x) = 2 - x^4$ ; 2)  $f(x) = x + \cos x$ ; 3)  $f(x) = 4x$ ; 4)  $f(x) = -8$ ;

5)  $f(x) = x^6$ ; 6)  $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$ ; 7)  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$ ; 8)  $f(x) = x^3$ .

7\*. 1)  $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$ ; 2)  $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$ ; 3)  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$ ;

4)  $f(x) = 5x^2 - 1$ ; 5)  $f(x) = (2x - 8)^5$ ; 6)  $f(x) = 3 \sin 2x$ ;

7)  $f(x) = (4 - 5x)^7$ ; 8)  $f(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; 9)  $f(x) = \frac{3}{(4-15x)^4}$ ;

10)  $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$ ; 11)  $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2}$ ; 12)  $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}$ .

8\*. 1)  $f(x) = 1 - \cos 3x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ ; 2)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 3x^2$ ;

3)  $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3 \sin(4-x) + 2x$ ; 4)  $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .

9. Для функции  $f(x)$  найдите первообразную  $F(x)$ , принимающую заданное значение в указанной точке:

1)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$ ; 2)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ;

3)  $f(x) = x^3, F(-1) = 2$ ; 4)  $f(x) = \sin x, F(-\pi) = -1$ .

Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M$  (10-12).

10. 1)  $f(x) = 2x + 1, M(0; 0)$ ; 2)  $f(x) = 3x^2 - 2x, M(1; 4)$ ;

3)  $f(x) = x + 2, M(1; 3)$ ; 4)  $f(x) = -x^2 + 3x, M(2; -1)$ .

11\*. 1)  $f(x) = 2 \cos x, M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ; 2)  $f(x) = 1 - x^2, M(-3; 9)$ ;

3)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$ ; 4)  $f(x) = \frac{1}{x^4}, M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ .

12. 1)  $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$ ,  $M(-1; 4)$ ;      2)  $f(x) = x^3 + 2$ ,  $M(2; 15)$ ;  
 3)  $f(x) = 1 - 2x$ ,  $M(3; 2)$ ;      4)  $f(x) = \frac{1}{x^2} - 10x^4 + 3$ ,  $M(1; 5)$ .
- 13\*. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана формулой  $v(t) = t^2 + 2t - 1$ . Запишите формулу зависимости ее координаты  $x$  от времени  $t$ , если известно, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) точка находилась в начале координат.
- 14\*. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана формулой  $v(t) = 2 \cos \frac{t}{2}$ . Запишите формулу зависимости координаты точки от времени, если известно, что в момент  $t = \frac{\pi}{3}$  с точка находилась на расстоянии 4 м от начала координат (в положительном направлении).
- 15\*. Точка движется прямолинейно с ускорением  $a(t) = 12t^2 + 4$ . Найдите закон движения точки, если в момент  $t = 1$  с ее скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 (единица измерения  $a$  равна 1 м/с<sup>2</sup>).
- 16\*. Материальная точка массой  $m$  движется по оси  $Ox$  под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени  $t$  сила равна  $F(t)$ . Найдите формулу зависимости  $x(t)$  от времени  $t$ , если известно, что при  $t = t_0$  скорость точки равна  $v_0$ , а координата равна  $x_0$  ( $F(t)$  измеряется в ньютонах,  $t$  — в секундах,  $v$  — в метрах в секунду,  $m$  — в килограммах):
- 1)  $F(t) = 6 - 9t$ ,  $t_0 = 1$ ,  $v_0 = 4$ ,  $x_0 = -5$ ,  $m = 3$ ;
  - 2)  $F(t) = 14 \sin t$ ,  $t_0 = \pi$ ,  $v_0 = 2$ ,  $x_0 = 3$ ,  $m = 7$ ;
  - 3)  $F(t) = 25 \cos t$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $v_0 = 2$ ,  $x_0 = 4$ ,  $m = 5$ ;
  - 4)  $F(t) = 8t + 8$ ,  $t_0 = 2$ ,  $v_0 = 9$ ,  $x_0 = 7$ ,  $m = 4$ .

## § 15. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

### 15.1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла

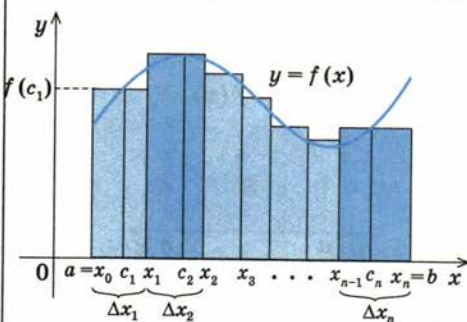
Таблица 19

1. Вычисление определенного интеграла (формула Ньютона–Лейбница)	
Формула	Пример
<p>Если функция <math>f(x)</math> определена и непрерывна на отрезке <math>[a; b]</math>, а <math>F(x)</math> — произвольная ее первообразная на этом отрезке (то есть <math>F'(x) = f(x)</math>), то</p> $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$	<p>Так как для функции <math>f(x) = x^2</math> одной из первообразных является <math>F(x) = \frac{x^3}{3}</math>, то</p> $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

2. Криволинейная трапеция	
Определение	Иллюстрация
<p>Пусть на отрезке <math>[a; b]</math> оси <math>Ox</math> задана непрерывная функция <math>f(x)</math>, принимающая на этом отрезке только неотрицательные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции <math>y = f(x)</math>, отрезком <math>[a; b]</math> оси <math>Ox</math> и прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math>, называют <i>криволинейной трапецией</i>.</p>	
3. Площадь криволинейной трапеции	
Формула	Пример
$S = \int_a^b f(x) dx$	<p>Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = \sin x</math>, <math>y = 0</math>, <math>x = \frac{\pi}{3}</math>, <math>x = \frac{\pi}{2}</math>.</p> <p>► Изображая эти линии, видим, что заданная фигура — криволинейная трапеция. Тогда</p> $S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big _{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \triangleleft$
4. Свойства определенных интегралов	
$\int_a^a f(x) dx = 0$	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	
$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$	<p>Если функция <math>f(x)</math> непрерывна на <math>[a; b]</math> и <math>c \in [a; b]</math>, то</p> $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



## 5. Определение определенного интеграла через интегральные суммы



Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ .

Выполним следующие операции.

1. Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (полагаем, что  $a = x_0, b = x_n$ ).
2. Обозначим длину первого отрезка через  $\Delta x_1$ , второго — через  $\Delta x_2$  и т. д. (то есть  $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ ).
3. На каждом из полученных отрезков выберем произвольную точку  $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .
4. Составим сумму  $S_n = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$ . Эту сумму называют *интегральной суммой функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$* .

Если  $n \rightarrow \infty$  и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма  $S_n$  стремится к некоторому числу, которое называют **определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$**  и обозначают  $\int_a^b f(x) dx$ .

## Объяснение и обоснование

**1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла.** Как отмечалось в § 14, интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Оно позволяет по заданной производной функции найти (восстановить) эту функцию. Покажем, что эта операция тесно связана с задачей вычисления площади.

Например, в механике часто приходится определять координату  $x(t)$  точки при прямолинейном движении, зная закон изменения ее скорости  $v(t)$  (напомним, что  $v(t) = x'(t)$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда точка движется с постоянной скоростью  $v = v_0$ . Графиком скорости в системе координат  $(t; v)$  является прямая  $v = v_0$ , параллельная оси времени  $t$  (рис. 101). Если считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  точка находилась в начале координат, то ее путь  $s$ , пройденный за время  $t$ , вычисляется по формуле  $s = v_0 t$ . Величина  $v_0 t$  равна площади прямоугольника, ограниченного графиком скорости, осью абсцисс и двумя вертикальными прямыми, то есть путь точки можно вычислить как площадь под графиком скорости.

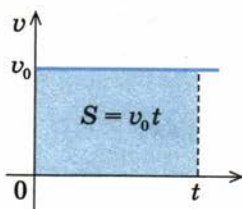


Рис. 101

Рассмотрим случай неравномерного движения. Теперь скорость можно считать постоянной только на маленьком отрезке времени  $\Delta t$ . Если скорость  $v$  изменяется по закону  $v = v(t)$ , то путь, пройденный за отрезок времени  $[t; t + \Delta t]$ , приближенно выражается произведением  $v(t) \Delta t$ . А на графике это произведение равно площади прямоугольника со сторонами  $\Delta t$  и  $v(t)$  (рис. 102). Точное значение пути за отрезок времени  $[t; t + \Delta t]$  равно площади *криволинейной трапеции*, выделенной на этом рисунке. Тогда весь путь за отрезок времени  $[0; t]$  может быть вычислен в результате сложения площадей таких криволинейных трапеций, то есть путь будет равняться площади заштрихованной фигуры под графиком скорости (рис. 103).

Приведем соответствующие определения и обоснования, которые позволяют сделать эти рассуждения более строгими.

Пусть на отрезке  $[a; b]$  оси  $Ox$  задана непрерывная функция  $f(x)$ , которая принимает на этом отрезке только положительные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции  $y = f(x)$ , отрезком  $[a; b]$  оси  $Ox$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , называют *криволинейной трапецией* (рис. 104).

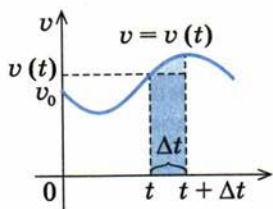


Рис. 102

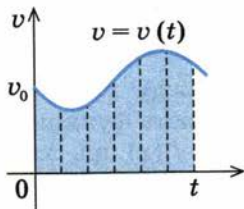


Рис. 103

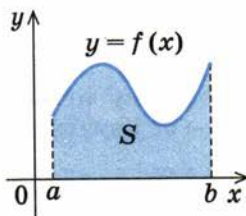


Рис. 104

Отрезок  $[a; b]$  называют *основанием этой криволинейной трапеции*.

Выясним, как можно вычислить площадь криволинейной трапеции с помощью первообразной для функции  $f(x)$ .

Обозначим через  $S(x)$  площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a; x]$  (рис. 105, а), где  $x$  — любая точка отрезка  $[a; b]$ . При  $x = a$  отрезок  $[a; x]$  вырождается в точку, и поэтому  $S(a) = 0$ ; при  $x = b$  имеем  $S(b) = S$ , где  $S$  — площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a; b]$  (см. рис. 104).

- Покажем, что  $S(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , то есть что  $S'(x) = f(x)$ .

Согласно определению производной нам необходимо доказать, что

$\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Для упрощения рассуждений рассмотрим случай

$\Delta x > 0$  (случай  $\Delta x < 0$  рассматривается аналогично).

Поскольку  $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ , то геометрически  $\Delta S$  — площадь фигуры, выделенной на рисунке 105, б.

Рассмотрим теперь прямоугольник с такой же площадью  $\Delta S$ , одной из сторон которого является отрезок  $[x; x + \Delta x]$  (рис. 105, в). Поскольку

функция  $f(x)$  непрерывна, то верхняя сторона этого прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой  $c \in [x; x + \Delta x]$  (иначе говоря, рассмотренный прямоугольник или содержит криволинейную трапецию, выделенную на рисунке 105, а, или содержится в ней, и соответственно его площадь будет больше или меньше площади  $\Delta S$ ). Высота прямоугольника равна  $f(c)$ .

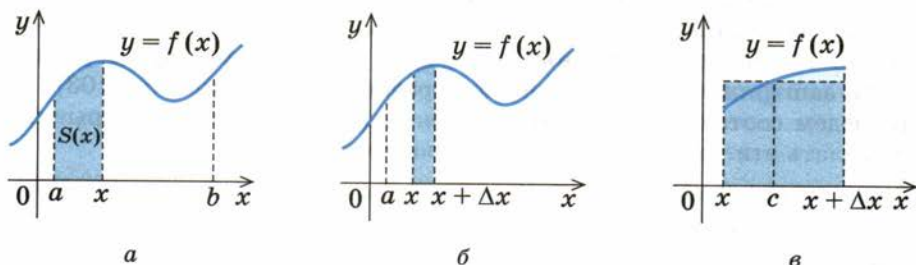


Рис. 105

По формуле площади прямоугольника имеем  $\Delta S = f(c) \Delta x$ . Тогда  $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c) \Delta x}{\Delta x} = f(c)$ . (Эта формула будет верной и при  $\Delta x < 0$ .)

Поскольку точка  $c$  лежит между  $x$  и  $x + \Delta x$ , то  $c$  стремится к  $x$ , если  $\Delta x \rightarrow 0$ . Учитывая непрерывность функции  $f(x)$ , также получаем:

$$f(c) \rightarrow f(x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . А это и означает, что  $S'(x) = f(x)$ ,

то есть  $S(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ .  $\circ$

Поскольку  $S(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , то по основному свойству первообразных любая другая первообразная  $F(x)$  для функции  $f(x)$  для всех  $x \in [a; b]$  отличается от  $S(x)$  на постоянную  $C$ , то есть

$$F(x) = S(x) + C. \quad (1)$$

Чтобы найти  $C$ , подставим  $x = a$ . Получаем  $F(a) = S(a) + C$ . Поскольку  $S(a) = 0$ , то  $C = F(a)$ , и равенство (1) можно записать так:

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (2)$$

Учитывая, что площадь криволинейной трапеции равна  $S(b)$ , подставим в формулу (2)  $x = b$  и получаем:  $S = S(b) = F(b) - F(a)$ . Следовательно,

$$\text{площадь криволинейной трапеции (рис. 104) можно вычислить по формуле} \\ S = F(b) - F(a), \quad (3)$$

где  $F(x)$  — произвольная первообразная для функции  $f(x)$ .

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к нахождению первообразной  $F(x)$  для функции  $f(x)$ , то есть к интегрированию функции  $f(x)$ .

Разность  $F(b) - F(a)$  называют **определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$**  и обозначают так:  $\int_a^b f(x) dx$ .

Запись  $\int_a^b f(x) dx$  читается: «Интеграл от  $a$  до  $b$  эф от икс де икс». Числа  $a$  и  $b$  называются **пределами интегрирования**:  $a$  — нижним пределом,  $b$  — верхним. Следовательно, по приведенному определению

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

Формулу (4) называют **формулой Ньютона–Лейбница**.

Вычисляя определенный интеграл, удобно разность  $F(b) - F(a)$  обозначать следующим образом:  $F(x)|_a^b$ , то есть  $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ . Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона–Лейбница можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например, поскольку для функции  $f(x) = e^x$  одной из первообразных является  $F(x) = e^x$ , то

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Отметим, что в случае, когда для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  существует определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , функцию  $f(x)$  называют **интегрируемой на отрезке  $[a; b]$** .

Из формул (3) и (4) получаем, что **площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$ , отрезком  $[a; b]$  оси  $Ox$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 104), можно вычислить по формуле**

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Например, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = \cos x$ , отрезком  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  оси  $Ox$  и прямыми  $x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{6}$  (рис. 106), можно вычислить по формуле

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

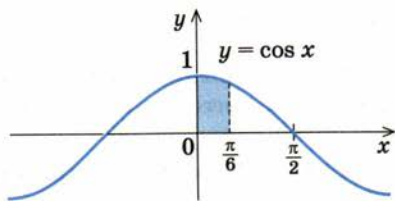


Рис. 106

(При вычислении определенного интеграла учтено, что для функции  $f(x) = \cos x$  одной из первообразных является функция  $F(x) = \sin x$ .)

**Замечание.** В задачах из курса алгебры и начал анализа на вычисление площадей как ответ чаще всего приводится числовое значение площади. Поскольку на координатной плоскости, где изображается фигура, всегда указывается единица измерения по осям, то в этом случае мы всегда имеем и единицу измерения площади — квадрат со стороной 1. Иногда, чтобы подчеркнуть, что полученное число выражает именно площадь, ответ записывают так:  $S = \frac{1}{2}$  (кв. ед.), то есть квадратных единиц. Отметим, что так записывают только числовые ответы. Если в результате вычисления площади мы получили, например, что  $S = 2a^2$ , то никаких обозначений квадратных единиц не записывают, поскольку отрезок  $a$  был измерен в каких-то линейных единицах и тогда выражение  $a^2$  уже содержит информацию о тех квадратных единицах, в которых измеряется площадь в этом случае.

**2. Свойства определенных интегралов.** При формулировании определения определенного интеграла непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции мы полагали, что  $a < b$ . Удобно расширить понятие определенного интеграла и для случая  $a > b$  принять по определению, что

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx. \quad (5)$$

Для случая  $a = b$  также по определению будем считать, что

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (6)$$

Отметим, что формальное применение формулы Ньютона–Лейбница к вычислению интегралов в формулах (5) и (6) дает такой же результат. Действительно, если функция  $F(x)$  является первообразной для функции

$f(x)$ , то  $\int_a^a f(x) dx = F(x) \Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$ . Также

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x) dx.$$

С помощью формулы Ньютона–Лейбница для непрерывных функций легко обосновываются и другие свойства определенных интегралов, приведенные в пункте 4 таблицы 18.

● Если  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , то для функции  $kf(x)$  первообразной будет функция  $kF(x)$ . Тогда

$$\int_a^b kf(x) dx = kF(x) \Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x) dx. \text{ Следовательно,}$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \circ \quad (7)$$

- Если  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , а  $G(x)$  — первообразной для функции  $g(x)$ , то для функции  $f(x) + g(x)$  первообразной будет функция  $F(x) + G(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \circ \quad (8)$$

- Если  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  и  $c \in [a; b]$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= F(x) \Big|_a^c + F(x) \Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно, если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $c \in [a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \circ$$

**3. Определение определенного интеграла через интегральные суммы.** Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности в связи с вычислением площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим криволинейную трапецию, изображенную на рисунке 107 (функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ ). На этом рисунке основание трапеции — отрезок  $[a; b]$  — разбито на  $n$  отрезков (не обязательно равных) точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (для удобства будем считать, что  $a = x_0, b = x_n$ ). Через эти точки проведены вертикальные прямые. На первом отрезке выбрана произвольная точка  $c_1$ , и на этом отрезке как на основании построен прямоугольник с высотой  $f(c_1)$ . Аналогично на втором отрезке выбрана произвольная точка  $c_2$ , и на этом отрезке как на основании построен прямоугольник с высотой  $f(c_2)$  и т. д.

Площадь  $S$  заданной криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей построенных прямоугольников. Обозначим эту сумму через  $S_n$ , длину первого отрезка —

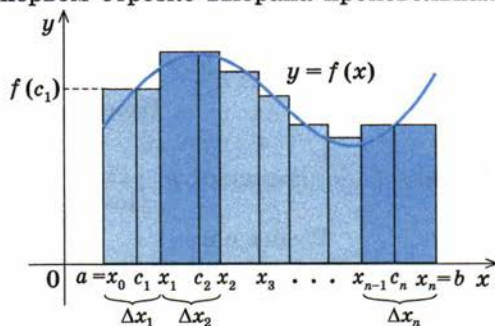


Рис. 107

через  $\Delta x_1$ , второго — через  $\Delta x_2$  и т. д. (то есть  $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ ,  $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ , ...,  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ ). Тогда

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n. \quad (9)$$

Следовательно, площадь  $S$  криволинейной трапеции можно приближенно вычислять по формуле (9), то есть  $S \approx S_n$ .

Сумму (9) называют *интегральной суммой функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$* . При этом считают, что функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и может принимать любые значения: положительные, отрицательные и равные нулю (а не только неотрицательные, как для случая криволинейной трапеции). Если  $n \rightarrow \infty$  и длины отрезков, на которые разбито основание трапеции, стремятся к нулю, то интегральная сумма  $S_n$  стремится к некоторому числу, которое называют определенным интегралом функции  $f(x)$  на

отрезке  $[a; b]$  и обозначают  $\int_a^b f(x) dx$ . Можно доказать, что при этом также

выполняется формула Ньютона–Лейбница и все рассмотренные свойства определенного интеграла.

**З а м е ч а н и е.** Изменяя способ разбиения отрезка  $[a; b]$  на  $n$  частей (то есть фиксируя другие точки  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ) и выбирая на каждом из полученных отрезков другие точки  $c_i$  (где  $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ), мы будем получать для функции  $f(x)$  другие интегральные суммы. В курсе математического анализа доказывается, что для любой непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$  независимо от способа разбиения этого отрезка и выбора точек  $c_i$ , если  $n \rightarrow \infty$  и длины отрезков стремятся к нулю, то интегральные суммы  $S_n$  стремятся к одному и тому же числу.

Определение определенного интеграла через интегральные суммы позволяет приближенно вычислять определенные интегралы по формуле (9). Но такой способ требует громоздких вычислений, и его используют в тех случаях, когда для функции  $f(x)$  не удастся найти первообразную (в этих случаях приближенное вычисление определенного интеграла обычно проводят на компьютере с использованием специальных программ). Если же первообразная для функции  $f(x)$  известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона–Лейбница (см. пример в пункте 1 таблицы 19 и примеры, приведенные далее).

### Примеры решения задач

#### Задача 1

Вычислите  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ .

Решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1. ◀

#### Комментарий

Поскольку для функции  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  мы знаем первообразную — это  $F(x) = \operatorname{tg} x$  (см. табл. 18),

то заданный интеграл вычисляется непосредственным применением формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Задача 2** Вычислите  $\int_1^3 \left( \frac{4}{x} - x \right) dx$ .

**Решение**

I способ

► Для функции  $f(x) = \frac{4}{x} - x$  одной из первообразных является  $F(x) = 4 \ln |x| - \frac{x^2}{2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left( \frac{4}{x} - x \right) dx &= \left( 4 \ln |x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \left( 4 \ln |3| - \frac{3^2}{2} \right) - \left( 4 \ln |1| - \frac{1^2}{2} \right) = 4 \ln 3 - 4. \end{aligned}$$

II способ

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left( \frac{4}{x} - x \right) dx &= \int_1^3 \frac{4 dx}{x} - \int_1^3 x dx = \\ &= 4 \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 x dx = 4 \ln |x| \Big|_1^3 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \\ &= 4 (\ln |3| - \ln |1|) - \left( \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = 4 \ln 3 - 4. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $4 \ln 3 - 4$ . ◁

**Замечание.** Заданный интеграл рассматривается на отрезке  $[1; 3]$ , где  $x > 0$ . Но при  $x > 0$  одной из первообразных для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  является функция  $F(x) = \ln x$ . Поэтому, учитывая, что  $x > 0$ , можно, например, записать:  $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3$ . Хотя, конечно, приведенная выше запись первообразной также является верной (поскольку при  $x > 0$   $\ln |x| = \ln x$ ).

**Комментарий**

Возможны два способа вычисления заданного интеграла.

1) Сначала найти первообразную для функции  $f(x) = \frac{4}{x} - x$ , используя правила вычисления первообразных и таблицу первообразных, а затем найти интеграл по формуле Ньютона–Лейбница.

2) Использовать формулу (8)

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

и записать заданный интеграл как алгебраическую сумму двух интегралов, каждый из которых можно непосредственно вычислить, как в задаче 1 (для первого слагаемого можно также использовать формулу (7), и вынести постоянный множитель 4 за знак интеграла).



**Задача 3** Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми  $x = 1$ ,  $x = 8$ , осью  $Ox$  и графиком функции  $y = \sqrt[3]{x}$ .

**Решение**

► Изображая эти линии, видим, что заданная фигура — криволинейная трапеция (рис. 108).

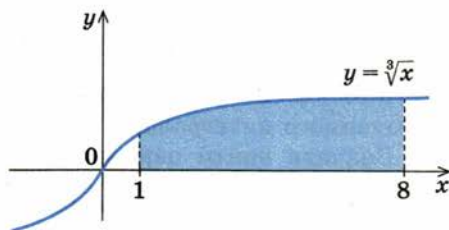


Рис. 108

Тогда ее площадь равна

$$\begin{aligned} S &= \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \\ &= \frac{3}{4} \left( 8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}} \right) = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8^4} - 1) = \frac{45}{4} = 11 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ:  $11 \frac{1}{4}$  кв. ед. ◀

**Комментарий**

Заданная фигура является криволинейной трапецией, и поэтому ее площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где  $a = 1$ ,  $b = 8$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Также необходимо учесть, что на заданном отрезке  $[1; 8]$  значения  $x > 0$ , и при этом условии можно записать  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ .

### Упражнения

1. Вычислите интеграл:

$$\begin{array}{llll} 1) \int_{-1}^2 x^4 dx; & 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx; & 3) \int_1^3 x^3 dx; & 4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}; \\ 5) \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}; & 6) \int_0^{\pi} 3 \cos \frac{x}{2} dx; & 7) \int_1^{10} \frac{dx}{x^2}; & 8) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx. \end{array}$$

2. Докажите, что верно равенство:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_0^{\sqrt[3]{8}} x^2 \, dx;$

4)  $\int_0^1 (2x+1) \, dx = \int_0^2 (x^3-1) \, dx.$

3. Вычислите интеграл:

1)  $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} \, dx;$  2)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}};$  3)  $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}};$  4)  $\int_{-2}^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$

5)  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 \, dx;$  6)  $\int_0^2 (1+2x)^3 \, dx;$  7)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) \, dx;$  8)  $\int_1^4 \left( x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \, dx.$

Вычислите (предварительно выполнив рисунок) площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (4–8).

4. 1)  $y = x^4, y = 0, x = -1, x = 1;$  2)  $y = x^4, y = 1;$   
 3)  $y = x^2 - 4x + 5, y = 0, x = 0, x = 4;$  4)  $y = x^2 - 4x + 5, y = 5.$
5. 1)  $y = 1 - x^3, y = 0, x = 0;$  2)  $y = 2 - x^3, y = 1, x = -1, x = 1;$   
 3)  $y = -x^2 - 4x, y = 0, x = -3, x = -1;$  4)  $y = -x^2 - 4x, y = 1, x = -3, x = -1.$
6. 1)  $y = x^3, y = 8, x = 1;$  2)  $y = 2 \cos x, y = 1, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3};$   
 3)  $y = x^2 - 2x + 4, y = 3, x = -1;$  4)  $y = \sin x, y = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}.$
7. 1)  $y = 4x - x^2, y = 4 - x;$  2)  $y = \frac{16}{x^2}, y = 2x, x = 4;$   
 3)  $y = x^2, y = 2x;$  4)  $y = 6 - 2x, y = 6 + x - x^2.$
8. 1)  $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x^2;$  2)  $y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 6x - x^2;$   
 3)  $y = x^2, y = 2x - x^2;$  4)  $y = x^2, y = x^3.$

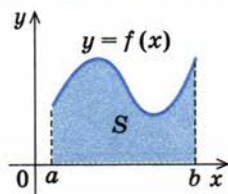
## 15.2. Вычисление площадей и объемов с помощью определенных интегралов

Таблица 20

### 1. Площадь криволинейной трапеции

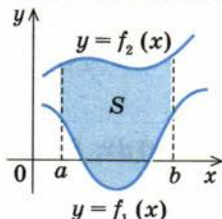
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , равна

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$



2. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми  $x = a$  и  $x = b$

Формула



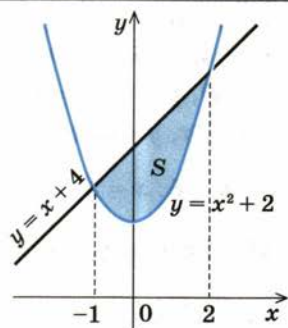
Пример

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 2, \quad y = x + 4.$$

Если на заданном отрезке  $[a; b]$  непрерывные функции  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  имеют такое свойство, что  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всех  $x \in [a; b]$ , то

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (1)$$



► Изобразим заданные линии и абсциссы их точек пересечения.

Абсциссы точек пересечения:

$$x^2 + 2 = x + 4,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

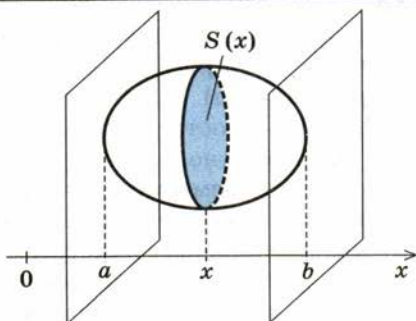
Тогда по формуле (1)

$$S = \int_{-1}^2 ((x+4) - (x^2+2)) dx =$$

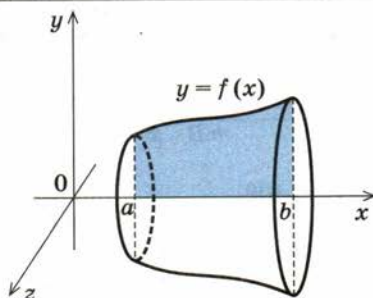
$$= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx =$$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 4\frac{1}{2}. \quad \triangleleft$$

## 3. Объемы тел



Если тело помещено между двумя перпендикулярными к оси  $Ox$  плоскостями, проходящими через точки  $x = a$  и  $x = b$ , то  $V = \int_a^b S(x) dx$ , где  $S(x)$  — площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку  $x \in [a; b]$  и перпендикулярна к оси  $Ox$ .



Если тело получено в результате вращения вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## Объяснение и обоснование

**1. Вычисление площадей фигур.** Обоснование формулы площади криволинейной трапеции и примеры ее применения были приведены в пункте 15.1.

- Выясним, как можно вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке 109. Эта фигура ограничена сверху графиком функции  $y = f_2(x)$ , снизу графиком функции  $y = f_1(x)$ , а также вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ); функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны и неотрицательны на отрезке  $[a; b]$  и  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всех  $x \in [a; b]$ .

Площадь  $S$  этой фигуры равна разности площадей  $S_2$  и  $S_1$  криволинейных трапеций ( $S_2$  — площадь криволинейной трапеции  $AA_2B_2B$ , а  $S_1$  — площадь криволинейной трапеции  $AA_1B_1B$ ). Но

$$S_1 = \int_a^b f_1(x) dx, \quad S_2 = \int_a^b f_2(x) dx.$$

Следовательно,  $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ . Таким

образом, площадь заданной фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad \circ \quad (1)$$

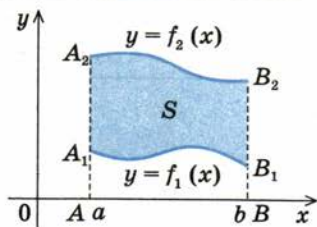


Рис. 109

Эта формула будет верной и в том случае, когда заданные функции не являются неотрицательными на отрезке  $[a; b]$ : для этого достаточно выполнения условий, что функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны на отрезке  $[a; b]$  и  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всех  $x \in [a; b]$  (рис. 110, а). Для обоснования справедливости формулы достаточно перенести заданную фигуру параллельно вдоль оси  $Oy$  на  $m$  единиц так, чтобы она разместилась над осью  $Ox$  (рис. 110, б). Такое преобразование означает, что заданные функции  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  мы заменили соответственно на функции  $y = f_1(x) + m$  и  $y = f_2(x) + m$ . Площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , равна площади заданной фигуры. Следовательно, искомая площадь

$$S = \int_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m)) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Например, площадь фигуры, изображенной на рисунке 111, равна

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

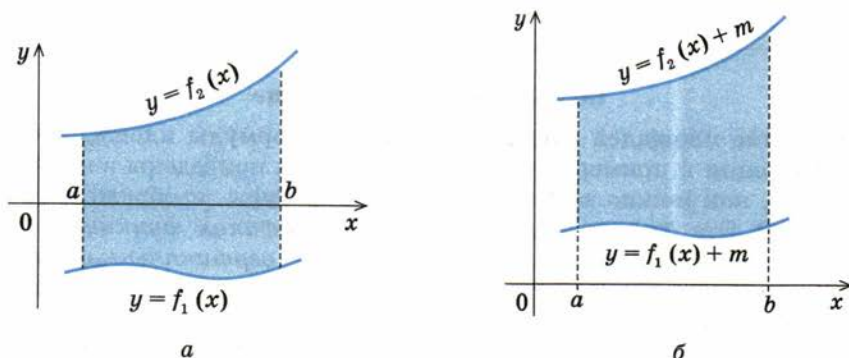


Рис. 110

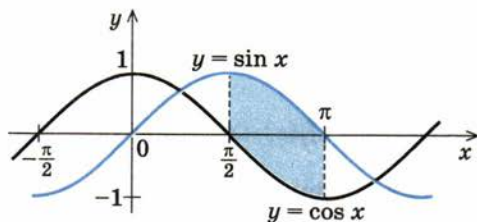


Рис. 111

**2. Вычисление объемов тел.** Задача вычисления объема тела с помощью определенного интеграла аналогична задаче нахождения площади криволинейной трапеции. Пусть задано тело объемом  $V$ , причем есть такая прямая (ось  $Ox$  на рисунке 112), что какую бы ни взяли плоскость, перпендикулярную к этой прямой, нам известна площадь  $S$  сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная к оси  $Ox$ , пересекает ее в некоторой точке  $x$ . Следовательно, каждому числу  $x$  из отрезка  $[a; b]$  (см. рис. 112) поставлено в соответствие единственное число  $S(x)$  — площадь сечения тела этой плоскостью. Таким образом, на отрезке  $[a; b]$  задана функция  $S(x)$ . Если функция  $S$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (2)$$

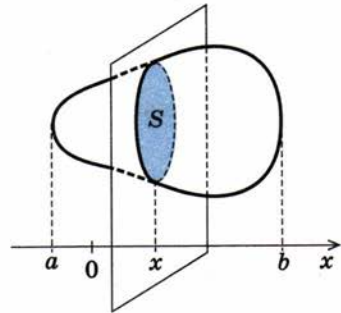


Рис. 112

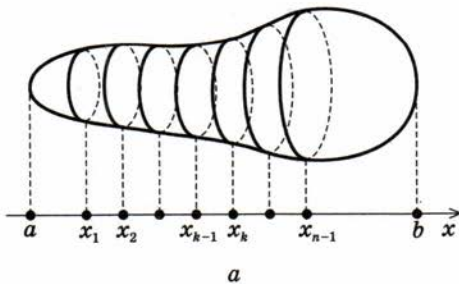
Полное доказательство этой формулы приведено в курсе математического анализа, а мы остановимся на наглядных соображениях, которые приводят к этой формуле.

- Разделим отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков одинаковой длины точками  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и допустим, что

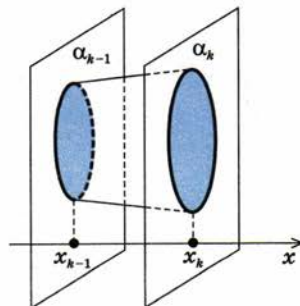
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Через каждую точку  $x_k$  проведем плоскость  $\alpha_k$ , перпендикулярную к оси  $Ox$ . Эти плоскости разрезают данное тело на слои (рис. 113, а). Объем слоя между плоскостями  $\alpha_{k-1}$  и  $\alpha_k$  (рис. 113, б) при достаточно больших  $n$  приблизительно равен площади  $S(x_{k-1})$  сечения, умноженной на «толщину слоя»  $\Delta x$ , и поэтому

$$V \approx S(x_0) \Delta x + S(x_1) \Delta x + \dots + S(x_n) \Delta x = V_n.$$



а



б

Рис. 113

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, то есть чем больше  $n$ .

Поэтому  $V_n \rightarrow V$ , если  $n \rightarrow \infty$ . По определению определенного интеграла через интегральные суммы получаем, что  $V_n \rightarrow \int_a^b S(x) dx$ , если  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad \circ$$

Используем полученный результат для обоснования формулы объема тел вращения.

- Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок  $[a; b]$  оси  $Ox$  и ограничена сверху графиком функции  $y = f(x)$ , неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$ . Вследствие вращения этой криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$  образуется тело (рис. 114), объем которого можно найти по формуле

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3)$$

Действительно, каждая плоскость, которая перпендикулярна к оси  $Ox$  и пересекает отрезок  $[a; b]$  этой оси в точке  $x$ , дает в сечении с телом круг радиуса  $f(x)$  и площадью  $S(x) = \pi f^2(x)$  (рис. 115). Отсюда по формуле (2) получаем формулу (3).  $\circ$

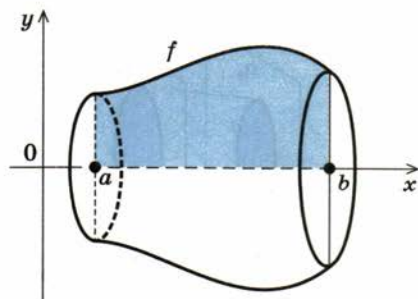


Рис. 114

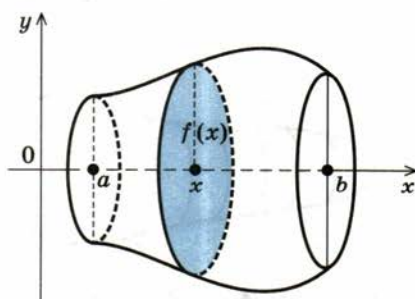


Рис. 115

## Примеры решения задач

## Задача 1

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{-x}$ .

## Решение

► Изобразим заданные линии (рис. 116) и найдем абсциссы точек их пересечения:

$$x^2 = \sqrt{-x}, \quad (1)$$

тогда  $x^4 = -x$ ,  $x^4 + x = 0$ ,

$$x(x^3 + 1) = 0,$$

$x = 0$  или  $x = -1$  (оба корня удовлетворяют уравнению (1)).

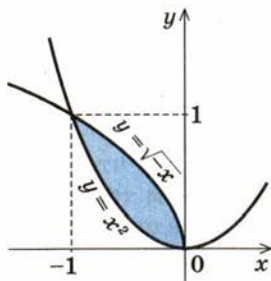


Рис. 116

Площадь заданной фигуры равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (\sqrt{-x} - x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x)^{\frac{1}{2}} dx - \\ &- \int_{-1}^0 x^2 dx = -\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}. \triangleleft \end{aligned}$$

## Задача 2

Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = 0$ .

## Решение

► Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий.

$$4 - x^2 = 0,$$

$$x = \pm 2.$$

## Комментарий

Изображая заданные линии (рис. 116), видим, что искомая фигура находится между графиками двух функций. Сверху она ограничена графиком функции  $f_2(x) = \sqrt{-x}$ , а снизу — графиком функции  $f_1(x) = x^2$ . Следовательно, ее площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных функций. Поскольку ординаты обеих кривых в точках пересечения одинаковы, то достаточно решить уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$ .

Для решения полученного иррационального уравнения можно использовать уравнения-следствия (в конце выполнить проверку) или равносильные преобразования (на ОДЗ, то есть при  $x \leq 0$ ).

Отметим также, что на полученном отрезке  $[-1; 0]$  значение  $(-x) \geq 0$ . Тогда  $\sqrt{-x} = (-x)^{\frac{1}{2}}$ .

## Комментарий

Изобразим заданную фигуру (рис. 117) и убедимся, что она является криволинейной трапецией. В этом



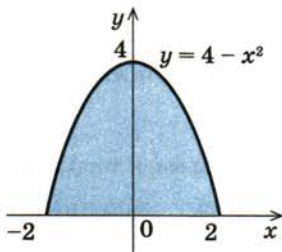


Рис. 117

Поскольку заданная фигура — криволинейная трапеция, то объем тела вращения равен

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-2}^2 \pi(4-x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (16-8x+x^4) dx = \\
 &= \pi \left( 16x - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 = 76 \frac{4}{5} \pi. \triangleleft
 \end{aligned}$$

**Замечание.** Можно было обратить внимание на то, что заданная фигура симметрична относительно оси  $Oy$  и поэтому объем тела, полученного вращением всей фигуры вокруг оси абсцисс, будет вдвое больше объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции, которая опирается на отрезок  $[0; 2]$ .

### Вопросы для контроля

- Объясните, как можно найти площадь криволинейной трапеции. Приведите пример.
- 1) Запишите формулу для нахождения площади фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками непрерывных функций, а также прямыми  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ). Приведите пример.  
2\*) Докажите эту формулу.
- Запишите формулу для нахождения объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс. Приведите пример ее использования.

### Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями (1–6).

- 1)  $y = x^2 - 4x + 5$ ,  $y = 5 - x$ ;      2)  $y = x^2 - 3x + 4$ ,  $y = 4 - x$ ;  
3)  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = 4$ ,  $x = 4$ ;      4)  $y = \frac{3}{x}$ ,  $y = 3$ ,  $x = 3$ .
- 1)  $y = x^2 - 6x + 9$ ,  $y = 5 - x$ ;      2)  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $y = x + 3$ ;  
3)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x + 2$ ;      4)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 2 - x$ .

случае объем тела вращения можно вычислить по формуле

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, достаточно найти абсциссы точек пересечения заданных линий.

Как и для задач на вычисление площадей, в ответ записывают числовое значение объема, но можно подчеркнуть, что мы получили именно величину объема, и записать

*ответ:*  $76 \frac{4}{5} \pi$  куб. ед. (кубических единиц).

3. 1)  $y = x^2, y = x + 2$ ; 2)  $y = x^2, y = 2 - x$ .
4. 1)  $y = -x^2 + 2x + 1, y = x^2 - 4x + 5$ ; 2)  $y = x^2 + 2x + 2, y = 6 - x^2$ .
5. 1)  $y = \frac{7}{x}, x + y = 8$ ; 2)  $y = \frac{5}{x}, x + y = 6$ ;  
3)  $y = \frac{5}{x}, y = 4x + 1, x = 2$ ; 4)  $y = \frac{3}{x}, y = 2x + 1, x = 3$ .
6. 1)  $y = 8 - x^2, y = 4$ ; 2)  $y = 6 - x^2, y = 5$ ;  
3)  $y = x^2, y = 4x - x^2$ ; 4)  $y = x^2, y = 2x - x^2$ .
7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = 8x - 2x^2$ , касательной к этой параболе в ее вершине и прямой  $x = 0$ .
8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x) = 8 - 0,5x^2$ , касательной к нему в точке с абсциссой  $x = -2$  и прямой  $x = 1$ .
9. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  
1)  $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0$ ; 2)  $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4, y = 0$ ;  
3)  $y = \sqrt{x}, x = 1, y = 0$ ; 4)  $y = 1 - x^2, y = 0$ .
10. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  
1)  $y = x^2, y = x$ ; 2)  $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = 1$ ;  
3)  $y = x + 2, y = 1, x = 0, x = 2$ ; 4)  $y = \sqrt{x}, y = x$ .
- 11\*. 1) Выведите формулу объема шарового сегмента радиуса  $R$  и высоты  $H$ .  
2) Выведите формулу объема усеченного конуса высоты  $H$  с радиусами оснований  $R$  и  $r$ .

## § 16. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1. Понятия дифференциального уравнения и его решения.** До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых неизвестными были числа. В математике и ее приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции. Так, задача о нахождении пути  $s(t)$  по заданной скорости  $v(t)$  сводится к решению уравнения  $s'(t) = v(t)$ , где  $v(t)$  — заданная функция, а  $s(t)$  — искомая функция.

Например, если  $v(t) = 3 - 4t$ , то для нахождения  $s(t)$  необходимо решить уравнение  $s'(t) = 3 - 4t$ .

Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*. *Решением* дифференциального уравнения называется любая функция, удовлетворяющая этому уравнению (то есть функция, при подстановке которой в заданное уравнение получаем тождество).

**Задача 1** Решите дифференциальное уравнение  $y' = x + 3$ .

Решение

► Необходимо найти функцию  $y(x)$ , производная которой равна  $x + 3$ , то есть найти первообразную для функции  $x + 3$ . По правилам нахождения первообразных получаем:  $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. ◀

При решении дифференциальных уравнений следует учитывать, что решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Такое решение называют общим решением заданного уравнения.

Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется. Решение, полученное с использованием такого условия, называют частным решением заданного дифференциального уравнения.

**Задача 2** Найдите решение  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = \sin x$ , удовлетворяющего условию  $y(0) = 2$ .

Решение

► Все решения этого уравнения записываются формулой  $y(x) = -\cos x + C$ . Из условия  $y(0) = 2$  находим  $-\cos 0 + C = 2$ . Тогда  $C = 3$ .

Ответ:  $y = -\cos x + 3$ . ◀

Решения многих физических, биологических, технических и других практических задач сводятся к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \quad (1)$$

где  $k$  — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \quad (2)$$

где  $C$  — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, в опытах установлено, что скорость  $m'(t)$  размножения бактерий (для которых достаточно пищи) связана с массой  $m(t)$  бактерий в момент времени  $t$  уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где  $k$  — положительное число, которое зависит от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную  $C$  можно найти, например, при условии, что в момент  $t = 0$  масса  $m_0$  бактерий известна. Тогда  $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$ , следовательно,  $m(t) = m_0 e^{kt}$ .

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если  $m'(t)$  — скорость радиоактивного распада в момент времени  $t$ , то  $m'(t) = -km(t)$ , где  $k$  — постоянная, которая зависит от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени  $t$  масса вещества равна  $m_0$ , то  $C = m_0$ , и тогда

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \quad (3)$$

Отметим, как на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, то есть промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть  $T$  — период полураспада, тогда из равенства (3) при  $t = T$  получаем  $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$ . Отсюда  $e^{kT} = 2$ ,  $k = \frac{\ln 2}{T}$ . Тогда формула (3) записывается так:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}}, \text{ то есть}$$

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

**2. Гармонические колебания.** На практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. п.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \quad (4)$$

где  $\omega$  — заданное положительное число,  $y = y(x)$ ,  $y'' = (y'(x))'$ .

Решением уравнения (4) является функция

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \quad (5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, которые определяются условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Например, если  $y(t)$  — отклонение точки струны, которая свободно колеблется, от положения равновесия в момент времени  $t$ , то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega$  — угловая частота,  $\varphi$  — начальная фаза колебания.

Графиком гармонического колебания является *синусоида*.

**3. Примеры применения первообразной и интеграла к решению практических задач.**

### Задача 3

Цилиндрический бак, высота которого 4,5 м, а радиус основания 1 м, заполнен водой. За какое время вода вытечет из бака через круглое отверстие в дне, радиус которого 0,05 м?

Решение

► Обозначим высоту бака  $H$ , радиус его основания  $R$ , радиус отверстия  $r$  (длины измеряем в метрах, время — в секундах) (рис. 118).

Скорость вытекания жидкости  $v$  зависит от высоты столба жидкости  $x$  и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma \sqrt{2gx}, \quad (6)$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,

$\sigma$  — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды  $\sigma = 0,6$ .

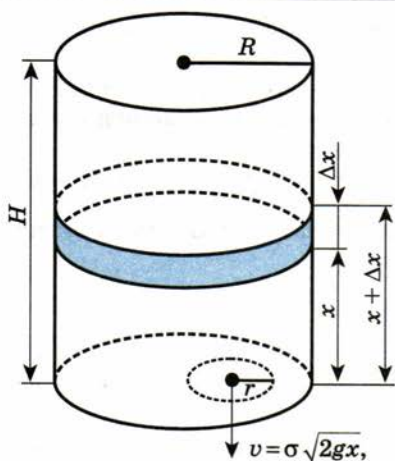


Рис. 118

Поэтому при уменьшении уровня воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не остается постоянной).

Пусть  $t(x)$  — время, за которое из бака высотой  $x$  с основанием радиуса  $R$  вытекает вода через отверстие радиуса  $r$  (рис. 118).

Найдем приближенно отношение  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ , считая, что за время  $\Delta t = t(x + \Delta x) - t(x)$  скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6).

За время  $\Delta t$  объем воды, которая вытекла из бака, равен объему цилиндра высотой  $\Delta x$  с основанием радиуса  $R$  (см. рис. 118), то есть равен  $\pi R^2 \Delta x$ . С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания  $v$  на время  $\Delta t$ , то есть объем равен

$\pi r^2 v \Delta t$ . Следовательно,  $\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t$ .

Учитывая формулу (6), получаем:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тогда при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Отсюда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если  $x = 0$  (в баке нет воды), то  $t(0) = 0$ , откуда  $C = 0$ . При  $x = H$  находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{g}} \cdot \sqrt{2H}.$$

Используя данные задачи, получаем:

$$t(4,5) = \frac{1^2}{(0,05)^2 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{9,8}} \cdot \sqrt{9} \approx 639 = (с).$$

Ответ: 639 с. ◁

**Задача 4**

Вычислите работу силы  $F$  при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 м необходима сила 5 Н.

**Решение**

► Согласно закону Гука сила  $F$  пропорциональна растяжению или сжатию пружины, то есть  $F = kx$ , где  $x$  — величина растяжения или сжатия (в метрах),  $k$  — постоянная. По условию задачи находим  $k$ . Поскольку при  $x = 0,01$  м сила  $F = 5$  Н, то  $k = \frac{F}{x} = 500$ .

Следовательно,  $F(x) = kx = 500x$ .

Найдем формулу для вычисления работы при перемещении тела (оно рассматривается как материальная точка), которое движется под действием переменной силы  $F(x)$ , направленной вдоль оси  $Ox$ . Пусть тело переместилось из точки  $x = a$  в точку  $x = b$ .

Обозначим через  $A(x)$  работу, выполненную при перемещении тела из точки  $a$  в точку  $x$ . Дадим  $x$  приращение  $\Delta x$ . Тогда  $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$  — работа, которая выполняется силой  $F(x)$  при перемещении тела из точки  $x$  в точку  $x + \Delta x$ . Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то силу  $F(x)$  на отрезке  $[x; x + \Delta x]$  будем считать постоянной и равной  $F(x)$ . Поэтому  $\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$ . Отсюда  $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$ .

Тогда при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем  $A'(x) = F(x)$ . Последнее равенство означает, что  $A(x)$  является первообразной для функции  $F(x)$ .

Учитывая, что  $A(a) = 0$ , по формуле Ньютона–Лейбница получаем:

$$\int_a^b F(x) dx = A(x) \Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Таким образом,

*работа переменной силы  $F(x)$  при перемещении тела из точки  $a$  в точку  $b$  равна*

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Используя данные задачи, получаем:

$$A = \int_0^{0,06} 500x dx = 500 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,06} = 0,9 \text{ (Дж)}. \triangleleft$$

**Вопросы для контроля**

1. Объясните, какое уравнение называется дифференциальным уравнением. Приведите примеры.
2. Объясните, какая функция называется решением дифференциального уравнения. Приведите примеры.

**Упражнения**

1. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t)$  (м/сек). Вычислите путь, который пройдет тело за промежуток времени от  $t = t_1$  до  $t = t_2$ :  
 1)  $v(t) = 3t^2 + 1$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4$ ;    2)  $v(t) = 2t^2 + t$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ .

2. Решите дифференциальное уравнение:  
 1)  $y' = 3 - 4x$ ;                      2)  $y' = 6x^2 - 8x + 1$ ;    3)  $y' = 3e^{2x}$ ;  
 4)  $y' = 4 \cos 2x$ ;                      5)  $y' = 3 \sin x$ ;                      6)  $y' = \cos x - \sin x$ .
3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию:  
 1)  $y' = \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ;                      2)  $y' = 2 \cos x$ ,  $y(\pi) = 1$ ;  
 3)  $y' = 3x^2 + 4x - 1$ ,  $y(1) = -2$ ;                      4)  $y' = 2 + 2x - 3x^2$ ,  $y(-1) = 2$ ;  
 5)  $y' = e^x$ ,  $y(1) = 1$ ;                      6)  $y' = e^{-x}$ ,  $y(0) = 2$ .
4. Какую работу необходимо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?
5. Сила 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу необходимо выполнить, чтобы растянуть пружину на 8 см?
6. Вода, которая подается с плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака равна  $h$ , радиус основания  $r$ .
7. Найдите работу против сил выталкивания при погружении шара в воду.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 2

1. Найдите первообразную для функции  $f(x) = e^{2x} - \cos x$ , график которой проходит через начало координат.
2. Найдите первообразную для функции  $f(x) = \sin x - e^{3x}$ , график которой проходит через начало координат.

Найдите первообразную для функции  $y = f(x)$ , график которой проходит через данную точку (3–7).

3. 1)  $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + 4 \cos 4x$ ,  $A(\pi; 3)$ ;    2)  $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \sin 5x$ ,  $B(\pi; 0)$ ;  
 3)  $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4$ ,  $B(-1; 12)$ ;    4)  $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$ ,  $N(9; -8)$ .
4. 1)  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ ,  $A(2; 6)$ ;    2)  $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ ,  $A(1; 4)$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{12}{\sqrt{3x-2}}$ ,  $A(9; 30)$ .
5. 1)  $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$ ,  $A(1; 8)$ ;    2)  $f(x) = \frac{12}{\sqrt{4x-3}}$ ,  $A(3; 18)$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+4}}$ ,  $A(4; 5)$ ;    4)  $f(x) = 4e^{2x-1}$ ,  $A(1; 3e)$ .
6. 1)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+5}}$ ,  $M(5; 7)$ ;    2)  $f(x) = 6e^{3x-2}$ ,  $A(1; 5e)$ ;  
 3)  $f(x) = 6x^2 + e^{4x}$ ,  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{e^2}{4}\right)$ ;    4)  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ ,  $M(2; 7)$ .

7. 1)  $f(x) = 16x^3 + e^{\frac{x}{2}}$ ,  $B(1; 2\sqrt{e})$ ;    2)  $f(x) = \frac{6}{\cos^2 6x}$ ,  $A\left(\frac{\pi}{18}; 3\sqrt{3}\right)$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + x$ ,  $M(4; -3)$ ;    4)  $f(x) = \frac{4}{\sin^2 4x}$ ,  $B\left(\frac{\pi}{24}; -2\sqrt{3}\right)$ .

Вычислите интеграл (8–9).

8. 1)  $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 5) dx$ ;    2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos 2x + \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}\right) dx$ ;    3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \sin 3x - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx$ ;  
 4)  $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx$ ;    5)  $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + x\right) dx$ ;    6)  $\int_{-3}^2 (x^2 - 2x) dx$ .  
 9. 1)  $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x) dx$ ;    2)  $\int_1^3 (4x^3 - 4x + 1) dx$ ;    3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ ;    4)  $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$ .

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями (10–14).

10. 1)  $y = x^2 - 2x + 3$ ,  $y = 3 - x$ ;    2)  $y = x^2 - 5x + 2$ ,  $y = 2 - x$ ;  
 3)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 1$ ,  $x = 4$ ;    4)  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 2$ ,  $x = 3$ .  
 11. 1)  $y = x^2 - 4x + 4$ ,  $y = 2 - x$ ;    2)  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $y = x + 1$ ;  
 3)  $y = 5 - x^2$ ,  $y = x + 3$ ;    4)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x + 4$ .  
 12. 1)  $y = x^3$ ,  $y = x$ ;    2)  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ ;  
 3)  $y = -x^2 + 2x + 1$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$ ;    4)  $y = x^2 + 2x + 2$ ,  $y = 2 - x^2$ .  
 13. 1)  $y = \frac{2}{x}$ ,  $x + y = 3$ ;    2)  $y = \frac{4}{x}$ ,  $x + y = 5$ ;  
 3)  $y = \frac{3}{x}$ ,  $y = 4x - 1$ ,  $x = 2$ ;    4)  $y = \frac{5}{x}$ ,  $y = 2x + 3$ ,  $x = 3$ .  
 14. 1)  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 1$ ;    2)  $y = 5 - x^2$ ,  $y = 4$ ;  
 3)  $y = x^2$ ,  $y = 8x - x^2$ ;    4)  $y = x^2$ ,  $y = 3x - 2x^2$ .  
 15. При каком значении  $a$  прямая  $x = a$  делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{8}{x}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 8$ , пополам?  
 16. При каком значении  $a$  прямая  $x = a$  делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{4}{x}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $x = 9$ , пополам?  
 17. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 2x - x^2$ , касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ , и осью ординат.  
 18. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 3x - x^2$ , касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ , и осью ординат.  
 19. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \sqrt{x+1}$  и  $y = \sqrt{7-x}$  и осью абсцисс.



## СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Интегральное исчисление и само понятие интеграла возникли из необходимости вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. Идеи интегрального исчисления берут свое начало в работах древних математиков. В частности, важное значение для развития интегрального исчисления имел *метод исчерпывания*, предложенный Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 г. до н. э.) и усовершенствованный Архимедом. По этому методу для вычисления площади плоской фигуры вокруг нее описывают ступенчатую фигуру и в нее вписывают ступенчатую фигуру. Увеличивая количество сторон полученных многоугольников, находят предел, к которому стремятся площади ступенчатых фигур (именно так в курсе геометрии вы доказывали формулу площади круга). Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но прошло более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи были доведены до уровня исчисления. Отметим, что математики XVII в., получившие множество новых результатов, учились на работах Архимеда. Именно в XVII в. было сделано много открытий, касающихся интегрального исчисления, введены основные понятия и термины.

Символ  $\int$  ввел Лейбниц (1675). Этот знак является измененной латинской буквой *S* (первая буква слова *summa*). Само слово *интеграл* ввел Я. Бернулли (1690). Другие известные вам термины, касающиеся интегрального исчисления, появились значительно позже. Название *первообразная для функции*, которое применяется сейчас, является русским переводом более раннего иностранного термина «примитивная функция», введенного Лагранжем (1797). Латинское слово *primitivus* переводится как «начальный»: функция  $F(x) = \int f(x) dx$  — начальная (или первообразная) для функции  $f(x)$ , которая образуется из  $F(x)$  дифференцированием. Понятие *неопределенного интеграла* и его обозначение ввел Лейбниц, а обозначение *определенного интеграла*  $\int_a^b f(x) dx$  ввел К. Фурье (1768–1830).

Следует отметить, что при всей значимости результатов, полученных математиками XVII в., интегрального исчисления в то время еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, на которых основывается решение многих отдельных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования. Это сделали Ньютон и Лейбниц, которые независимо друг от друга открыли факт, известный нам под названием формулы Ньютона–Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод. Необходимо было еще научиться находить первообразные для многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисления созданы. Методы интегрального исчисления активно развивались в следующем столетии (прежде всего следует назвать имена Л. Эйлера, который закончил систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитие интегрального исчисления значительный вклад внесли российские математики М. В. Остроградский (1801–1862), В. Я. Буняковский (1804–1889).

# Раздел ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, 3 ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

## § 17. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМ НЬЮТОНА

### 17.1. Элементы комбинаторики

Таблица 21

Комбинаторика	
<p><i>Комбинаторика</i> — раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий. Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называются <i>соединениями</i>.</p> <p>Если все элементы полученного множества разные — получаем соединения без повторений, а если в полученном множестве элементы повторяются, то получаем соединения с повторениями*.</p>	
Перестановки	
<p><i>Перестановкой из <math>n</math> элементов</i> называется любое упорядоченное множество из <math>n</math> заданных элементов.</p> <p>Иными словами, это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором, ..., какой — на <math>n</math>-м.</p>	
Формула числа перестановок ( $P_n$ )	Пример
<p><math>(P_n) = n!</math>, где <math>n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n</math> (читается: «Эн факториал»)</p>	<p>Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно <math>P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720</math>.</p>
Размещения	
<p><i>Размещением из <math>n</math> элементов по <math>k</math></i> называется любое упорядоченное множество из <math>k</math> элементов, состоящее из элементов заданного <math>n</math>-элементного множества.</p>	

\* Формулы для нахождения количества соединений с повторениями являются обязательными только для классов физико-математического профиля.

Формула числа размещений ( $A_n^k$ )	Пример
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, равно $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$
Сочетания	
<i>Сочетанием без повторений из <math>n</math> элементов по <math>k</math> называется любое <math>k</math>-элементное подмножество заданного <math>n</math>-элементного множества.</i>	
Формула числа сочетаний ( $C_n^k$ )	Пример
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (по определению считают, что $C_n^0 = 1$ )	Из класса, состоящего из 25 учащихся, можно выделить 5 учащихся для дежурства по школе $C_{25}^5$ способами, то есть $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$ способами.
Некоторые свойства числа сочетаний без повторений	
$C_n^k = C_n^{n-k}$ (в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$ )	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
Схема поиска плана решения простейших комбинаторных задач	
Выбор правила	
Правило суммы	Правило произведения
Если элемент $A$ можно выбрать $m$ способами, а элемент $B$ — $n$ способами (при этом выбор элемента $A$ исключает одновременный выбор и элемента $B$ ), то $A$ или $B$ можно выбрать $m + n$ способами.	Если элемент $A$ можно выбрать $m$ способами, а после этого элемент $B$ — $n$ способами, то $A$ и $B$ можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Выбор формулы					
Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?					
Да			Нет		
Все ли элементы входят в соединение?					
Да		Нет			
Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_m!}$ , где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

**17.1.1. Правила суммы и произведения. Упорядоченные множества. Размещения**

**Объяснение и обоснование**

**1. Понятие соединения. Правила суммы и произведения.** При решении многих практических задач приходится выбирать из определенной совокупности объектов элементы, имеющие те или иные свойства, размещать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то такие задачи называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором рассматриваются методы решения комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*. В комбинаторике рассматривается выбор и размещение элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий.

Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные — получаем соединения без повторений, а если в полученном множестве элементы могут повторяться, то получаем соединения с повторениями. В этом параграфе рассматриваются соединения без повторений, а соединения с повторениями — в § 21.

Решение многих комбинаторных задач базируется на двух основных правилах — правиле суммы и правиле произведения.

**Правило суммы.** Если на тарелке лежат 5 груш и 4 яблока, то выбрать один фрукт (то есть грушу или яблоко) можно 9 способами ( $5 + 4 = 9$ ). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент *A* можно выбрать *m* способами, а элемент *B* — *n* способами (при этом выбор элемента *A* исключает одновременный выбор и элемента *B*), то *A* или *B* можно выбрать  $m + n$  способами.

Уточним содержание этого правила, используя понятие множеств и операций над ними.

Пусть множество  $A$  состоит из  $m$  элементов, а множество  $B$  — из  $n$  элементов. Если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются (то есть  $A \cap B = \emptyset$ ), то множество  $A \cup B$  состоит из  $m + n$  элементов.

*Правило произведения.* Если в киоске продают ручки 5 видов и тетради 4 видов, то выбрать набор из ручки и тетради (то есть пару — ручка и тетрадь) можно  $5 \cdot 4 = 20$  способами (поскольку с каждой из 5 ручек можно взять любую из 4 тетрадей). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а после этого элемент  $B$  —  $n$  способами, то  $A$  и  $B$  можно выбрать  $m \cdot n$  способами.

Это утверждение означает, что если для каждого из  $m$  элементов  $A$  можно взять в пару любой из  $n$  элементов  $B$ , то количество пар равно произведению  $m \cdot n$ .

В терминах множеств полученный результат можно сформулировать так.

Если множество  $A$  состоит из  $m$  элементов, а множество  $B$  — из  $n$  элементов, то множество всех упорядоченных пар\*  $(a; b)$ , где первый элемент принадлежит множеству  $A$  (то есть  $a \in A$ ), а второй — множеству  $B$  (то есть  $b \in B$ ), состоит из  $m \cdot n$  элементов.

Повторяя приведенные рассуждения несколько раз (или, более строго, используя метод математической индукции), получаем, что правила суммы и произведения можно применять при выборе произвольного конечного количества элементов.

**2. Упорядоченные множества.** При решении комбинаторных задач приходится рассматривать не только множества, в которых элементы можно записывать в любом порядке, но и так называемые *упорядоченные множества*. Для упорядоченных множеств существенным является порядок следования их элементов, то есть то, какой элемент записан на первом месте, какой на втором и т. д. В частности, если одни и те же элементы записать в разном порядке, то мы получим различные упорядоченные множества. Чтобы различить записи упорядоченного и неупорядоченного множеств, элементы упорядоченного множества часто записывают в круглых скобках, например  $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$ .

Рассматривая упорядоченные множества, следует учитывать, что одно и то же множество можно упорядочить по-разному. Например, множество из трех чисел  $\{-5; 1; 3\}$  можно упорядочить по возрастанию:  $(-5; 1; 3)$ , по убыванию:  $(3; 1; -5)$ , по возрастанию абсолютной величины числа:  $(1; 3; -5)$  и т. д.

\* Множество всех упорядоченных пар  $(a; b)$ , где первый элемент принадлежит множеству  $A$  (то есть  $a \in A$ ), а второй — множеству  $B$  (то есть  $b \in B$ ), называют *декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$*  и обозначают  $A \times B$ .

(Отметим, что декартово произведение  $B \times A$  также состоит из  $m \cdot n$  элементов).

Для того чтобы задать конечное упорядоченное множество из  $n$  элементов, достаточно указать, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на  $n$ -м.

### 3. Размещения

*Размещением из  $n$  элементов по  $k$  называется любое упорядоченное множество из  $k$  элементов, состоящее из элементов заданного  $n$ -элементного множества.*

Например, из множества, содержащего три цифры  $\{1; 5; 7\}$ , можно составить следующие размещения из двух элементов без повторов:

$(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5)$ .

Количество размещений из  $n$  элементов по  $k$  обозначается  $A_n^k$  (читается: « $A$  из  $n$  по  $k$ »,  $A$  — первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»). Как видим,  $A_3^2 = 6$ .

- Выясним, сколько всего можно составить размещений из  $n$  элементов по  $k$  без повторов. Составление размещения представим себе как последовательное заполнение  $k$  мест, которые будем изображать в виде клеточек (рис. 119). На первое место мы можем выбрать один из  $n$  элементов заданного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать  $n$  способами).

Если элементы нельзя повторять, то на второе место можно выбрать только один элемент из оставшихся, то есть из  $n - 1$  элементов. Теперь уже два элемента использованы и на третье место можно выбрать только один из  $n - 2$  элементов и т. д. На  $k$ -е место можно выбрать только один из  $n - (k - 1) = n - k + 1$  элементов (см. рис. 119).

Поскольку требуется выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на  $k$ -е, то, используя правило произведения, получим следующую формулу числа размещений из  $n$  элементов по  $k$ :

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}}. \quad \circ$$

Например,  $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$  (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

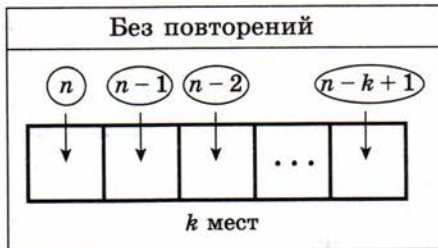


Рис. 119

Аналогично можно обосновать формулу для нахождения числа размещений с повторениями (см. § 19).

При решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления. Для этого можно выяснить следующее:

— Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

— Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из  $n$  заданных элементов в соединении используется только  $k$  элементов, то по определению — это размещение из  $n$  элементов по  $k$ .

Заметим, что после определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями (см. также § 19).

### Примеры решения задач

#### Задача 1

На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете  $4 \times 100$  м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

#### Решение

- Количество способов выбрать из 12 спортсменок четырех для участия в эстафете равно количеству размещений из 12 элементов по 4 (без повторений), то есть

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880. \triangleleft$$

#### Комментарий

Для выбора формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку для спортсменок важно, в каком порядке они будут бежать, то порядок при выборе элементов учитывается. В полученное соединение входят не все 12 заданных элементов. Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 12 элементов по 4 (без повторений, поскольку каждая спортсменка может бежать только на одном этапе эстафеты).

#### Задача 2

Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются.

#### Решение

- Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \triangleleft$$

#### Комментарий

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования цифр учитывается и не все элементы выбираются (только 3 из заданных семи). Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений).

**Задача 3\***

Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, если цифры в числе не повторяются.

**Комментарий**

Выбор формулы проводится таким же образом, как и в задаче 2. Следует учесть, что если число, составленное из трех цифр, начинается цифрой 0, то оно не считается трехзначным. Следовательно, для ответа на вопрос задачи можно сначала из заданных 7 цифр записать все числа, состоящие из 3 цифр (см. пример 2), а затем из количества полученных чисел вычесть количество чисел, составленных из трех цифр, но начинающихся цифрой 0. В последнем случае мы фактически будем из всех цифр без нуля (их 6) составлять двузначные числа. Тогда их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2 (см. решение).

Также можно выполнить непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения. В этом случае удобно сделать рассуждения наглядными, изображая соответствующие разряды в трехзначном числе в виде клеточек, например так:

6 возможностей	6 возможностей	5 возможностей
----------------	----------------	----------------

**Решение**

▶ Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), если цифры в числе не повторяются, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть  $A_7^3$ .

Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых первым элементом является цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть  $A_6^2$ . Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180. \triangleleft$$

**Задача 4**

Решите уравнение  $\frac{A_x^4}{A_x^2} = 6$ .

**Решение**

▶ ОДЗ:  $x \in N, x \geq 4$ . Тогда получаем:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6.$$

На ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям:

$$\begin{aligned} (x-2)(x-3) &= 6, \\ x^2 - 5x &= 0, \\ x(x-5) &= 0. \end{aligned}$$

**Комментарий**

Уравнения, в запись которых входят выражения, обозначающие количество соответствующих соединений из  $x$  элементов, считаются определенными только при натуральных значениях переменной  $x$ . В данном случае, чтобы выражение  $A_x^4$  имело смысл, необходимо



Тогда  $x = 0$  или  $x = 5$ .  
 В ОДЗ входит только  $x = 5$ .  
 Ответ: 5.  $\triangleleft$

выбирать натуральные значения  $x \geq 4$  (в этом случае  $A_x^2$  также существует и, конечно,  $A_x^2 \neq 0$ ). Для преобразования уравнения используем соответствующие формулы:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$A_x^2 = x(x-1).$$

### Вопросы для контроля

1. Сформулируйте и объясните на примерах правило суммы и правило произведения для решения комбинаторных задач.
2. Объясните, какое конечное множество считается упорядоченным. Приведите примеры упорядоченных конечных множеств.
3. Объясните, что называется размещением из  $n$  элементов по  $k$  без повторений. Приведите примеры.
4. Запишите формулу для вычисления числа размещений из  $n$  элементов по  $k$  без повторений. Приведите примеры ее использования.
- 5\*. Обоснуйте формулу для вычисления числа размещений из  $n$  элементов по  $k$  без повторений.

### Упражнения

- 1°. Имеем 4 разных конверта без марок и 3 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправления письма?
- 2°. В коробке находятся 10 белых и 6 черных шаров.
  - 1) Сколькими способами из коробки можно вынуть один шар любого цвета?
  - 2) Сколькими способами из коробки можно вынуть два шара разного цвета?
3. В корзине лежат 12 яблок и 9 апельсинов (все разные). Петя выбирает или яблоко, или апельсин, после него из оставшихся фруктов Надя выбирает яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Пети у Нади больше возможностей выбора?
4. Ученику необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами может быть составлено расписание его экзаменов (если в один день он может сдавать только один экзамен)?
5. Сколькими способами может расположиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
6. Из 30 участников собрания необходимо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
7. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м (предполагаем, что все они покажут разное время)?

8. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг из трех горизонтальных полос, если есть материал 7 разных цветов?
9. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?
10. На плоскости отметили 5 точек. Их необходимо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать, если в латинском алфавите 26 букв?
11. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в числе не повторяются?
- 12\*. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, если цифры в числе не повторяются?
13. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные и первая цифра отлична от нуля?
14. Сколько разных трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы полученные числа были: 1) четными; 2) кратными 5?
- 15\*. Решите уравнение: 1)  $A_x^2 = 20$ ; 2)  $\frac{A_x^5}{A_x^3} = 6$ .

### 17.1.2. Перестановки

#### Объяснение и обоснование

*Перестановкой из  $n$  элементов называется любое упорядоченное множество из  $n$  заданных элементов.*

Напомним, что упорядоченное множество — это *такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на  $n$ -м.*

Например, переставляя цифры в числе 236 (там множество цифр {2; 3; 6} уже упорядоченное), можно составить такие *перестановки без повторений*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — всего 6 перестановок\*.

Количество перестановок без повторений из  $n$  элементов обозначается  $P_n$  ( $P$  — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Как видим,  $P_3 = 6$ .

- Фактически перестановки без повторений из  $n$  элементов являются размещениями из  $n$  элементов по  $n$  без повторений, поэтому  $P_n = A_n^n = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_n$ . Произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  обозначается  $n!$ . Поэтому полученная **формула числа перестановок без повторений из  $n$  элементов** может быть записана так:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad \circ$$

\* Отметим, что каждая такая перестановка определяет трехзначное число, составленное из цифр 2, 3, 6 так, что цифры в числе не повторяются.

Например,  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

С помощью факториалов формулу для числа размещений без повторений

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}} \quad (1)$$

можно записать в другом виде. Для этого умножим и разделим выражение в формуле (1) на произведение  $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$ . Получаем  $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) =$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Следовательно, формула числа размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  может быть записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

Для того чтобы этой формулой можно было пользоваться при всех значениях  $k$ , в частности при  $k = n - 1$  и при  $k = n$ , договорились считать, что  $1! = 1$  и  $0! = 1$ .

Например, по формуле (2)  $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ .

Обратим внимание, что в тех случаях, когда значение  $n!$  оказывается очень большим, ответы оставляют записанными с помощью факториалов.

Например,  $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}$ .

### Примеры решения задач

Напомним, что для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно выяснить следующее:

- Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?
- Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и все  $n$  заданных элементов используются в соединении, то по определению это перестановки из  $n$  элементов.

#### Задача 1

Найдите, сколькими способами можно восемь учащихся построить в колонну по одному.

#### Решение

► Количество способов равно числу перестановок из 8 элементов, то есть

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320. \triangleleft$$

#### Комментарий

Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов учитывается и все 8 заданных элементов

выбираются, то соответствующие соединения — это перестановки из 8 элементов без повторов. Их количество можно вычислить по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

**Задача 2**

Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 3, 7, 9 (цифры в числе не повторяются).

**Решение**

► Из четырех цифр 0, 3, 7, 9, не повторяя заданные цифры, можно получить  $P_4$  перестановок. Перестановки, начинающиеся с цифры 0, не являются записью четырехзначного числа — их количество  $P_3$ . Тогда искомое количество четырехзначных чисел равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18. \triangleleft$$

**Комментарий**

Поскольку порядок следования элементов учитывается и для получения четырехзначного числа надо использовать все элементы, то искомые соединения — это перестановки из 4 элементов. Их количество —  $P_4$ . При этом необходимо учесть, что в четырехзначном числе на первом месте не может стоять цифра 0. Таких чисел будет столько, сколько раз мы сможем выполнить перестановки из 3 оставшихся цифр, то есть  $P_3$ .

**Задача 3\***

Есть десять книг, из которых четыре — учебники. Сколькими способами можно поставить эти книги на полку так, чтобы все учебники стояли рядом?

**Решение**

► Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 10, а 7 книг. Это можно сделать  $P_7$  способами. В каждом из полученных наборов книг можно выполнить еще  $P_4$  перестановок учебников. По правилу умножения искомое количество способов равно

$$P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 254 = 120\,960. \triangleleft$$

**Комментарий**

Задачу можно решать в два этапа. На первом этапе условно будем считать все учебники за 1 книгу.

Тогда получим 7 книг (6 не учебников + 1 условная книга — учебник). Порядок следования элементов учитывается, и используются все элементы (поставить на полку необходимо все книги). Следовательно, соответствующие соединения — это перестановки из 7 элементов. Их количество —  $P_7$ .

На втором этапе решения будем переставлять между собой только

учебники. Это можно сделать  $P_4$  способами. Поскольку нам надо переставить и учебники, и другие книги, то используем правило произведения.

### Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется перестановкой из  $n$  элементов без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из  $n$  элементов без повторений. Приведите примеры ее использования.
- 3\*. Обоснуйте формулу для вычисления числа перестановок из  $n$  элементов без повторений.

### Упражнения

1. Сколькими способами 4 мужчин могут расположиться на четырехместной скамейке?
2. Курьер должен разнести пакеты в 7 разных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?
3. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению  $abcde$ , которые получаются из него перестановкой множителей?
4. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается тремя цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы позвонить подруге (если она помнит все остальные цифры номера).
5. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр:
  - 1) 1, 2, 5, 6, 7, 8;
  - 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?
6. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9 (без повторения цифр), есть таких, которые:
  - 1) начинаются с цифры 3;
  - 2) кратны 5?
7. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без повторения цифр в числе).
8. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, иностранный язык, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли подряд?
- 9\*. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг — это сборники стихотворений, чтобы сборники стихотворений стояли рядом в случайном порядке?
10. Найдите, сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1 по 10. Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки — на четных?

## 17.1.3. Сочетания

## Объяснение и обоснование

## 1. Сочетания без повторений.

*Сочетанием без повторений из  $n$  элементов по  $k$*  называется любое  $k$ -элементное подмножество заданного  $n$ -элементного множества.

Например, из множества  $\{a, b, c, d\}$  можно составить следующие сочетания без повторений из трех элементов:  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$ .

Количество сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $k$  элементов обозначается символом  $C_n^k$  (читается: «Число сочетаний из  $n$  по  $k$ » или «це из  $n$  по  $k$ »,  $C$  — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Как видим,  $C_4^3 = 4$ .

- Выясним, сколько всего можно составить сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $k$ . Для этого используем известные нам формулы числа размещений и перестановок.

Составление размещения без повторений из  $n$  элементов по  $k$  проведем в два этапа. Сначала выберем  $k$  разных элементов из заданного  $n$ -элементного множества, не учитывая порядок выбора этих элементов (то есть выберем  $k$ -элементное подмножество из  $n$ -элементного множества — сочетание без повторений из  $n$ -элементов по  $k$ ). По нашему обозначению это можно сделать  $C_n^k$  способами. После этого полученное множество из  $k$  разных элементов упорядочим. Его можно упорядочить  $P_k = k!$  способами. Получим размещения без повторений из  $n$  элементов по  $k$ . Следовательно, количество размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  в  $k!$  раз больше числа сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $k$ . То есть  $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ . Отсюда  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ . Учитывая, что по формуле (2)

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ , получаем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \circ \quad (3)$$

Например,  $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$ , что совпадает со значением, полученным выше.

Используя формулу (3), можно легко обосновать свойство 1 числа сочетаний без повторений, приведенное в таблице 21 (с. 234).

- 1) Поскольку  $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_n^k$ , то
- $$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad \circ \quad (4)$$

Для того чтобы формулу (4) можно было использовать и при  $k = n$ , договорились считать, что  $C_n^0 = 1$ . Тогда по формуле (4)  $C_n^n = C_n^0 = 1$ .

Заметим, что формулу (4) можно получить без вычислений с помощью достаточно простых комбинаторных рассуждений.

Когда мы выбираем  $k$  предметов из  $n$ , то  $n - k$  предметов мы оставляем. Если же, напротив, выбранные предметы оставим, а другие  $n - k$  — выберем, то получим способ выбора  $n - k$  предметов из  $n$ . Заметим, что мы получили *взаимно-однозначное соответствие* способов выбора  $k$  и  $n - k$  предметов из  $n$ . Значит, количество одних и других способов одинаково. Но количество одних  $C_n^k$ , а других —  $C_n^{n-k}$ , поэтому  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

Если в формуле (3) сократить числитель и знаменатель на  $(n - k)!$ , то получим формулу, по которой удобно вычислять  $C_n^k$  при малых значениях  $k$ :

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}_{k \text{ множителей}}}. \quad (5)$$

$$\text{Например, } C_{25}^2 = \frac{\overbrace{25 \cdot 24}^{2 \text{ множителя}}}{1 \cdot 2} = 25 \cdot 12 = 300, \quad C_8^3 = \frac{\overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}^{3 \text{ множителя}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56.$$

**2. Вычисление числа сочетаний без повторов с помощью треугольника Паскаля.** Для вычисления числа сочетаний без повторов можно применять формулу (3):  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , а можно последовательно вычислять соответствующие значения, пользуясь таким свойством:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \quad (6)$$

- Для обоснования равенства (6) можно записать сумму  $C_n^k + C_n^{k+1}$ , используя формулу (3), и после приведения полученных дробей к общему знаменателю получить формулу для правой части равенства (6) (проделайте это самостоятельно).

Также формулу (6) можно получить без вычислений с помощью комбинаторных рассуждений.

$C_{n+1}^{k+1}$  — это количество способов выбрать  $k + 1$  предмет из  $n + 1$ . Посчитаем это количество, зафиксировав один предмет (назовем его «фиксированным»). Если мы не берем фиксированный предмет, то нам нужно выбрать  $k + 1$  предмет из  $n$  тех, что остались, а если мы его берем, то нужно выбрать из  $n$  тех, что остались, еще  $k$  предметов. Первое можно сделать  $C_n^{k+1}$  способами, второе —  $C_n^k$  способами. Всего как раз  $C_n^k + C_n^{k+1}$  способов, следовательно,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \quad \circ$$

Это равенство позволяет последовательно вычислять значения  $C_n^k$  с помощью специальной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*. Если считать, что  $C_0^0 = 1$ , то таблица будет иметь следующий вид (табл. 22).

Таблица 22

		Значение $C_n^k$							
$k$	$n$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	1							
1	1	1	1						
2	2	1	2	1					
3	3	1	3	3	1				
4	4	1	4	6	4	1			
5	5	1	5	10	10	5	1		
6	6	1	6	15	20	15	6	1	
...	...	•	•	•					
	$n$	$C_n^0$	$C_n^1$	$C_n^2$	$C_n^3$	$C_n^4$	$C_n^5$	$C_n^6$	...

Каждая строка этой таблицы начинается с единицы и заканчивается единицей ( $C_n^0 = C_n^n = 1$ ).

Если какая-либо строка уже заполнена, например третья, то в четвертой строке надо записать на первом месте единицу. На втором месте запишем число, равное сумме двух чисел третьей строки, стоящих над ним левее и правее (поскольку по формуле (6)  $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1 + 3 = 4$ ). На третьем месте запишем число, равное сумме двух следующих чисел третьей строки, стоящих над ним левее и правее ( $C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6$ ), и т. д. (а на последнем месте снова запишем единицу).

### Примеры решения задач

Обратим внимание, что, как и раньше, для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно ответить на вопросы:



1) Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

2) Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?

Для выяснения того, что заданное соединение является сочетанием, достаточно ответить только на первый вопрос (см. схему в таблице 21 на с. 235). Если порядок следования элементов не учитывается, то по определению это сочетание из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

**Задача 1** Из 12 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение

► Количество способов выбрать из 12 туристов трех дежурных равно количеству сочетаний из 12 элементов по 3 (без повторений), то есть

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220. \quad \triangleleft$$

Комментарий

Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов не учитывается (для дежурных неважно, в каком порядке их выберут), то соответствующее соединение является сочетанием из 12 элементов по 3 (без повторений). Для вычисления можно использовать формулы (3) или (5), в данном случае применяем формулу (3):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Задача 2** Из вазы с фруктами, в которой лежат 10 разных яблок и 5 разных груш, требуется выбрать 2 яблока и 3 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение

► Выбрать 2 яблока из 10 можно  $C_{10}^2$  способами. При каждом выборе яблок груши можно выбрать  $C_5^3$  способами. Тогда по правилу произведения выбор требуемых фруктов можно выполнить  $C_{10}^2 \cdot C_5^3$  способами. Получаем

$$C_{10}^2 \cdot C_5^3 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 450. \quad \triangleleft$$

Комментарий

Сначала отдельно выберем 2 яблока из 10 и 3 груши из 5.

Поскольку при выборе яблок или груш порядок следования элементов не учитывается, то соответствующие соединения — сочетания без повторений.

Учитывая, что требуется выбрать 2 яблока и 3 груши, используем правило произведения и перемножим полученные возможности выбора яблок ( $C_{10}^2$ ) и груш ( $C_5^3$ ).

### Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$  без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  без повторений. Приведите примеры ее использования.
- 3\*. Обоснуйте формулу для вычисления числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  без повторений.
- 4\*. Обоснуйте свойство  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ .
- 5\*. Объясните, как можно последовательно вычислять значение  $C_n^k$  с помощью специальной таблицы — треугольника Паскаля.
6. Объясните на примерах, как можно выбрать соответствующую формулу при решении простейших комбинаторных задач.

### Упражнения

- 1°. В классе 7 учащихся успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
- 2°. В магазине «Филателия» продается 8 разных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?
- 3°. Ученикам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
4. На полке стоят 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:
  - 1) словарь ему нужен обязательно; 2) словарь ему не нужен?
- 5°. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории необходимо выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?
 

*Решите упражнения 6–25, используя известные вам формулы и правила комбинаторики.*
6. Во время встречи 16 человек пожали друг другу руки. Сколько всего сделано рукопожатий?
7. Группа учащихся из 30 человек решила обменяться фотографиями. Сколько всего фотографий необходимо для этого?
- 8°. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Уренгой»?
- 9°. Из 12 рабочих-бурильщиков нужно командировать 5 для работы в соседней области. Сколькими способами можно сформировать такую бригаду для командировки?
10. Сколькими разными способами собрание из 40 человек может выбрать из числа своих членов председателя собрания, его заместителя и секретаря?

11. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой (так, чтобы каждая прямая проходила через две заданные точки)?
12. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без их повторения?
13. Определите число всех диагоналей правильного: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двенадцатиугольника; 4) пятнадцатиугольника.
14. Сколько разных трехцветных флагов, состоящих из трех горизонтальных полос, можно сшить, комбинируя синий, красный и белый цвета?
15. Сколько разных плоскостей можно провести через 10 точек (так, чтобы каждая плоскость проходила через три заданные точки), если никакие четыре точки не лежат в одной плоскости?
16. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8 без их повторения?
17. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрой 5? числом 12? числом 123?
18. Среди сочетаний из 10 букв  $a, b, c, \dots$  по 4 сколько таких, которые не содержат букву  $a$ ? буквы  $a$  и  $b$ ?
19. Среди размещений из 12 букв  $a, b, c, \dots$  по 5 сколько таких, которые не содержат букву  $a$ ? буквы  $a$  и  $b$ ?
20. Сколько необходимо взять элементов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше, чем число размещений из них по 2?

Решите уравнение (21–24).

21. 1)  $A_x^2 = 42$ ; 2)  $A_x^3 = 56x$ ; 3)  $A_{x+1}^2 = 30$ ; 4)  $5C_x^3 = C_{x+2}^4$ .
22. 1)  $C_{x-3}^2 = 21$ ; 2)  $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$ ; 3)  $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$ ; 4)  $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$ .
23. 1)  $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$ ; 2)  $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$ ; 3)  $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$ ; 4)  $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$ .
24. 1)  $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$ ; 2)  $\frac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$ ; 3)  $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$ ; 4)  $\frac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110$ .
25. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3}; \end{cases} 2) \begin{cases} C_x^{y+1} = 2,5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases} 3) \begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2} = 1, \\ C_x^2 = 153; \end{cases} 4) \begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1,6. \end{cases}$$

## 17.2. Бином Ньютона

Таблица 23

Бином Ньютона
$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$

Поскольку  $1 = C_n^0 = C_n^n$  и  $x^0 = 1$ ,  $a^0 = 1$  (при  $x \neq 0$  и  $a \neq 0$ ), то формулу бинома Ньютона можно записать еще и так:

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^n a^0 x^n$$

**Общий член** разложения степени бинома имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \quad (\text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты  $C_n^k$  называют **биномиальными коэффициентами**.

Свойства биномиальных коэффициентов

1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых) в разложении  $n$ -й степени бинома равно  $n + 1$ .
2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой** (поскольку  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ).
3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна  $2^n$ :**

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.**
5. **Для вычисления биномиальных коэффициентов можно воспользоваться треугольником Паскаля, в котором вычисления коэффициентов основываются на формуле  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k+1}$ .**

Треугольник Паскаля

Степень	Коэффициенты разложения	Ориентир
$(a + x)^0$	1	<i>В каждом ряду по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним справа и слева</i>
$(a + x)^1$	1 1	
$(a + x)^2$	1 2 1	
$(a + x)^3$	1 3 3 1	
$(a + x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a + x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a + x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
...	...	

Например,  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

## Объяснение и обоснование

**1. Бином Ньютона.** Двучлен вида  $a + x$  также называют биномом. Из курса алгебры известно, что:

$$(a + x)^1 = a + x = 1 \cdot a + 1 \cdot x;$$

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2;$$

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3.$$

Можно заметить, что коэффициенты разложения степени бинома  $(a + x)^n$  при  $n = 1, 2, 3$  совпадают с числами в соответствующей строке треугольника Паскаля. Оказывается, что это свойство выполняется для любого натурального  $n$ , то есть справедлива формула

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (7)$$

Формулу (7) называют *биномом Ньютона*. Правая часть этого равенства называется разложением степени бинома  $(a + x)^n$ , а числа  $C_n^k$  (при  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) называют *биномиальными коэффициентами*. **Общий член разложения** степени бинома имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \quad (\text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

- Обосновать формулу (7) можно, например, с помощью метода математической индукции (содержание и алгоритм использования метода см. в учебнике 10 класса). (Проведите такое обоснование самостоятельно.) Приведем также комбинаторные рассуждения для обоснования формулы бинома Ньютона.

По определению степени с натуральным показателем  $(a + x)^n = (a + x) \times (a + x) \dots (a + x)$  (всего  $n$  скобок). Раскрывая скобки, получаем в каждом слагаемом произведение  $n$  букв, каждая из которых —  $a$  или  $x$ . Если, например, в каком-то слагаемом количество букв  $x$  равно  $k$ , то количество букв  $a$  в нем равно  $n - k$ , то есть каждое слагаемое имеет вид  $a^{n-k} x^k$  при каком-то  $k$  от 0 до  $n$ . Покажем, что для каждого такого  $k$  число слагаемых  $a^{n-k} x^k$  равно  $C_n^k$ , откуда после приведения подобных членов и получаем формулу бинома. Но это действительно так. Произведение  $a^{n-k} x^k$  получаем, взяв букву  $x$  из  $k$  скобок и букву  $a$  из  $n - k$  тех скобок, которые остались. Разные такие слагаемые получим путем разного выбора первых  $k$  скобок, а  $k$  скобок из  $n$  можно выбрать именно  $C_n^k$  способами. Следовательно, общий член разложения бинома  $(a + x)^n$  действительно имеет вид  $C_n^k a^{n-k} x^k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Именно из-за бинома Ньютона числа  $C_n^k$  часто называют *биномиальными коэффициентами*. ○

Записывая степень двучлена по формуле бинома Ньютона для небольших значений  $n$ , биномиальные коэффициенты можно вычислять по треугольнику Паскаля (см. табл. 23).

Например,  $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ .

Так как  $C_n^0 = C_n^n = 1$ , формулу бинома Ньютона можно записать в виде:

$$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n, \quad (12)$$

а учитывая, что  $x^0 = 1$  и  $a^0 = 1$  (при  $x \neq 0$  и  $a \neq 0$ ), еще и так:

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^n a^0 x^n. \quad (13)$$

Если в формуле бинома Ньютона (12) заменить  $x$  на  $(-x)$ , то получим формулу возведения в степень разности  $a - x$ :

$$(a - x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 - C_n^3 a^{n-3} x^3 + \dots + (-1)^n x^n.$$

Например,  $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$  (знаки членов разложения чередуются!).

## 2. Свойства биномиальных коэффициентов

1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых) в разложении  $n$ -й степени бинома равно  $n + 1$ , поскольку разложение содержит все степени  $x$  от 0 до  $n$  (и других слагаемых не содержит).
2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой**, поскольку  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .
3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна  $2^n$** .
- Для обоснования полагаем в равенстве (13) (или в равенстве (7)) значения  $a = x = 1$  и получаем:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad \circ$$

Например,  $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$ .

4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах**.
- Для обоснования возьмем в равенстве (13) значения  $a = 1$ ,  $x = -1$ . Получаем:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Тогда  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots \quad \circ$

## Примеры решения задач

### Задача 1

По формуле бинома Ньютона найдите разложение степени

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6.$$

### Комментарий

Для нахождения коэффициентов разложения можно использовать треугольник Паскаля (с. 251) или вычислять их по общей формуле. По треугольнику Паскаля коэффициенты равны: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Учитывая, что при возведении в степень разности знаки членов разложения чередуются, получаем:

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для упрощения записи ответа можно избавиться от иррациональности в знаменателях полученных выражений (см. решение) или сначала учесть, что ОДЗ заданного выражения:  $x > 0$ , и тогда  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ . То есть заданное выражение можно записать так:  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$  и возвести в степень последнее выражение.

Решение

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 &= x^6 - 6x^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 - 6x \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 + \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} = x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 - \\ &- 20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}. \triangleleft \end{aligned}$$

**Задача 2** В разложении степени  $\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$  найдите член, содержащий  $b^3$ .

Решение

► ОДЗ:  $b > 0$ . Тогда

$$\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16} = \left(b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}.$$

Общий член разложения:

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k} \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{16}^k b^{\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3}}.$$

По условию член разложения должен содержать  $b^3$ , следовательно,

$$\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3} = 3. \text{ Отсюда } k = 6.$$

Тогда член разложения, содержащий  $b^3$ , равен

$$\begin{aligned} T_{k+1} = T_7 &= C_{16}^6 b^{\frac{16-6}{2} - \frac{6}{3}} = C_{16}^6 b^3 = \frac{16!}{6!(16-6)!} b^3 = \\ &= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8008b^3. \triangleleft \end{aligned}$$

Комментарий

На ОДЗ ( $b > 0$ ) каждое слагаемое в заданном двучлене можно записать как степень с дробным показателем. Это позволит проще записать общий член разложения степени  $(a + x)^n$ :

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k,$$

(где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ), выяснить, какой из членов разложения содержит  $b^3$ , и записать его.

Чтобы упростить запись общего члена разложения, удобно отметить, что

$$a = \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = b^{-\frac{1}{3}}, \quad n = 16.$$

### Вопросы для контроля

- а) Запишите формулу бинома Ньютона. Приведите примеры ее использования.  
б\*) Докажите формулу бинома Ньютона.
- Сформулируйте и докажите свойства биномиальных коэффициентов.

## Упражнения

Найдите разложение степени бинома (1–3).

1. 1)  $(x + a)^6$ ;      2)  $(x + c)^4$ ;      3)  $(x + 2)^5$ ;      4\*)  $(1 + a)^{12}$ .  
 2. 1)  $(x - a)^7$ ;      2)  $(x^2 - a)^6$ ;      3)  $(a^2 + 1)^8$ ;      4\*)  $(a + \sqrt{b})^{11}$ .  
 3. 1)  $(\sqrt{m} - n)^5$ ;      2)  $(x - 2y)^5$ ;      3)  $(3x + 2y)^4$ ;  
 4)  $(2a^2 - 3a)^5$ ;      5)  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ .

4. Найдите:

- 1) четвертый член разложения  $(a + 3)^7$ ;  
 2) девятый член разложения  $(a + \sqrt{b})^{12}$ ;  
 3) шестой член разложения  $(a^2 + b^3)^{13}$ ;  
 4) средний член разложения  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$ .

5. Найдите член разложения бинома:

- 1)  $(x + y)^9$ , содержащий  $x^7$ ;      2)  $(\sqrt{a} + b)^9$ , содержащий  $a^3$ ;  
 3)  $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a})^{20}$ , содержащий  $a^7$ ;      4)  $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[5]{x^8})^{12}$ , содержащий  $x^{\frac{22}{3}}$ ;  
 5) член разложения  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ , не содержащий  $a$ ;  
 6) член разложения  $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ , не содержащий  $a$ .

6\*. Найдите показатель степени бинома, если:

- 1) третий член разложения  $(\sqrt[3]{a^2} + a^{-1})^n$  содержит  $a^0$ ;  
 2) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения  $(1 + x)^{n+1}$  равны между собой;  
 3) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения соответственно равны 120 и 252.

7\*. Найдите показатель степени бинома, если:

- 1) шестой член разложения  $\left(a^{-\frac{1}{30}} + \sqrt[5]{a}\right)^n$  не содержит  $a$ ;  
 2) отношение седьмого члена разложения  $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$  к седьмому члену разложения от конца равно  $\frac{1}{6}$ ;  
 3) шестой член разложения  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} - \sqrt[5]{a^3}\right)^n$  не зависит от  $a$ .

8\*. В разложении степени бинома  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$  коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена как 7 : 2. Найдите член разложения, содержащий букву  $x$  в первой степени.



- 9\*. В разложении степени бинома  $\left(\frac{1}{z} + \sqrt{z}\right)^n$  коэффициент четвертого члена относится к коэффициенту шестого члена как 5 : 18. Найдите член разложения, не зависящий от  $z$ .
- 10\*. Коэффициент третьего от конца члена разложения  $(\sqrt[7]{z^{-1}} + \sqrt[3]{z^2})^n$  равен 45. Найдите член разложения, содержащий букву  $z$  в первой степени.

## § 18. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 18.1. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности

Таблица 24

1. Случайные события	
Понятия	Примеры
<p>Под экспериментами со случайными результатами (или, коротко говоря, случайными экспериментами) понимают различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях.</p>	<p>Эксперименты с рулеткой, бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты, серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее и др.</p>
<p><i>Любой результат случайного эксперимента называют случайным событием.</i> Вследствие такого эксперимента это событие может или произойти, или не произойти.</p> <p>Случайные события обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита <math>A, B, C, D, \dots</math></p>	<p>Выпадение «герба», выпадение «числа» при подбрасывании монеты; выигрыш в лотерею, выпадение определенного количества очков при бросании игрального кубика и т. д.</p>
2. Понятия, связанные со случайными событиями в некотором эксперименте	
<p>События <math>B_1, B_2, \dots, B_n</math> называют <i>равновозможными</i>, если в данном эксперименте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое.</p>	<p>В эксперименте с однократным подбрасыванием однородной монеты правильной формы равновозможными являются события:  <math>A</math> — выпал «герб» и  <math>B</math> — выпало «число».</p>
<p>События <math>A</math> и <math>B</math> называют <i>несовместными</i>, если они не могут произойти одновременно в данном эксперименте.</p>	<p>В эксперименте с подбрасыванием монеты события <math>A</math> — выпал «герб» и <math>B</math> — выпало «число» — несовместные.</p>

События $C_1, C_2, \dots, C_n$ называют <b>несовместными</b> , если каждая пара из них несовместна в данном эксперименте.	Для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика события $C_1$ — выпадение 1 очка, $C_2$ — выпадение 3 очков, $C_3$ — выпадение 5 очков, $C_4$ — выпадение четного числа очков — несовместные.
Событие $U$ называют <b>достоверным</b> , если в результате данного эксперимента оно обязательно произойдет.	Выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков).
Событие $\emptyset$ называют <b>невозможным</b> , если оно не может произойти в данном эксперименте.	Выпадение 7 очков при бросании игрального кубика.
3. Пространство элементарных событий	
<p>Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из несовместных событий <math>u_1, u_2, \dots, u_n</math>. Назовем их <b>элементарными событиями</b>, а множество всех этих событий</p> $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ <p>— <b>пространством элементарных событий</b>.</p> <p>Случайным событием <math>A</math> назовем любое подмножество пространства элементарных событий <math>U</math>.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Для эксперимента с подбрасыванием монеты элементарными будут события <math>u_1</math> — выпал «герб», <math>u_2</math> — выпало «число». Тогда пространство элементарных событий будет состоять из двух событий: <math>U = \{u_1, u_2\}</math>. (Эти события несовместные, и в результате эксперимента обязательно происходит одно из этих событий.)</li> <li>2. Для эксперимента с бросанием игрального кубика элементарными могут быть события <math>u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6</math>, где <math>u_k</math> — выпадение <math>k</math> очков, <math>k = 1, 2, 3, 4, 5, 6</math>. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий:</li> </ol> $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}.$
4. Классическое определение вероятности (для равновероятных элементарных событий)	
Пусть задано пространство элементарных событий, все элементарные события которого — равновероятные.	<p><b>Пример.</b> Найдите вероятность выпадения больше четырех очков при бросании игрального кубика.</p> <p>► Рассмотрим как элементарные события шесть равновероятных результатов бросания кубика —</p>

<p>Вероятность события <math>A</math> — это отношение количества элементарных событий (<math>m</math>), благоприятствующих этому событию, к количеству всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте (<math>n</math>):</p> $P(A) = \frac{m}{n}$	<p>выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (следовательно, <math>n = 6</math>). Событие <math>A</math> — выпало больше 4 очков. Благоприятствуют событию <math>A</math> только два элементарных события — выпало 5 или 6 очков (то есть <math>m = 2</math>).</p> <p>Тогда <math>P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}</math>. <math>\triangleleft</math></p>
<p>Вероятность достоверного (<math>U</math>) и невозможного (<math>\emptyset</math>) событий</p> $P(U) = 1$ $P(\emptyset) = 0$	

### Объяснение и обоснование

**1. Случайные эксперименты и случайные события.** Нам часто приходится проводить различные наблюдения, опыты, принимать участие в экспериментах или испытаниях. Часто такие эксперименты завершаются результатом, который заранее предусмотреть невозможно. Например, мы покупаем лотерейный билет и не знаем, выиграет ли он; подбрасываем монету и не знаем, что выпадет — число или герб. Можно ли каким-то образом оценить шансы появления результата, который нас интересует? Ответ на эти вопросы дает раздел математики, который называется *теорией вероятностей*. Мы ознакомимся только с основами этой теории.

Одним из основных понятий, которые рассматриваются в теории вероятностей, является понятие *эксперимента со случайными результатами*. Примером такого эксперимента может служить подбрасывание монеты судьей футбольного матча перед его началом, чтобы определить, какая из команд начнет матч с центра поля.

Под экспериментами со случайными результатами (или, коротко говоря, случайными экспериментами) понимают различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях. Например, это серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее, вынимание пронумерованных шаров из коробки, эксперименты с рулеткой, бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты.

*Любой результат случайного эксперимента называется случайным событием*. Вследствие рассматриваемого эксперимента это событие может или произойти, или не произойти. Заметим, что для каждого случайного эксперимента обычно заранее уславливаются, какие его результаты рассматриваются как элементарные события, а затем случайное событие рассматривается как подмножество получившегося множества (см. с. 261).

Далее, как правило, будем обозначать случайные события прописными буквами латинского алфавита  $A, B, C, D, \dots$ .

Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным случайным экспериментом.

Заметим, что много важных и нужных фактов теории вероятностей сначала были получены с помощью очень простых экспериментов. Большую роль в развитии теории вероятностей как науки сыграли обычные монеты и игральные кубики. Но те монеты и кубики, которые рассматривают в теории вероятностей, являются математическими образами настоящих монет и кубиков (потому о них иногда говорят, что это математическая монета и математический игровой кубик).

Например, *математическая монета*, которую используют в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и стоимости. Она не сделана ни из какого материала и не может служить платежным средством. Монета с точки зрения теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых называется «герб\*», а другая — «число». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх. Никаких других свойств у математической монеты нет. Математическая монета считается *симметричной*. Это означает, что брошенная на стол монета имеет равные шансы выпасть «гербом» или «числом». При этом имеется в виду, что никакой другой результат бросания монеты невозможен — она не может потеряться, закатившись в угол, и, тем более, не может «встать на ребро».

Настоящая металлическая монета (рис. 120) служит лишь иллюстрацией для математической монеты. Настоящая монета может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты бросания. Однако, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросаем обычную монету (без явных дефектов).

Игральный кубик также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральный кубик имеет удивительную историю. Игра с кубиками — одна из древнейших. Она была известна в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме. Игральные кубики находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. *Правильные (симметричные) кубики* обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь



Рис. 120

\* Часто в российских учебниках по теории вероятностей вместо термина «герб» для обозначения оборотной стороны (так называемого реверса) монеты употребляют термин «орел», а вместо термина «число» — термин «решка». Это связано с тем, что на реверсе монет Российской империи был изображен двуглавый орел, а на лицевой стороне монеты (аверсе) ее номинал (официально объявленная стоимость) был написан на фоне рисунка, который напоминал решетку.

одинаковую площадь, быть плоскими и одинаково гладкими. Кубик должен иметь кубическую форму, и его центр тяжести должен совпадать с геометрическим центром. Вершины и ребра кубиков должны иметь правильную форму. Если они округлены, то все округления должны быть одинаковыми. Отверстия, которые маркируют количество очков на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину (рис. 121).

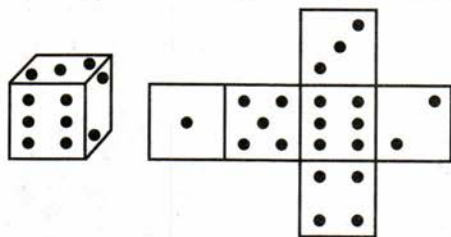


Рис. 121

*Математический игральный кубик*, который обсуждается в теории вероятностей, — это математический образ правильного кубика. Выпадение всех граней равновозможно. Подобно математической монете, математический кубик не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни других материальных качеств.

**2. Некоторые понятия, связанные со случайными событиями.** Пусть проведен какой-то случайный эксперимент. Как отмечалось выше, его результатами являются некоторые случайные события. Вследствие такого эксперимента каждое из событий может или произойти, или не произойти. Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным экспериментом.

События называют *равновозможными*, если в данном эксперименте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое. Например, в эксперименте с однократным подбрасыванием однородной монеты правильной формы равновозможными являются события:  $A$  — выпал «герб» и  $B$  — выпало «число».

События  $A$  и  $B$  называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в данном эксперименте. Так, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты события  $A$  — выпал «герб» и  $B$  — выпало «число» — несовместные.

События  $C_1, C_2, \dots, C_n$  называют несовместными, если каждая пара из них несовместна в данном эксперименте. Для эксперимента с однократным подбрасыванием игрального кубика события:  $C_1$  — выпадение 1 очка,  $C_2$  — выпадение 2 очков,  $C_3$  — выпадение 3 очков,  $C_4$  — выпадение 4 очков,  $C_5$  — выпадение 5 очков,  $C_6$  — выпадение 6 очков — несовместные (и равновозможные).

Событие  $U$  называют *достоверным*, если в результате данного эксперимента оно обязательно произойдет. Например, выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков) является достоверным событием.

Событие  $\emptyset$  называют *невозможным*, если оно не может произойти в данном эксперименте. Например, выпадение 7 очков при бросании игрального кубика — невозможное событие.

**3. Пространство элементарных событий.** Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из несовместных событий  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Назовем их *элементарными событиями*, а множество всех этих событий  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  — *пространством элементарных событий*.

Например, для эксперимента с подбрасыванием монеты элементарными будут события  $u_1$  — выпадение «герба»,  $u_2$  — выпадение «числа». Тогда пространство элементарных событий будет состоять из двух событий:  $U = \{u_1, u_2\}$ . (Эти события несовместные, и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий.)

Для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика элементарными событиями могут быть события:  $u_1$  — выпадение 1 очка,  $u_2$  — выпадение 2 очков,  $u_3$  — выпадение 3 очков,  $u_4$  — выпадение 4 очков,  $u_5$  — выпадение 5 очков,  $u_6$  — выпадение 6 очков. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий:  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ .

*Случайным событием*  $A$  назовем любое подмножество пространства элементарных событий  $U$ .

Например, для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика случайным является событие  $A$  — выпадение четного числа очков, поскольку  $A = \{u_2, u_4, u_6\}$  — подмножество  $U$ .

**4. Классическое определение вероятности.** Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть одно и только одно из  $n$  попарно несовместных и равновозможных элементарных событий  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (то есть пространство  $U$  элементарных событий данного случайного эксперимента состоит из элементарных событий  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ). И пусть в рассматриваемом эксперименте событие  $A$  состоит в том, что происходит одно из  $m$  заранее выделенных элементарных событий  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m}$ , то есть  $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m}\}$  (в этом случае говорят, что элементарные события  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m}$  *благоприятствуют* событию  $A$ ).

Вероятность события  $A$  определим как отношение числа  $m$  элементарных событий, благоприятствующих событию  $A$ , к общему числу  $n$  элементарных событий в данном эксперименте, то есть как отношение  $\frac{m}{n}$ .

Вероятность события  $A$  принято обозначать  $P(A)$  (буква  $P$  — первая буква французского слова *probabilité* или латинского слова *probabilitas*, что в переводе означает «вероятность»). Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Этим равенством выражается *классическое определение вероятности*, которое можно сформулировать следующим образом.

Если рассматривается пространство равновозможных элементарных событий, то вероятность события  $A$  — это отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте.

Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты равновозможными элементарными событиями являются два ( $n = 2$ ) события:  $A$  — выпал «герб» и  $B$  — выпало «число». Событию  $A$  благоприятствует только один случай ( $m = 1$ ), поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что вероятность события  $B$  также равна  $\frac{1}{2}$ :  $P(B) = \frac{1}{2}$ . Следовательно, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты вероятность выпадения «герба» (или «числа») равна  $\frac{1}{2}$ .

Аналогично обосновывается, что в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика вероятность события  $A_i$  — выпало  $i$  очков ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) равна  $\frac{1}{6}$  (обоснуйте это самостоятельно).

Заметим, что если в любом эксперименте рассмотреть невозможное событие  $\emptyset$ , то нет элементарных событий, благоприятствующих данному событию, то есть число элементарных событий, ему благоприятствующих, равно нулю ( $m = 0$ ), и тогда  $P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$ . Следовательно,

**вероятность невозможного события равна 0.**

Например, в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика вероятность невозможного события  $A$  — выпало 7 очков — равна 0.

Если в любом эксперименте рассмотреть достоверное событие  $U$ , то ему благоприятствуют все элементарные события в этом эксперименте ( $m = n$ ), и тогда  $P(U) = \frac{n}{n} = 1$ . Следовательно,

**вероятность достоверного события равна 1.**

Например, в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика событие  $A$  — выпало 1 очко, или 2 очка, или 3 очка, или 4 очка, или 5 очков, или 6 очков, достоверное и его вероятность равна 1.

### Задача 1

Пользуясь приведенным определением, найдем вероятность события  $A$  — выпало число очков, кратное 3, при бросании игрального кубика.

► Как отмечалось выше, в эксперименте с подбрасыванием кубика существует шесть попарно несовместных равновозможных элементарных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (также можно сказать, что пространство элементарных событий состоит из шести указанных попарно несовместных равновозможных событий). Благоприятствуют событию  $A$  только два элементарных события: выпало 3 очка и выпало 6 очков. Следовательно, вероятность события  $A$  равна:  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . ◁

**Задача 2**

Петя и Паша бросают белый и черный игральные кубики (рис. 122) и каждый раз подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что в случае, когда в очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Петя, а когда в сумме выпадет 7 очков — выигрывает Паша. Является ли эта игра справедливой?

▶ При бросании кубиков на каждом из них может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике (1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков), отвечает шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Следовательно, всего получаем 36 попарно несовместных равновозможных элементарных событий. Результаты этого эксперимента приведены в таблице:

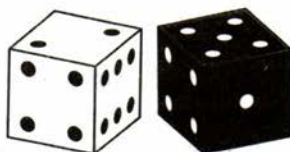


Рис. 122

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

(В каждой паре чисел на первом месте записано число очков, выпавшее на белом кубике, а на втором месте — число очков, выпавшее на черном кубике.)

Пусть событие  $A$  состоит в том, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие  $B$  — при бросании кубиков в сумме выпало 7 очков.

Событию  $A$  благоприятствуют следующие 5 результатов (элементарных событий):

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).$$

Событию  $B$  благоприятствуют следующие 6 результатов (элементарных событий):

$$(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).$$

Тогда

$$P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36}.$$

Следовательно, шансов выиграть у Паши больше, чем у Пети, значит, такая игра не будет справедливой. ◁

Отметим, что результаты эксперимента с подбрасыванием двух игральных кубиков, приведенные в задаче 2, позволяют вычислить вероятности появления той или иной суммы очков, выпадающих при бросании двух игральных кубиков.



Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

**Задача 3** Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

► Пусть событие  $A$  состоит в том, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов. Из 15 велосипедов выбрать 2 можно  $C_{15}^2$  способами (число соединений из 15 по 2). Все эти выборы являются равновероятными и попарно несовместными. Следовательно, общее количество равновероятных результатов (то есть общее количество элементарных событий) равно  $C_{15}^2$ . Событием, благоприятствующим событию  $A$ , является выбор 2 бездефектных велосипедов из 12 бездефектных ( $15 - 3 = 12$ ). Следовательно, число результатов (событий), благоприятствующих событию  $A$ , равно  $C_{12}^2$ . Отсюда получаем

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{2!(12-2)!}{15!} = \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{22}{35} \triangleleft$$

**Задача 4** Группа туристов, в которой 6 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

► Число результатов (элементарных событий) при выборе четырех дежурных из 10 туристов равно  $C_{10}^4$ . Все эти события — равновероятные и попарно несовместные.

Пусть событие  $A$  состоит в том, что среди 4 дежурных есть 2 юноши и 2 девушки. Выбрать двоих юношей из 6 можно  $C_6^2$  способами, а выбрать двух девушек из 4 можно  $C_4^2$  способами. По правилу произведения выбор и двоих юношей, и двух девушек можно выполнить  $C_6^2 \cdot C_4^2$  способами — это и есть количество событий, благоприятствующих событию  $A$ . Тогда

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{7} \triangleleft$$

Обратим внимание, что в зависимости от рассматриваемой задачи для одного и того же эксперимента пространство элементарных событий можно вводить по-разному. Для этого независимые элементарные события подбираем так, чтобы событие, вероятность которого необходимо найти, само было элементарным или выражалось через сумму элементарных событий. Но для того чтобы использовать классическое определение вероятности, необходи-

мо быть уверенным, что все выделенные элементарные события — равно-возможные.

Например, как уже отмечалось в задаче о бросании игрального кубика, пространство элементарных событий может состоять из 6 независимых равно-возможных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Но если в задаче требуется найти вероятность выпадения четного числа очков, то пространством элементарных событий для этого эксперимента может быть множество только двух событий:  $u_1$  — выпало четное число очков и  $u_2$  — выпало нечетное число очков (поскольку эти события попарно несовместны и результатом эксперимента обязательно будет одно из этих событий). Эти события равновозможны (поскольку среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 ровно половина четных и половина нечетных). Следовательно, по классическому определению вероятность каждого из них равна  $\frac{1}{2}$ . Конечно, если бы мы рассмотрели первое из указанных пространств элементарных событий, то также смогли бы решить эту задачу: всего событий — 6, а благоприятствующих — 3 (выпадение четного числа очков: 2, 4, 6). Тогда вероятность выпадения четного числа очков равна  $\frac{3}{6}$ , то есть  $\frac{1}{2}$ .

Попробуем ввести для решения этой задачи следующее пространство элементарных событий:  $u_1$  — выпало четное число очков,  $u_2$  — выпало 1 очко,  $u_3$  — выпало 3 очка,  $u_4$  — выпало 5 очков. Эти события действительно образуют пространство элементарных событий эксперимента с бросанием игрального кубика, поскольку они попарно несовместны и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий. Но, пользуясь таким пространством элементарных событий, мы не сможем применить классическое определение вероятности, потому что, как мы уже видели, указанные элементарные события не являются равновозможными:  $P(u_1) = \frac{1}{2}$ ,

$$P(u_2) = \frac{1}{6}, P(u_3) = \frac{1}{6}, P(u_4) = \frac{1}{6}.$$

### Вопросы для контроля

1. Объясните, что такое случайный эксперимент и случайное событие. Приведите примеры.
2. Объясните, какие события считаются равновозможными. Приведите примеры равновозможных и неравновозможных событий. Какие события считаются несовместными? Приведите примеры.
3. Объясните смысл классического определения вероятности. Приведите примеры. Как обозначается вероятность события  $A$ ?
4. Какое событие считается достоверным, а какое невозможным? Приведите примеры. Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?

## Упражнения

1°. Укажите, какие из событий в приведенных экспериментах (табл. 25) являются достоверными, невозможными и просто случайными.

Таблица 25

№	Эксперимент	Событие
1)	Выполнение выстрела	Попадание в цель
2)	Нагревание воды (при обычных условиях)	Превращение воды в лед
3)	Участие в лотерее	Вы выиграете, если примете участие в лотерее
4)	Участие в беспроигрышной лотерее	Вы не выиграете, если примете участие в беспроигрышной лотерее
5)	Бросание игрального кубика	Выпало 5 очков
6)	Бросание игрального кубика	Выпало 8 очков
7)	Проверка работы звонка	Вы нажали на кнопку звонка, а он не зазвонил
8)	Вынимание шара из коробки с белыми шарами	Вынули черный шар
9)	Вынимание шара из коробки с белыми шарами	Вынули белый шар
10)	Вынимание двух шаров из коробки с 10 белыми и 5 черными шарами	Вынули белый и черный шары
11)	Вынимание карты	Вынули туза

2. Придумайте по три примера достоверных, невозможных и просто случайных событий. Примеры запишите в виде таблицы, как это сделано в упражнении 1.
- 3°. Известно, что на 100 батареек встречаются 3 бракованных. Какова вероятность купить бракованную батарейку?
- 4°. В магазине подсчитали, что обычно из тысячи телевизоров оказывается 2 бракованных. Какова вероятность того, что телевизор, выбранный наугад в этом магазине, будет бракованным?
- 5°. По статистике в городе  $N$  в среднем за год из 1000 автомобилистов 2 попадают в аварию. Какова вероятность того, что автомобилист в этом городе весь год проезжает без аварий?
- 6°. Какова вероятность того, что в Москве солнце зайдет на востоке?
- 7°. Какова вероятность того, что после 31 декабря наступит 1 января?
- 8°. В пакете лежат 20 зеленых и 10 желтых груш. Какова вероятность вынуть из пакета грушу? Какова вероятность вынуть из пакета яблоко?

- 9°. На экзамене — 24 билета. Андрей не разобрался в одном билете и очень боится его вытянуть. Какова вероятность, что Андрею достанется «несчастливый» билет?
- 10°. На вопросы викторины было получено 1250 открыток с правильными ответами, в том числе и ваша. Для определения призера ведущий должен наугад вытянуть одну открытку. Какова вероятность того, что призр достанется вам?
11. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?
12. *Задача Даламбера.* Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет «герб»?
13. За победу в телеигре Яна получит главный приз — путешествие, если с первой попытки угадает, в каком из 12 секторов табло (рис. 123) спрятан приз.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 123

Какова вероятность того, что Яна отправится в путешествие?

14. В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность проигрыша?
15. В кармане жителя некой страны лежат 6 монет (рис. 124). Какова вероятность вынуть наугад монету: 1) с четным числом копеек; 2) с нечетным числом копеек; 3) меньше 20 копеек?



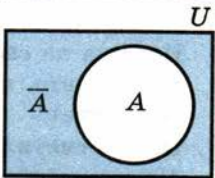
Рис. 124

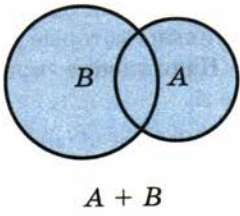
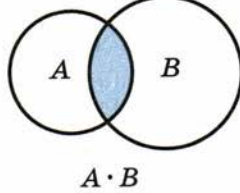
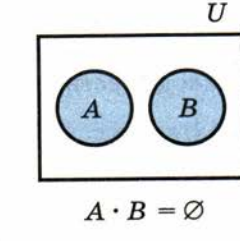
16. На карточке спортлото (6 из 49) Даниил отметил номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наташа на своей карточке отметила номера: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен? Объясните свой ответ.
17. Илья отметил в карточке спортлото (6 из 49) номера: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — и выиграл. Тогда он решил, что эта комбинация чисел счастливая и он будет отмечать ее во всех тиражах. Действительно ли он увеличит свои шансы на выигрыш? Объясните свой ответ.
18. В сумке лежат 12 красных, 10 зеленых и 3 желтых яблока. 1) Яблоко какого цвета вероятнее всего вынуть наугад из сумки? 2) Какова вероятность вынуть наугад: а) яблоко; б) грушу; в) зеленое яблоко; г) не красное яблоко?

19. Вы выиграете, если шар, вынутый наугад из коробки, белый. Какую из коробок выгоднее выбрать для игры, чтобы вероятность выигрыша была большей: 1) в коробке 15 белых шаров из 45; 2) в коробке 40 белых шаров из 120; 3) в коробке 22 белых шара и 44 красных; 4) в коробке поровну белых, красных и черных шаров?
20. Грани обычного игрального кубика окрашены в красный и желтый цвета. Вероятность того, что выпадет красная грань, равна  $1/6$ , вероятность того, что выпадет желтая грань, —  $5/6$ . Сколько красных и желтых граней у кубика?
21. В коробке половина конфет в красных обертках, треть — в синих обертках, остальные — в зеленых обертках. Наугад вынули одну конфету. Какого цвета обертка наименее вероятна у этой конфеты? Найдите эту вероятность.
22. В ящике лежат 8 красных, 2 синих и 20 зеленых карандашей. Вы наугад вынимаете карандаш. Какова вероятность того, что это: 1) красный карандаш? 2) желтый карандаш? 3) не зеленый карандаш? 4) Какое наименьшее количество карандашей необходимо вынуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них был зеленый карандаш?
23. Бросают одновременно два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков будет равна 12?
24. На скамейку случайным образом садятся двое мужчин и женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?
25. Из 5 карточек с буквами  $M, P, O, A, E$  наугад выбираем 4 карточки. Найдите вероятность того, что, положив их в ряд в том порядке, в котором их выбрали, получим слово «море».

### 18.2. Операции над событиями. Свойства вероятностей событий

Таблица 26

Определение	Пример	Теоретико-множественная иллюстрация
1. Противоположное событие		
Событие $\bar{A}$ называется <i>противоположным событием</i> $A$ , если оно состоит в том, что в рассматриваемом случайном эксперименте не происходит событие $A$ .	Событие $A$ — выпал «герб» при подбрасывании монеты, тогда событие $\bar{A}$ — не выпал «герб» при подбрасывании монеты (то есть выпало «число»).	
Вероятность противоположного события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	Если вероятность купить исправный прибор равна 0,95, то вероятность купить неисправный прибор равна: $1 - 0,95 = 0,05$ .	

2. Сумма событий		
<p><i>Суммой (или объединением) событий <math>A</math> и <math>B</math> называется событие <math>A + B</math> (другое обозначение <math>A \cup B</math>), которое состоит в том, что происходит событие <math>A</math> или событие <math>B</math> (или <math>A</math>, или <math>B</math>, или оба события).</i></p>	<p>Из колоды карт наугад вынимают 1 карту. Рассмотрим события: <math>A</math> — вынули бубновую карту, <math>B</math> — вынули червовую карту. Тогда событие <math>A + B</math> — вынули или бубновую, или червовую карту (то есть карту красной масти).</p>	
3. Произведение событий		
<p><i>Произведением (или пересечением) событий <math>A</math> и <math>B</math> называется событие <math>A \cdot B</math> (другое обозначение <math>A \cap B</math>), которое состоит в том, что происходят оба события <math>A</math> и <math>B</math>.</i></p>	<p>При бросании игрального кубика рассматривают события: <math>A</math> — выпало четное число очков, <math>B</math> — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие <math>A \cdot B</math> — выпало число очков, одновременно четное и кратное 3 (то есть выпало 6 очков).</p>	
4. Несовместные события		
<p><i>Два случайных события <math>A</math> и <math>B</math> называются несовместными, если их произведение является невозможным событием, то есть <math>A \cdot B = \emptyset</math> (в других обозначениях <math>A \cap B = \emptyset</math>).</i></p>	<p>При бросании игрального кубика рассматривают события: <math>A</math> — выпало четное число очков, <math>B</math> — выпало 1 очко, <math>C</math> — выпало число очков, кратное 3. События <math>A</math> и <math>B</math>, а также события <math>B</math> и <math>C</math> — <b>несовместные</b> (не могут происходить одновременно). События <math>A</math> и <math>C</math> — <b>совместные</b> (могут происходить одновременно, если выпадет 6 очков, то есть <math>A \cdot C \neq \emptyset</math>).</p>	
5. Вероятность суммы двух несовместных событий		
<p><i>Если события <math>A</math> и <math>B</math> несовместные, то <math>P(A + B) = P(A) + P(B)</math>, то есть вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.</i></p>		

## Объяснение и обоснование

Иногда приходится, зная вероятности одних случайных событий, вычислять вероятности других событий, которые получаются из заданных с помощью определенных операций. Рассмотрим простейшие операции над случайными событиями, которые далее будем называть просто событиями.

**1. Нахождение противоположного события.** Пусть задано случайное событие  $A$ .

**Событие  $\bar{A}$  называется противоположным событию  $A$ , если оно состоит в том, что в рассматриваемом случайном эксперименте не происходит событие  $A$ .**

Например, если событие  $A$  состоит в том, что выпал «герб» при подбрасывании монеты, то событие  $\bar{A}$  (читается: «Не  $A$ ») означает, что «герб» не выпал, а следовательно, выпало «число» при подбрасывании монеты. Если событие  $B$  состоит в том, что выпало 1 очко при бросании игрального кубика, то событие  $\bar{B}$  означает, что 1 очко не выпало, а следовательно, выпало или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков при бросании игрального кубика.

● Учитывая, что в каждом эксперименте происходит одно и только одно из событий  $A$  или  $\bar{A}$ , получаем, что в пространстве равновозможных элементарных событий сумма количества  $m$  элементарных событий, благоприятствующих событию  $A$ , и количества  $k$  элементарных событий, благоприятствующих событию  $\bar{A}$ , равна количеству  $n$  всех элементарных событий:  $m + k = n$ . Тогда  $\frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \frac{m+k}{n} = \frac{n}{n} = 1$ . Следовательно,

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ . Отсюда

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2)$$

Например, рассмотрим событие  $A$  — выпало 1 очко при бросании игрального кубика. Тогда, как отмечалось выше, событие  $\bar{A}$  — 1 очко не выпало (то есть выпало или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков). Как было показано на с. 262, вероятность события  $A$  равна  $\frac{1}{6}$ , то есть  $P(A) = \frac{1}{6}$ , тог-

да вероятность события  $\bar{A}$  равна:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

При определении операций суммы и произведения событий будем рассматривать события, относящиеся к одному случайному эксперименту.

**2. Нахождение суммы событий.** Пусть заданы два случайных события  $A$  и  $B$ .

**Суммой (или объединением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A + B$  (другое обозначение  $A \cup B$ ), которое состоит в том, что происходит событие  $A$  или событие  $B$  (или  $A$ , или  $B$ , или оба события).**

Например, пусть при бросании игрального кубика события  $A$  и  $B$  означают:  $A$  — выпало четное число очков,  $B$  — выпало число очков, кратное 3.

Тогда событие  $A + B$  означает, что выпало или четное число очков, или число очков, кратное 3, то есть выпало 2, 3, 4 или 6 очков.

Аналогично вводится понятие суммы нескольких событий.

*Суммой (или объединением) событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется событие  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  (другое обозначение  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ), которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий.*

**3. Нахождение произведения событий.** Пусть заданы два случайных события  $A$  и  $B$ .

*Произведением (или пересечением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \cdot B$  (другое обозначение  $A \cap B$ ), которое состоит в том, что происходят оба события  $A$  и  $B$ .*

В приведенном выше примере событие  $A \cdot B$  означает, что выпало и четное число очков, и число очков, кратное 3, то есть выпало 6 очков.

Аналогично вводится понятие произведения нескольких событий.

*Произведением (или пересечением) событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется событие  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$  (другое обозначение  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ), которое состоит в том, что происходят все заданные события: и  $A_1$ , и  $A_2$ , ..., и  $A_n$ .*

**Замечание.** Определения операций над событиями аналогичны соответствующим определениям операций над множествами (поэтому и обозначения операций над событиями совпадают с обозначениями операций над множествами). Операции над событиями (как и операции над множествами) удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера–Венна (см. рис. 125–127).

Например, учитывая, что всегда выполняется или событие  $A$ , или событие  $\bar{A}$ , получаем, что  $A + \bar{A} = U$  (достоверное событие). Учитывая, что одновременно события  $A$  и  $\bar{A}$  не могут выполняться, имеем  $A \cdot \bar{A} = \emptyset$  (невозможное событие). Тогда событие  $\bar{A}$  можно проиллюстрировать дополнением множества  $A$  (до множества  $U$ ) (рис. 125).

Аналогично сумму двух событий  $A$  и  $B$  (напомним, что событие  $A + B$  заключается в том, что происходит событие  $A$  или событие  $B$ , или оба одновременно) можно проиллюстрировать в виде объединения множеств  $A$  и  $B$  (рис. 126), а произведение событий  $A$  и  $B$  (событие  $A \cdot B$  заключается в том, что происходят оба события  $A$  и  $B$ ) — в виде пересечения множеств  $A$  и  $B$  (рис. 127).

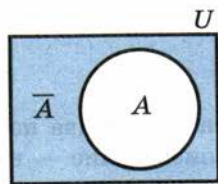


Рис. 125

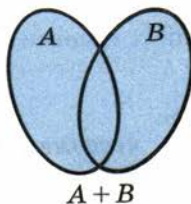


Рис. 126

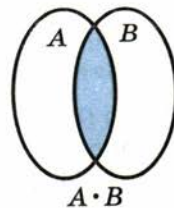


Рис. 127



**4. Свойства вероятностей событий.** Вероятности событий обладают следующими свойствами.

1) Вероятность любого события  $A$  удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2) Вероятность достоверного события  $U$  равна 1:

$$P(U) = 1.$$

3) Вероятность суммы несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, из определения, приведенного в п. 18.1, следует, что вероятность  $P(A)$ , то есть дробь  $\frac{m}{n}$ , неотрицательна и не больше 1. Она равна нулю для невозможного события и единице для достоверного события.

Чтобы обосновать свойство 3), уточним понятие несовместных событий, опираясь на введенные операции над событиями. Из определения несовместных событий получаем:

*два случайных события  $A$  и  $B$  будут несовместными тогда и только тогда, когда их произведение является невозможным событием, то есть  $A \cdot B = \emptyset$  (другое обозначение  $A \cap B = \emptyset$ ).*

Например, при бросании игрального кубика могут произойти события:  $A$  — выпадет четное число очков,  $B$  — выпадет 5 очков. Эти события несовместны, поскольку 5 — нечетное число; поэтому событие  $A \cdot B$ , состоящее в том, что выпадет четное число очков и это будет 5 очков, — невозможное событие.

Рассмотрим несовместные события  $A$  и  $B$  в пространстве из  $n$  равновероятных элементарных событий. Пусть  $m$  — количество элементарных событий, благоприятствующих событию  $A$ , и  $k$  — количество элементарных событий, благоприятствующих событию  $B$ . Поскольку события  $A$  и  $B$  несовместны, то элементарные события, благоприятствующие событию  $A$ , отличны от элементарных событий, благоприятствующих событию  $B$  и, следовательно, событию  $A + B$  благоприятствуют  $m + k$  элементарных событий. Но тогда

$$P(A + B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B). \text{ Таким образом,}$$

*для несовместных событий  $A$  и  $B$  выполняется равенство*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3)$$

То есть *вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*  $\circ$

Свойство (3) можно обобщить.

Назовем события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  *несовместными*, если любые два из этих событий  $A_i$  и  $A_j$  (при  $i \neq j$ ) несовместны, то есть их произведение — невозможное событие:

$$A_i \cdot A_j = \emptyset.$$

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  несовместны, то из равенства (3) следует, что

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \quad (4)$$

то есть *вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*. (Для обоснования этого свойства достаточно применить метод математической индукции.)

Отметим, что для несовместных событий  $A$  и  $B$  вероятность  $P(A \cdot B) = 0$  (так как  $A \cdot B = \emptyset$ ).

Опираясь на рассмотренные основные свойства, можно доказать другие свойства вероятностей событий.

Покажем, что справедливо равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (5)$$

● Обозначим через  $A \setminus B$  событие, заключающееся в том, что событие  $A$  происходит, а событие  $B$  не происходит.

Так как события  $A$  и  $B \setminus A \cdot B$  несовместны и  $A + B = A + (B \setminus A \cdot B)$ , то

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A \cdot B). \quad (6)$$

Аналогично, так как события  $B \setminus A \cdot B$  и  $A \cdot B$  несовместны и очевидно, что  $B = (B \setminus A \cdot B) + A \cdot B$ , то

$$P(B) = P(B \setminus A \cdot B) + P(A \cdot B). \quad (7)$$

Выражая из равенства (7) значение  $P(B \setminus A \cdot B)$  и подставляя его в равенство (6), получаем равенство (5). ○

**Задача** Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или дама?

**Решение.** Пусть событие  $A$  заключается в том, что вынута козырная карта, событие  $B$  — «вынута дама». Тогда событие  $A + B$  — «вынута козырная карта или дама», а событие  $A \cdot B$  — «вынута козырная дама».

$$\text{Ясно, что } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(A \cdot B) = \frac{1}{36},$$

поэтому по формуле (5)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

### Вопросы для контроля

1. Объясните, какое событие называется противоположным событию  $A$ . Приведите примеры.
2. Как найти вероятность противоположного события, зная вероятность события  $A$ ? Чему равна вероятность события  $\bar{A}$ , если  $P(A) = 0,6$ ?
3. Какое событие называется суммой (или объединением) событий  $A$  и  $B$ ? Приведите примеры.

4. Какое событие называется произведением (или пересечением) событий  $A$  и  $B$ ? Приведите примеры.
5. Какие два события называются несовместными? Приведите примеры.
6. а) Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?  
б\*) Обоснуйте соответствующую формулу.
7. Какие три (или больше) события считаются несовместными? Как вычисляется вероятность суммы нескольких несовместных событий?

#### Упражнения

1. Проводится эксперимент с подбрасыванием двух монет. Рассматриваются такие события:  
 $A$  — выпал «герб» на первой монете,  $B$  — выпало «число» на первой монете,  $C$  — выпал «герб» на второй монете,  $D$  — выпало «число» на второй монете.  
 Что означают события:  
 1)  $A + C$ ; 2)  $A \cdot C$ ; 3)  $B + C$ ; 4)  $B \cdot D$ ; 5)  $\bar{A}$ ; 6)  $\bar{B} \cdot D$ ?
2. Проводится эксперимент с бросанием кубика. Рассматриваются такие события:  
 $A$  — выпало четное число очков,  $B$  — выпало нечетное число очков,  $C$  — выпало 3 очка,  $D$  — выпало число очков меньше 4.  
 Что означают события:  
 1)  $\bar{A}$ ; 2)  $A + C$ ; 3)  $A \cdot D$ ; 4)  $B \cdot C$ ; 5)  $B \cdot D$ ; 6)  $B \cdot \bar{D}$ ?  
 Найдите вероятность каждого из этих событий.
- 3\*. Пользуясь определениями операций над событиями, обоснуйте справедливость равенства:  
 1)  $A + U = U$ ;                      2)  $A + A = A$ ;                      3)  $A + \bar{A} = U$ ;  
 4)  $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ ;                      5)  $A + \emptyset = A$ ;                      6)  $A \cdot \emptyset = \emptyset$ .
4. Мяч трижды бросают в баскетбольную корзину. События  $A_1, A_2, A_3$  означают:  $A_1$  — при первом броске мяч попал в корзину,  $A_2$  — при втором броске мяч попал в корзину,  $A_3$  — при третьем броске мяч попал в корзину. Запишите через события  $A_1, A_2, A_3$  следующие события:  
 1)  $B$  — мяч попал в корзину все три раза;  
 2)  $C$  — мяч ни одного раза не попал в корзину;  
 3)  $D$  — мяч хотя бы один раз попал в корзину;  
 4)  $K$  — мяч попал в корзину только при первом броске;  
 5)  $M$  — мяч попал в корзину только при втором и третьем бросках.
5. Для эксперимента с бросанием кубика укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными:  $A$  — выпало четное число очков,  $B$  — выпало нечетное число очков,  $C$  — выпало 3 очка,  $D$  — выпало меньше 3 очков,  $K$  — выпало число очков, кратное 3,  $M$  — выпало 6 очков,  $T$  — выпало больше 4 очков,  $F$  — выпало число очков меньше 7.
6. Для эксперимента по вытягиванию карт из колоды укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными:  $A$  — вытянули карту червой масти,  $B$  — вытянули карту бубновой масти,  $C$  — вытя-

нули короля,  $D$  — вытянули даму,  $K$  — вытянули карту старше валета,  $M$  — вытянули карту с числовыми обозначениями.

7. Имеется 16 игральных карт: 4 валета, 4 дамы, 4 короля, 4 туза. Из этих 16 карт наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или туз?
8. Имеется колода из 52 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или король?

### 18.3. Относительная частота случайного события. Статистическое определение вероятности

Таблица 27

1. Частота и относительная частота случайного события				
Если случайный эксперимент проведен $n$ раз и в $n(A)$ случаях произошло событие $A$ , то число $n(A)$ называется <i>частотой события <math>A</math></i> .		Событие $A$ — выпадение «герба» при подбрасывании монеты.		
	Экспериментаторы	Бюффон*	Пирсон	Пирсон
Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов, то есть отношение $\frac{n(A)}{n}$ .	Количество экспериментов, $n$	4 040	12 000	24 000
	Частота, $n(A)$	2 048	6 019	12 012
	Относительная частота	0,5069	0,5016	0,5005
2. Статистическое определение вероятности				
Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие $A$ , значение относительной частоты события $A$ близко к некоторому определенному числу (которое зависит только от вида события $A$ и не зависит от серии экспериментов), то это число называется вероятностью случайного события $A$ и обозначается $P(A)$ . $0 < P(A) < 1$		Событие $A$ — выпал «герб» при подбрасывании монеты.  $P(A) = 0,5$		

\* Жорж Луи де Бюффон (1707–1782) — французский математик и естествоиспытатель; Карл Пирсон (1857–1936) — английский математик и биолог. Их труды способствовали развитию теории вероятностей и математической статистики.

## Объяснение и обоснование

**Частота и относительная частота случайного события.** Статистическое определение вероятности. Пусть в результате случайного эксперимента может произойти событие  $A$ , имеющее вероятность  $p = P(A)$ , где  $0 < p < 1$ . Повторим эксперимент  $n$  раз, и пусть при этом событие  $A$  произойдет  $m$  раз. Число  $m$  называют частотой события  $A$  (ее часто обозначают  $n(A)$ ), а число  $\frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n}$  называют *относительной частотой события  $A$* . То есть *относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов*.

Рассмотрим результаты экспериментов с бросанием монеты, которые были проведены математиками Ж. Бюффеном и К. Пирсоном (пункт 1 таблицы 27). Как видно из таблицы, относительная частота выпадения герба, полученная в экспериментах Бюффона и Пирсона, мало отличается от вероятности выпадения герба в указанном эксперименте, равной 0,5.

Тот факт, что вероятность появления герба равна 0,5, конечно, не означает, что в любой серии экспериментов герб появится в точности в половине случаев. Но если число экспериментов достаточно велико, мы можем дать прогноз, что герб выпадет приблизительно в половине случаев. Таким образом, зная вероятность события, мы можем прогнозировать частоту его появления в будущем при большом количестве соответствующих экспериментов.

Полученный результат отражает замечательный факт: *при большом количестве экспериментов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события*. Эту закономерность называют *статистической устойчивостью относительных частот*.

Не всегда удается определить вероятность  $p$  события априори (от лат. *a priori* — независимо от опыта), как это имеет место с бросанием монеты или игральной кости. Но если возможно эксперимент повторить  $n$  раз, то

при большом  $n$  относительная частота события  $\frac{m}{n}$  может рассматриваться как приближенное значение вероятности  $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$  этого события. Получим

так называемое статистическое определение вероятности. Более точно его можно сформулировать следующим образом.

*Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие  $A$ , значение относительной частоты события  $A$  близко к некоторому определенному числу (которое зависит только от вида события  $A$  и не зависит от серии экспериментов), то это число называется вероятностью случайного события  $A$ .*

Статистические оценки вероятностей событий с использованием относительной частоты события широко используются в физике, биологии, социологии, в экономике и политике, в спорте и повседневной жизни каждо-

го человека. Приведем пример использования такой оценки. С 2004 года в России действует закон об обязательном страховании автогражданской ответственности, согласно которому каждый владелец автомобиля должен заключить договор с какой-либо уполномоченной страховой компанией. Согласно этому договору владелец машины платит компании определенную сумму, а компания взамен этого обязывается компенсировать (до определенного предела) убыток, который может быть нанесен этим автовладельцем другому автовладельцу, городской собственности или пешеходам. Чтобы по справедливости решить, кто и сколько должен платить, нужно учесть два обстоятельства: 1) с какой вероятностью автомобиль (на протяжении срока страхования) может попасть в аварию; 2) какой в среднем ущерб окружающим наносит одна авария с участием автомобиля этого типа. Зная это, можно вычислить страховые взносы. В частности, вероятность случайного события «на протяжении года автомобиль может попасть в аварию» была вычислена по статистическим данным, которые имели в своем распоряжении страховые компании, государственная инспекция безопасности дорожного движения и другие организации. Эта вероятность оказалась примерно равной 0,015.

Напомним, что приведенное в п. 18.1 определение вероятности событий называют классическим определением вероятности.

Существует еще и аксиоматическое определение вероятности, в котором определение вероятности задается перечислением ее свойств. При аксиоматическом определении вероятность задается как функция  $P(A)$ , определенная на множестве  $M$  всех событий, являющихся результатами данного эксперимента, которая (для экспериментов с конечным числом исходов) удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  для любого события  $A$  из  $M$ ;
- 2)  $P(A) = 1$ , если  $A$  — достоверное событие;
- 3)  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ , если события  $A$  и  $B$  несовместны.

Теорию, изучающую вероятность событий лишь для экспериментов с конечным числом исходов, называют элементарной теорией вероятностей.

Конечно, существуют и эксперименты с бесконечным числом возможных событий. Теорию, изучающую вероятность таких событий, называют общей теорией вероятностей.

В общей теории вероятностей свойство 3 понимается в расширенном смысле:

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Свойства 1–3 называют аксиомами Колмогорова теории вероятностей. Именно А. Н. Колмогоров впервые в 1933 г. дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

### Вопросы для контроля

1. Объясните, что такое частота и относительная частота случайного события.
2. Объясните смысл статистического определения вероятности.

## Упражнения

1. Проведите эксперимент с бросанием монеты 50 раз. Вычислите относительную частоту выпадения герба. Сравните свой результат с результатами других учащихся вашего класса.
2. Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, учащиеся провели следующие эксперименты. Каждый учащийся выбрал свою тропинку и, идя по ней, записывал породу каждого десятого дерева. Результаты были занесены в таблицу:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	68	34	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

1) сосной; 2) хвойным; 3) лиственным.

(Ответ запишите приближенно в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.)

3. Чтобы определить, какой цвет волос у жителей города встречается чаще, а какой реже, учащиеся за полчаса провели такой эксперимент. Каждый выбрал свой маршрут и записывал по пути следования цвет волос каждого пятого встречного. Результаты были занесены в таблицу:

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины	Всего
Число людей	198	372	83	212	865

Оцените вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет:

а) шатеном; б) рыжим; в) не рыжим.

- 4\*. Выберите наугад одну страницу из книги любого писателя и подсчитайте, сколько раз на этой странице встречаются буквы «о» и «б», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления букв «о» и «б» в этом тексте.

Объясните, почему на клавиатурах печатных машинок и компьютеров буква «о» расположена ближе к центру, а буква «б» — ближе к краю клавиатуры (рис. 128). Как вы объясните расположение других букв?



Рис. 128

5. Изготовили «неправильный» игральный кубик со смещенным центром тяжести. После проведения 1000 экспериментов с бросанием кубика получили следующие результаты.

Число очков	1	2	3	4	5	6
Число выпадений соответствующего количества очков	71	145	169	91	21	503

Используя эти данные, оцените вероятности указанных ниже событий (записав соответствующие вероятности в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой) и дайте ответы на вопросы:

- Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет четное число очков, а вы — если нечетное»?
  - Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет число очков от 4 до 6, а вы — если от 1 до 3»?
  - Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет не 6 очков, а вы — если 6 очков»?
6. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятность, с которой в лесопарке встречаются деревья разных пород, и записали результаты в таблицу:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина
Вероятность	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Найдите вероятность того, что выбранное наугад в этом лесопарке дерево будет: 1) сосной или дубом; 2) не дубом; 3) хвойным; 4) лиственным; 5) не осинной; 6) хвойным или лиственным (объясните, что означает последний результат).

7. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятности того, какой цвет волос встречается у жителей города чаще, а какой реже, и составили таблицу:

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины
Вероятность	0,23	0,43	0,1	0,24

Найдите вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет: 1) шатеном или рыжим; 2) не рыжим; 3) брюнетом или блондином; 4) не блондином.



## 18.4. Определение геометрической вероятности

Таблица 28

1. Основные понятия	
	<p><math>U</math> — некоторая фигура на плоскости, <math>S(U)</math> — площадь фигуры <math>U</math>.</p> <p>Эксперимент — это случайный выбор какой-то точки <math>u</math> из фигуры <math>U</math> (можно также представить, что эту точку <math>u</math> случайно бросили на фигуру <math>U</math>).</p> <p>Элементарные события <math>u</math> — точки фигуры <math>U</math>.</p> <p><math>A</math> — часть фигуры <math>U</math> (<math>A \subseteq U</math>), <math>S(A)</math> — площадь фигуры <math>A</math>.</p> <p>Событие <math>A</math> — попадание точек <math>u</math> в фигуру <math>A</math>. Тогда элементарными событиями, благоприятствующими событию <math>A</math>, будут все точки фигуры <math>A</math>.</p>
2. Определение геометрической вероятности	
$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	<p>Геометрической вероятностью события <math>A</math> называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию <math>A</math>, к площади всей заданной фигуры. (Предполагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры <math>U</math> пропорциональна площади этой части и не зависит от ее конфигурации и расположения в фигуре <math>U</math>.)</p>
3. Общее определение	
	<p>Если <math>U</math> — пространственная фигура (тело), то запиши <math>S(U)</math> и <math>S(A)</math> следует понимать как объемы тела <math>U</math> и тела <math>A</math> — части тела <math>U</math>.</p> <p>Если <math>U</math> — отрезок, то записи <math>S(U)</math> и <math>S(A)</math> следует понимать как длины отрезка <math>U</math> и его части — отрезка <math>A</math>.</p> <p>(Объем тела <math>U</math> в пространстве, площадь плоской фигуры <math>U</math> на плоскости, длину отрезка <math>U</math> на прямой назовем мерой фигуры <math>U</math>.)</p>
$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U}$	<p>Геометрической вероятностью события <math>A</math> называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию <math>A</math>, к мере всей заданной фигуры.</p>

## Объяснение и обоснование

Приведенное классическое определение вероятности нельзя применить к случайным экспериментам с бесконечным количеством результатов (то есть в случае, когда множество  $U$  бесконечно).

Рассмотрим случай задания вероятностей  $P(A)$  с помощью так называемых *геометрических вероятностей*. Пусть  $U$  — некоторая фигура на плоскости,  $S(U)$  — ее площадь,  $A$  — часть фигуры  $U$  с площадью  $S(A)$ ,  $B$  — часть фигуры  $U$  с площадью  $S(B)$  (рис. 129). Элементарным событием  $u$  будем считать некоторую точку фигуры  $U$ , случайным образом выбранную на фигуре  $U$  или брошенную на фигуру  $U$ . Событием  $A$  будем считать попадание точек  $u$  в фигуру  $A$ . Также будем считать такой случайный выбор точек *равномерным* (или, как говорят, распределение вероятностей равномерно). Иными словами, вероятности попадания точки  $u$  в фигуры  $A$  и  $B$ , имеющие одинаковые площади, одинаковы и не зависят от положения этих фигур (если  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq U$  и  $S(A) = S(B)$ , то  $P(A) = P(B)$ ). То есть мы полагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры  $U$  пропорциональна только площади этой части и не зависит от ее расположения в фигуре  $U$ . Тогда вероятность попадания точки  $u$  в фигуру  $A$  определяется как отношение площадей

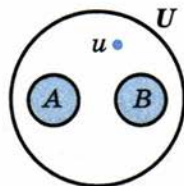


Рис. 129

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \quad (8)$$

Поскольку благоприятствующим элементарным событием для рассмотренного события является попадание выбранной точки в фигуру  $A$ , то фигуру  $A$  можно назвать благоприятствующей этому событию, и тогда определение геометрической вероятности можно сформулировать следующим образом:

**геометрической вероятностью события  $A$  называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию  $A$ , к площади всей заданной фигуры.**

### Задача 1

Пусть круглая мишень радиуса 20 см разделена концентрическими окружностями с радиусами  $R_k = 2(10 - k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, 9$  на 10 колец. Внутренний круг радиуса  $R_9 = 2$  также назовем кольцом и будем считать, что  $R_{10} = 0$ , а  $R_0 = 20$  (рис. 130). Стрелок попал в мишень. Будем считать, что стрелок выбил  $k$  очков, если он попал в  $k$ -е кольцо, то есть в кольцо между окружностями радиусов  $R_{k-1}$  и  $R_k$  (или попал в окружность радиуса  $R_{k-1}$ ).

Обозначим событие  $A_k$  — стрелок выбил  $k$  очков и определим вероятность каждого из таких событий при  $k = 1, 2, \dots, 9, 10$ .

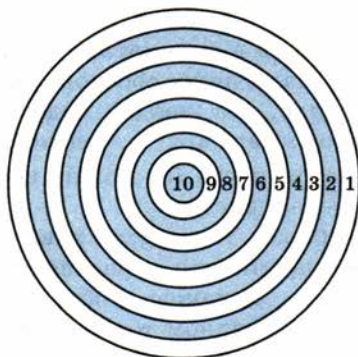


Рис. 130

► Если считать, что у стрелка точки попадания пуль равномерно распределены на круге мишени, то можно использовать определение

геометрической вероятности. Получаем  $P(A_k) = \frac{S_{k\text{-го кольца}}}{S_{\text{мишени}}}$ . Учитывая, что

$$S_{k\text{-го кольца}} = \pi R_{k-1}^2 - \pi R_k^2 = 4\pi(11-k)^2 - 4\pi(10-k)^2 = 4\pi(21-2k)$$

и  $S_{\text{мишени}} = \pi R_0^2 = 400\pi$ , имеем

$$P(A_k) = \frac{21-2k}{100}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, 9, 10. \triangleleft$$

**Замечание 1.** Назовем события  $A$  и  $B$  несовместными (событие  $A$  — точка попала в фигуру  $A$ , событие  $B$  — точка попала в фигуру  $B$ ), если фигуры  $A$  и  $B$  не имеют общих точек (то есть множества точек фигур  $A$  и  $B$  не имеют общих элементов). Сумму событий  $A + B$  и произведение  $A \cdot B$  определим как объединение  $A \cup B$  и пересечение  $A \cap B$  множеств точек фигур  $A$  и  $B$ .

Событие  $\bar{A}$ , противоположное событию  $A$ , определим как дополнение  $\bar{A}$  множества точек фигуры  $A$  до множества  $U$  (то есть как множество всех точек фигуры  $U$ , не входящих в фигуру  $A$ ).

Тогда приведенное определение геометрической вероятности удовлетворяет аксиомам 1–3, приведенным на с. 277.

- Действительно,  $P(U) = \frac{S(U)}{S(U)} = 1$ , значит, аксиома 2 выполняется.

По свойству площади  $S(A) > 0$ ,  $S(U) > 0$ , таким образом,  $P(A) \geq 0$ . Учитывая, что  $A \subseteq U$  (рис. 129), получаем, что  $S(A) \leq S(U)$ , следовательно,  $0 \leq P(A) \leq 1$  (то есть аксиома 1 выполняется).

Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то фигуры  $A$  и  $B$  не имеют общих точек. Тогда  $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$ . Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{S(A \cup B)}{S(U)} = \frac{S(A) + S(B)}{S(U)} = \frac{S(A)}{S(U)} + \frac{S(B)}{S(U)} = P(A) + P(B),$$

то есть выполняется и аксиома 3). ○

Поскольку разные определения вероятности удовлетворяют одним и тем же основным свойствам (аксиомам), то следствия, которые могут быть получены с использованием этих аксиом, не зависят от способа определения вероятности. Поэтому далее обоснования общих свойств вероятностей мы будем проводить для одного определения — или, как говорят в математике, для одной вероятностной модели, — и иметь в виду, что аналогичное обоснование можно провести и для других моделей. Хотя, конечно, для каждой модели можно указать и свои специфические свойства, которых нет у других моделей.

**Замечание 2.** Определение геометрической вероятности (8) можно использовать не только в том случае, когда  $U$  — плоская фигура.

Если, например,  $U$  — пространственная фигура (тело), то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки  $u$  в части данного тела, имеющие одинаковые объемы, одинаковы и не зависят от положения этих частей в заданном теле) в формуле (8) под записями  $S(U)$  и  $S(A)$  следует понимать объемы тела  $U$  и его части — тела  $A$ .

Аналогично, если  $U$  — отрезок, то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки  $u$  в части данного отрезка, которые имеют одинаковые длины, одинаковы и не зависят от положения этих частей на заданном отрезке), в формуле (8) под записями  $S(U)$  и  $S(A)$  следует понимать длины отрезка  $U$  и его части — отрезка  $A$ .

Отметим, что объем тела  $U$  в пространстве, площадь плоской фигуры  $U$  на плоскости, длину отрезка  $U$  на прямой можно назвать *мерой* фигуры  $U$ . Тогда в общем виде формулу (8) можно записать так:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U},$$

то есть в общем случае

*геометрической вероятностью события  $A$*  называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию  $A$ , к мере всей заданной фигуры.

**Задача 2** Оля пообещала подружке Кате позвонить в промежутке от 9 ч до 10 ч. Найдите вероятность того, что их разговор начнется в промежутке от 9 ч 20 мин до 9 ч 25 мин.

► В этой задаче эксперимент — это фиксирование времени телефонного звонка. Изобразим все результаты эксперимента в виде отрезка  $AB$  (рис. 131). Элементарные события — это точки отрезка  $AB$  (Оля может позвонить Кате в любое время с 9.00 до 10.00). Если событие  $A$  — вызов произошел в промежутке 9.20–9.25, то элементарные события, благоприятствующие событию  $A$ , можно изобразить точками отрезка  $CD$ . Если считать, что время вызова в оговоренном промежутке распределяется равномерно, то

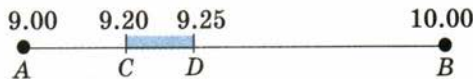


Рис. 131

$$P(A) = \frac{\text{мера } CD}{\text{мера } AB} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 0,08.$$

(При вычислении учтено, что в минутах мера  $CD$  равна 5, а мера  $AB$  равна 60 (1 ч = 60 мин).) ◁

**Задача 3\*** К сигнализатору поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью  $T$  мин. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин. Найдите вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время  $T$ , если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

► Выберем промежуток времени длительностью  $T$ , например  $[0; T]$ . Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соот-

ветственно через  $x$  и  $y$ . Из условия задачи следует, что должны выполняться двойные неравенства:  $0 \leq x \leq T$ ,  $0 \leq y \leq T$ .

Введем прямоугольную систему координат  $xOy$ . В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату  $OTCT$ . Следовательно, этот квадрат можно рассматривать как фигуру  $G$ , координаты точек которой задают все возможные значения моментов поступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин, то есть если  $|y - x| < 1$ , что равносильно системе неравенств

$$y < x + 1 \text{ при } y > x, \quad (9)$$

$$y > x - 1 \text{ при } y < x. \quad (10)$$

Неравенства (9) выполняются для координат точек фигуры  $G$ , лежащих выше прямой  $y = x$  и ниже прямой  $y = x + 1$ ; неравенства (10) имеют место для координат точек, расположенных ниже прямой  $y = x$  и выше прямой  $y = x - 1$ .

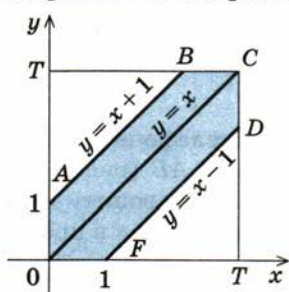


Рис. 132

Как видно из рисунка 132, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (9) и (10), принадлежат заштрихованному шестиугольнику  $OABCDF$ . Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру  $g$ , координаты точек которой являются благоприятными моментами времени  $x$  и  $y$  для срабатывания сигнализатора.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \text{площадь } g &= 2S_{OABC} = 2 \cdot (S_{\Delta OTC} - S_{\Delta ATB}) = \\ &= 2S_{\Delta OTC} - 2S_{\Delta ATB} = T^2 - (T-1)^2 = 2T-1, \end{aligned}$$

получаем, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G} = \frac{2T-1}{T^2}. \triangleleft$$

### Вопросы для контроля

1. Объясните, в чем состоит эксперимент при геометрическом определении вероятности.
2. Дайте определение геометрической вероятности. В каких случаях его можно использовать? Приведите примеры.

### Упражнения

- 1°. Егор и Даниил договорились: если стрелка вертушки (рис. 133) остановится на белом поле, то изгородь будет красить Егор, а если на синем поле — Даниил. У кого из мальчиков больше шансов красить изгородь?
- 2°. Два приятеля с помощью вертушки (рис. 134) решают, как им провести

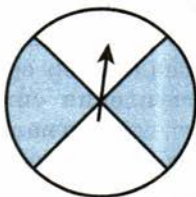


Рис. 133



Рис. 134

выходной: если стрелка остановится на белом, они пойдут в кино, если на синем — на стадион. Какое из событий вероятнее: приятели пойдут на стадион или в кино?

- 3°. Вы выиграете, если стрелка вертушки остановится на белом. Какая из вертушек, изображенных на рисунках 135–137, дает вам больше шансов на выигрыш?

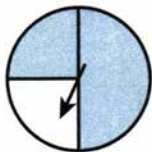


Рис. 135

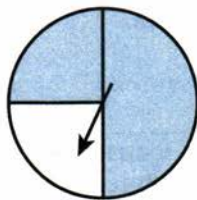


Рис. 136

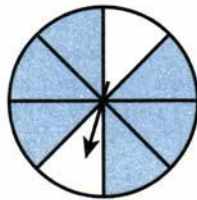


Рис. 137

4. В окружность радиуса  $R$  вписан квадрат. В круг, ограниченный заданной окружностью, наугад поставили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри квадрата, считая, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения в круге.
5. В сферу радиуса  $R$  вписан куб. В шар, ограниченный заданной сферой, наугад бросили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри куба, считая, что вероятность попадания точки в часть шара пропорциональна объему этой части и не зависит от ее расположения в шаре.
6. На отрезке  $L$  длиной 20 см расположили меньший отрезок  $l$  длиной 10 см. Найдите вероятность того, что точка, наугад поставленная на большом отрезке, попадет на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
- 7°. *Задача о встрече.* Два друга договорились встретиться в определенном месте между 12 ч и 13 ч. Тот, кто придет первым, будет ждать второго  $\frac{1}{4}$  ч, после чего покинет место встречи. Найдите вероятность того, что встреча произойдет, если каждый из друзей выбирает наугад момент своего прибытия (в промежутке от 12 ч до 13 ч).  
Указание. Для упрощения графической иллюстрации будем считать, что встреча может произойти между 0 ч и 1 ч. Удобно обозначить время прибытия первого друга на место встречи через  $x$ , а второго — через  $y$  и ввести прямоугольную систему координат  $xOy$ .

## 18.5. Условные вероятности

Таблица 29

1. Понятие условной вероятности	
Содержательное определение	Формула
Число, выражающее вероятность события $A$ при условии, что произошло событие $B$ , называется <i>условной вероятностью события <math>A</math> при условии события <math>B</math></i> и обозначается $P_B(A)$ или $P(A B)$ .	$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
2. Вероятность произведения двух событий (теорема умножения вероятностей)	
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$	<i>Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого события, которая вычисляется при условии, что первое событие уже произошло.</i>
3. Вероятность произведения нескольких событий	
$P(A_1 A_2 \dots A_n) =$ $= P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$	<i>Вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий равна произведению вероятности одного из них и условных вероятностей остальных, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события уже произошли.</i>

## Объяснение и обоснование

**Понятие условной вероятности.** Вероятность произведения двух событий. Оценивая вероятность случайного события, иногда приходится учитывать какие-то дополнительные условия, влияющие на оценку вероятности этого события.

Пусть  $A$  и  $B$  — два события, рассматриваемые в данном эксперименте. Появление одного события (скажем,  $B$ ) может влиять на возможность появления другого ( $A$ ).

Например, пусть проводится эксперимент по извлечению шаров из коробки, в которой находятся 8 шаров, из которых 2 белых и 6 черных. Наугад последовательно вынимают два шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Какова вероятность того, что второй шар окажется белым при условии, что первый шар был черным?

Обозначим события:  $A$  — второй вынутый шар белый,  $B$  — первый вынутый шар черный. Извлечение (наугад) из коробки любого из шаров — равновозможные события. Так как событие  $B$  произошло, то в коробке находятся уже не 8, а 7 шаров, из которых 2 белых. Тогда вероятность события  $A$ , при условии, что произошло событие  $B$ , равна  $\frac{2}{7}$ .

Число, выражающее вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , называется *условной вероятностью события  $A$  при условии события  $B$*  и обозначается  $P_B(A)$  или  $P(A|B)$ .

Условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$  вычисляется по формуле

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\text{где } P(B) > 0). \quad (11)$$

- Докажем эту формулу для классического определения вероятности. Пусть в результате случайного эксперимента мы можем получить  $n$  равновозможных элементарных событий (пространство  $U$ ). Из этих событий  $m$  событий благоприятствуют событию  $A$ ,  $k$  — событию  $B$ ,  $l$  — событию  $AB$  (рис. 138). Тогда  $P(A) = \frac{m}{n}$ ,  $P(B) = \frac{k}{n}$ ,

$P(AB) = \frac{l}{n}$ . Найдем вероятность события  $A$

при условии события  $B$ . Для вычисления условной вероятности вместо всего пространства элементарных событий  $U$  возьмем только ту его часть, элементарные события которой благоприятствуют событию  $B$ . В этом случае общее количество результатов эксперимента равно  $k$ . Из них событию  $A$  благоприятствуют только  $l$  элементарных событий, составляющих событие  $AB$ . Тогда

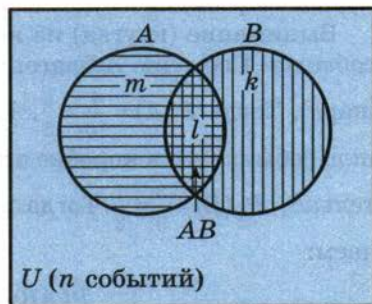


Рис. 138

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad \circ$$

Отметим, что равенство (11) часто принимается за определение условной вероятности события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ .

Из равенства (11) получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (12)$$

Поскольку событие  $BA$  совпадает с событием  $AB$ , то в правой части формулы (12) можно поменять местами  $A$  и  $B$ . Тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (13)$$



Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности второго события, вычисленной при условии, что первое событие уже произошло.

Равенство (13) (или (12)) обычно называют *теоремой умножения вероятностей*. Если мы можем вычислить вероятность события  $A$  и условную вероятность  $P_A(B)$ , то по формуле (13) легко найти вероятность  $P(AB)$  произведения событий  $A$  и  $B$ .

**Задача 1**

В коробке находятся 10 шаров, из них 4 белых. Наугад берут друг за другом два шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Вычислите вероятность того, что оба вынутых шара будут белыми.

► Обозначим события:  $A$  — первый вынутый шар белый,  $B$  — второй вынутый шар белый. Тогда событие  $AB$  — оба вынутых шара белые.

Внимание (наугад) из коробки любого из 10 шаров — равновозможные события. Событию  $A$  благоприятствуют 4 события (в коробке всего 4 белых шара). Тогда  $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ . После того как вынули один белый шар (произошло событие  $A$ ), в коробке осталось 9 шаров, из них только 3 белых, следовательно,  $P_A(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ . Тогда по формуле умножения вероятностей (13) получаем:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}. \triangleleft$$

**Задача 2**

Среди однотипных деталей, выпускаемых в цехе, 1% бракованных. Среди качественных деталей 40% деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь высшего сорта?

► Обозначим события:  $A$  — деталь небракованная,  $B$  — деталь высшего сорта. Тогда событие  $AB$  — выбрали качественную деталь высшего сорта.

Выбор одной детали из множества однотипных деталей — равновозможные события. Учитывая, что среди выпущенных деталей 99% качественных, получаем  $P(A) = 0,99$ , а учитывая, что среди качественных деталей 40% деталей высшего сорта, получаем, что  $P_A(B) = 0,4$ . Тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,99 \cdot 0,4 = 0,396. \triangleleft$$

Формула умножения вероятностей (13) обобщается на случай нескольких событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n), \quad (14)$$

где  $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$  означает условную вероятность события  $A_n$ , вычисленную при условии, что все события  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  уже произошли. Следовательно,

вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий равна произведению вероятности одного из них и условных вероятностей других, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события произошли.

**Задача 3**

В коробке лежат 6 белых, 4 черных и 3 красных шара. Наугад один за другим вынимают три шара, причем вынутый шар в коробку не возвращают. Найдите вероятность того, что первый шар будет красным, второй — белым, а третий — черным.

► Пусть событие  $A$  — первый вынутый шар красный, событие  $B$  — второй шар белый, событие  $C$  — третий шар черный. Тогда событие  $ABC$  — вынули три шара, из которых первый — красный, второй — белый и третий — черный.

В коробке всего 13 шаров. Вынимание (наугад) любого из 13 шаров — равновозможные события. Событию  $A$  благоприятствуют 3 события (в коробке всего 3 красных шара). Тогда  $P(A) = \frac{3}{13}$ . После того как вынули один красный шар (произошло событие  $A$ ), в коробке осталось 12 шаров, из них только 6 белых, следовательно,  $P_A(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ . После того как вынули один красный и один белый шар (произошли события  $A$  и  $B$ , то есть событие  $AB$ ), в коробке осталось 11 шаров, из них только 4 черных, следовательно,  $P_{AB}(C) = \frac{4}{11}$ . Тогда по обобщенной формуле умножения вероятностей (14) получаем:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{6}{143} \triangleleft$$

**Вопросы для контроля**

1. Объясните смысл понятия условной вероятности события  $A$  при условии события  $B$ . Приведите примеры.
- 2\*. Обоснуйте формулу  $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  (где  $P(B) > 0$ ) для случая классического определения вероятности.
3. Сформулируйте теорему умножения вероятностей. Приведите пример ее использования.
4. Объясните, как можно вычислить вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий. Приведите пример вычисления такой вероятности.

## Упражнения

- В ящике находятся десять деталей, из которых четыре окрашены. Рабочий наугад по одной вынимает две детали. Найдите вероятность того, что:
  - вторая деталь окрашена, если первая окрашена;
  - вторая деталь окрашена, если первая не окрашена;
  - обе детали окрашены;
  - обе детали не окрашены.
- В коробке находятся 5 белых и 4 черных шара. Из коробки наугад вынимают один за другим два шара (шары в коробку не возвращают). Найдите вероятность того, что второй шар белый, если первый: 1) белый; 2) черный.
- На некотором предприятии 95% продукции считается качественной. Из качественных изделий 75% составляют изделия первого сорта, остальные — второго. Найдите вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется изделием второго сорта.
- В читальном зале есть шесть учебников по математике, из которых три в твердой обложке. Библиотекарь наугад взял два учебника. Найдите вероятность того, что оба учебника будут в твердой обложке.
- В коробке лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наугад один за другим берут три шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Найдите вероятность того, что первый шар будет красным, второй — зеленым, а третий — синим.

## 18.6. Независимые события

Таблица 30

1. Понятие независимости двух событий	
Содержание	Определение
Событие $B$ называется независимым от события $A$ , если событие $A$ не изменяет вероятности события $B$ .	<p>События <math>A</math> и <math>B</math> называются <i>независимыми</i>, если выполняется равенство</p> $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ <p>(вероятность их произведения — то есть совместного появления — равна произведению вероятностей этих событий).</p>
2. Независимость нескольких событий	
<p>Несколько событий называются <i>независимыми</i>, если для любого подмножества этих событий (содержащего два или больше событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.</p> <p>В частности,</p> <p>если события <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> независимы, то</p> $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$	

## 3. Свойство независимых событий

Если мы имеем совокупность независимых событий, то, заменив некоторые из этих событий на противоположные им события, снова получим совокупность независимых событий. Например, если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимыми будут также события

$$A \text{ и } \bar{B}, \bar{A} \text{ и } B, \bar{A} \text{ и } \bar{B}.$$

4. Вероятность того, что произойдет хотя бы одно из независимых событий

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n))$$

**Объяснение и обоснование**

Событие  $B$  называется независимым от события  $A$ , если появление события  $A$  не изменяет вероятности события  $B$ . В этом случае

$$P_A(B) = P(B).$$

Тогда по формуле умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Полученное равенство чаще всего принимают за общее определение независимости событий.

**События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если выполняется равенство**

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad (15)$$

то есть два события называются независимыми, если вероятность их произведения (то есть совместного появления) равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (15) обязательно будет выполняться, если одно из событий невозможное или достоверное. Например, если событие  $B$  — невозможное, то есть  $B = \emptyset$ , то  $AB = \emptyset$ . Следовательно,  $P(AB) = 0$  и  $P(B) = 0$ , то есть равенство (15) выполняется. Если событие  $B$  — достоверное, то есть  $B = U$ , то  $AB = AU = A$ . Тогда  $P(AB) = P(A)$  и  $P(B) = 1$ , следовательно, равенство (15) выполняется и в этом случае. Таким образом, *если хотя бы одно из двух событий невозможное или достоверное, то такие два события независимы.*

Отметим, что в случае, когда события  $A$  и  $B$  не являются невозможными или достоверными и выполняется равенство  $P_A(B) = P(B)$  (событие  $B$  является независимым от события  $A$ ), то  $P_B(A) = P(A)$  (то есть событие  $A$  является независимым от события  $B$ ). Действительно, по формуле умножения вероятностей  $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ . Тогда

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (16)$$

Подставляя в последнее равенство вместо  $P_A(B)$  равное ему число  $P(B)$  и сокращая обе части на  $P(B) \neq 0$ , получаем, что  $P_B(A) = P(A)$ . Это подтверждает интуитивно понятный факт, что в случае, когда событие  $B$  не за-

висит от события  $A$ , то и событие  $A$  не зависит от события  $B$ .

Обратим внимание, что в случае, когда события  $A$  и  $B$  независимы, также независимыми будут события  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

● Докажем, например, что будут независимыми события  $A$  и  $\bar{B}$ . Если события  $A$  и  $B$  независимы, то по определению  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ . Когда происходит событие  $A$ , то событие  $B$  может происходить или не происходить. Следовательно, можно утверждать, что событие  $A$  происходит тогда и только тогда, когда происходят или события  $A$  и  $B$ , или события  $A$  и  $\bar{B}$ , то есть  $A = AB + A\bar{B}$ . Учитывая, что события  $AB$  и  $A\bar{B}$  несовместны (поскольку события  $B$  и  $\bar{B}$  — несовместны) и что  $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ , получаем:  $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ . Тогда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}).$$

$A$  это и означает, что события  $A$  и  $\bar{B}$  независимы. ○

Аналогично обосновывается независимость событий  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

Понятие независимости событий может быть распространено на любое конечное количество событий.

Несколько событий называются *независимыми* (еще говорят — «независимыми в совокупности»), если для любого подмножества этих событий (содержащего два или более событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

Например, три события  $A$ ,  $B$ ,  $C$  будут независимыми, если выполняются условия:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad P(AC) = P(A) \cdot P(C), \quad P(BC) = P(B) \cdot P(C), \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Из определения следует, что в случае, когда события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (17)$$

(но выполнение этого равенства при  $n > 2$  еще не означает, что события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы).

Как и в случае двух событий, можно доказать, что если в некоторой совокупности независимых событий заменить некоторые из них противоположными им событиями, то получится также совокупность независимых событий.

Отметим, что приведенные определения независимости событий в теоретико-вероятностном понимании соответствуют обычному пониманию независимости событий как отсутствию влияния одних событий на другие. Поэтому при решении задач можно пользоваться следующим принципом: *причинно независимые события являются независимыми и в теоретико-вероятностном понимании.*

### Задача 1

Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых на протяжении суток может выйти из строя независимо от других. Прибор не работает, если не работает хотя бы один из узлов.

Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,95, второго — 0,9, третьего — 0,85. Найдите вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.

► Пусть событие  $A_1$  — первый узел исправен, событие  $A_2$  — второй узел исправен, событие  $A_3$  — третий узел исправен, событие  $A$  — в течение суток прибор работает безотказно. Поскольку прибор работает безотказно тогда и только тогда, когда исправны все три узла, то  $A = A_1A_2A_3$ . По условию события  $A_1, A_2, A_3$  — независимые, следовательно,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,85 = 0,72675 \approx 0,73. \triangleleft$$

### Задача 2

Два стрелка сделали по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попасть в мишень для первого стрелка равна 0,9, для второго — 0,8. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена.

► Рассмотрим такие события:  $A$  — первый стрелок попал в мишень,  $B$  — второй стрелок попал в мишень,  $C$  — мишень поражена. События  $A$  и  $B$  независимые, но непосредственно использовать в данном случае умножение вероятностей нельзя, поскольку событие  $C$  наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них.

Будем рассуждать иначе. Рассмотрим события  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ , противоположные соответственно событиям  $A, B, C$ . Поскольку события  $A$  и  $B$  независимые, то события  $\bar{A}, \bar{B}$  — также независимые. Если  $P(A) = 0,9$ , то  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$ . Если  $P(B) = 0,8$ , то  $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = 0,2$ .

Учитывая, что мишень не будет поражена тогда и только тогда, когда в нее не попадет ни первый стрелок, ни второй, получаем, что  $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$ . Тогда

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Поскольку события  $C$  и  $\bar{C}$  противоположные, то

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,02 = 0,98. \triangleleft$$

**Замечание.** Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно обобщить.

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимые, то события  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  также независимые (и  $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Для нахождения вероятности появления хотя бы одного из независимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , то есть события  $C = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , можно найти вероятность противоположного события  $\bar{C}$ . Событие  $\bar{C}$  произойдет тогда и только тогда, когда не произойдет ни событие  $A_1$ , ни событие  $A_2, \dots$ , ни событие  $A_n$ , то есть

$$\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n.$$

Тогда

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = \\ = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Учитывая, что  $P(C) = 1 - P(\bar{C})$ , получаем, что *вероятность появления хотя бы одного из независимых событий*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  можно вычислить по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Разумеется, приведенную формулу необязательно запоминать, достаточно при решении задач на нахождение вероятности появления хотя бы одного из независимых событий провести вышеизложенные рассуждения.

### Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае событие  $B$  называется независимым от события  $A$ .
2. Дайте определение независимости двух событий. Пользуясь этим определением, докажите, что в эксперименте по вытягиванию карт из колоды (36 карт) независимыми являются события:  $A$  — вытянули даму,  $B$  — вытянули бубновую карту.
- 3\*. Известно, что события  $A$  и  $B$  независимы. Обоснуйте независимость событий  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .
4. Объясните, как понимают независимость (то есть независимость в совокупности) трех событий  $K, M, N$ .
5. Запишите формулу для нахождения вероятности произведения нескольких независимых событий. Приведите пример ее использования.

### Упражнения

- 1°. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,8. Стрелок сделал два выстрела. Найдите вероятность того, что при обоих выстрелах стрелок попал в цель.
- 2°. Одновременно подбросили монету и игральный кубик. Найдите вероятность одновременного выпадения «герба» на монете и 1 очка на кубике.
- 3°. В одной партии электролампочек 3% бракованных, а во второй — 4% бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Найдите вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными.
4. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что на одном кубике выпадет 1 очко, а на втором — больше трех очков.
5. Три стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны 0,8, 0,75, 0,7, делают по одному выстрелу по одной мишени. Найдите вероятность того, что:
  - 1°) все три стрелка попадут в мишень;
  - 2) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;
  - 3) только один из стрелков попадет в мишень;
  - 4) только двое из стрелков попадут в мишень.

6. Вероятность остановки за смену одного из станков, работающих в цехе, равна 0,15, а второго — 0,16. Найдите вероятность того, что оба станка за смену не остановятся.
7. Прибор содержит два независимых элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найдите вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
- 8\*. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.
- 9\*. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,5. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 попасть в цель хотя бы один раз?

### 18.7. Схема Бернулли. Закон больших чисел

Таблица 31

1. Понятие независимых экспериментов	
<p>Пусть производится несколько экспериментов. Эксперименты называют <i>независимыми</i>, если вероятность появления какого-либо события <math>A</math> в каждом опыте никак не зависит от появления или не появления этого события в других опытах.</p>	<p><b>Пример.</b> Пусть событие <math>A</math> — выпал «герб». Тогда эксперименты по подбрасыванию одной и той же монеты в одинаковых условиях являются независимыми.</p>
2. Схема Бернулли (совокупность условий)	
<p><i>Пусть выполняется <math>n</math> независимых экспериментов, в каждом из которых событие <math>A</math> может произойти, а может и не произойти. Вероятность того, что произойдет событие <math>A</math>, в каждом из экспериментов одинакова и равна <math>p</math>, а вероятность того, что событие <math>A</math> не произойдет (то есть произойдет событие <math>\bar{A}</math>), равна <math>q = 1 - p</math>.</i></p>	
3. Формула Бернулли	
<p>Вероятность <math>P_{m,n}</math> того, что в <math>n</math> независимых экспериментах событие <math>A</math> произойдет точно <math>m</math> раз, равна</p> $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$	<p><b>Пример.</b> Найдите вероятность того, что при 6 подбрасываниях монеты «герб» выпадет точно 4 раза.</p> <p>► Для этой задачи условия схемы Бернулли таковы:</p> $n = 6, m = 4, p = \frac{1}{2}, q = 1 - p = \frac{1}{2}.$ <p>Тогда</p> $P_{4,6} = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64} \approx 0,23. \triangleleft$



3. Неравенство Чебышёва	
<p>Пусть вероятность того, что в эксперименте произойдет событие <math>A</math>, равна <math>p</math> (тогда вероятность того, что событие <math>A</math> не произойдет, равна <math>q = 1 - p</math>) и пусть проводятся <math>n</math> независимых повторений этого эксперимента. Через <math>m</math> обозначим число экспериментов, в которых произошло событие <math>A</math>. Тогда для любого положительного числа <math>a</math> выполняется неравенство</p> $P\left(\left \frac{m}{n} - p\right  > a\right) < \frac{pq}{a^2 n}.$	
4. Закон больших чисел (простейшая форма)	
Содержание	Математическая запись
<p>При большом количестве экспериментов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события.</p>	<p>При условиях, сформулированных в неравенстве Чебышёва,</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left \frac{m}{n} - p\right  > a\right) = 0.$

### Объяснение и обоснование

**1. Схема Бернулли.** Пусть проводятся несколько экспериментов. Если вероятность появления какого-либо события  $A$  в каждом эксперименте никак не зависит от появления или не появления этого события в других экспериментах, то такие эксперименты называют *независимыми*.

Рассмотрим независимые эксперименты, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  не изменяется от эксперимента к эксперименту. Обратим внимание, что *вследствие независимых экспериментов всегда происходят независимые события*.

Например, независимыми являются несколько экспериментов с бросанием одного и того же игрального кубика в одинаковых условиях. Пусть событие  $A$  — выпало 1 очко. Если кубик однородный и имеет правильную геометрическую форму, то в каждом из этих экспериментов вероятность  $p$  появления события  $A$  одинакова и равна  $\frac{1}{6}$  ( $p = \frac{1}{6}$ ). Отметим, что тогда и вероятность  $q$  не появления события  $A$  в каждом из этих экспериментов также одинакова (это вероятность появления события  $\bar{A}$ , поэтому  $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ ).

Некоторые практические задачи сводятся к построению математической модели проведения независимых экспериментов с двумя результатами, вероятности которых  $p$  и  $q$  не изменяются от эксперимента к эксперименту.

Совокупность условий для построения такой модели называется *схемой Бернулли*.

Пусть проводится  $n$  независимых экспериментов, в каждом из которых событие  $A$  может произойти, а может и не произойти. Вероятность того, что произойдет событие  $A$ , в каждом из экспериментов одинакова и равна  $p$ , а вероятность того, что событие  $A$  не произойдет (то есть произойдет событие  $\bar{A}$ ), равна  $q = 1 - p$ . Найдем вероятность  $P_{m,n}$  того, что в  $n$  независимых экспериментах событие  $A$  произойдет точно  $m$  раз.

Искомую вероятность при указанных условиях можно вычислить по *формуле Бернулли*:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

- Сначала рассмотрим один набор из  $n$  экспериментов, в котором событие  $A$  произойдет точно  $m$  раз в первых  $m$  экспериментах (и соответственно событие  $\bar{A}$  произойдет  $n - m$  раз в последних  $n - m$  экспериментах):

$$\underbrace{AA \dots A}_{m \text{ раз}} \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m \text{ раз}}. \quad (16)$$

Поскольку результаты  $n$  рассмотренных независимых экспериментов являются независимыми событиями, то вероятность появления такого набора событий равна произведению вероятностей соответствующих независимых событий, то есть

$$\underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot \dots \cdot P(A)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A})}_{n-m \text{ раз}} = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-m \text{ раз}} = p^m q^{n-m}.$$

Если событие  $A$  произойдет точно  $m$  раз в других  $m$  экспериментах из  $n$  рассмотренных, то такой набор событий отличается от набора (16) только тем, что события  $A$  и  $\bar{A}$  стоят на других местах. Количество событий останется неизменным ( $m$  событий  $A$  и  $n - m$  событий  $\bar{A}$ ), а значит, неизменной будет и вероятность появления каждого набора  $p^m q^{n-m}$ . Количество полученных различных наборов равно количеству возможных выборов  $m$  экспериментов, в которых происходит событие  $A$ , из  $n$  рассмотренных экспериментов. Другими словами,  $C_n^m$  фактически равно количеству выборов  $m$  мест для буквы  $A$  из  $n$  мест в записи набора (16). Полученные наборы событий несовместны, следовательно, вероятность всех благоприятных результатов (того, что событие  $A$  произойдет точно  $m$  раз в рассмотренных  $n$  экспериментах) равна сумме  $C_n^m$  чисел, каждое из которых равно  $p^m q^{n-m}$ . Тогда получаем:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Учитывая, что  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , *формулу Бернулли* можно записать так:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad \circ$$

**Задача 1** Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика 1 очко выпадет точно 2 раза.

► Все условия схемы Бернулли выполнены. Событие  $A$  — выпало 1 очко при бросании игрального кубика. При всех бросаниях кубика вероятность выпадения 1 очка (события  $A$ ) одинакова и равна  $p = \frac{1}{6}$ , тогда вероятность события  $\bar{A}$  равна  $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ . Кроме того, по условию  $n = 10$ ,  $m = 2$ . Следовательно, по формуле Бернулли

$$P_{2,10} = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5^8}{1 \cdot 2 \cdot 6^{10}} = \frac{9 \cdot 5^9}{6^{10}} \approx 0,291. \triangleleft$$

**Задача 2** Вероятность того, что расход электроэнергии в течение суток не превысит установленную норму, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии за какие-то 4 суток не превысит норму, а за остальные двое суток — превысит.

► Событие  $A$  — расход электроэнергии в течение суток не превышает установленную норму. Каждые сутки вероятность события  $A$  одинакова:  $p = 0,75$ , тогда вероятность события  $\bar{A}$  (перерасход электроэнергии в течение суток)  $q = 1 - p = 0,25$ . Следовательно, все условия схемы Бернулли выполнены. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_{4,6} = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 \approx 0,30. \triangleleft$$

Вычисления по формуле Бернулли при больших значениях  $m$  и  $n$  затруднены. В математике предложены формулы, позволяющие находить приближенные значения для  $P_{m,n}$  и, что даже более важно для практики, находить суммы значений  $P_{m,n}$  таких, что значение дроби  $\frac{m}{n}$  (относительная частота события  $A$ ) лежит в заданных границах.

По формуле Бернулли вероятность того, что в серии из 100 бросаний монеты все 100 раз выпадет «герб», равна  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ , то есть приблизительно  $10^{-30}$ .

Очень мала и вероятность того, что при 100 подбрасываниях «число» выпадет точно 10 раз (соответственно «герб» выпадет 90 раз). Наиболее вероятно, что количество выпадений «герба» будет мало отличаться от 50.

Вообще, как отмечалось в пункте 18.3, *при большом количестве экспериментов относительная частота появления события, как правило, мало отличается от вероятности этого события*. Математическую формулировку этого качественного утверждения дает открытый Я. Бернулли закон больших чисел. Одно из возможных обоснований этого закона опирается на

неравенство, установленное П. Л. Чебышёвым, которое мы без доказательства сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть вероятность появления события  $A$  в некотором эксперименте равна  $p$  (а вероятность неоявления события  $A$ , то есть появления события  $\bar{A}$ , равна  $q = 1 - p$ ) и пусть проводятся  $n$  независимых повторений этого эксперимента. Через  $m$  обозначим число экспериментов, в которых происходило событие  $A$ . Тогда для любого положительного числа  $a$  выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a\right) < \frac{pq}{a^2 n}. \quad (17)$$

Поясним смысл этого неравенства. Выражение  $\frac{m}{n}$  равно относительной частоте события  $A$  в серии экспериментов, а  $\left|\frac{m}{n} - p\right|$  — отклонению этой относительной частоты от теоретического значения  $p$ . Неравенство  $\left|\frac{m}{n} - p\right| > a$  означает, что отклонение оказалось больше, чем  $a$ . Но при постоянном значении  $a$  с ростом  $n$  правая часть неравенства (17) стремится к нулю. Иными словами, серии, в которых отклонение экспериментальной частоты от теоретической велико, составляют малую часть всех возможных серий экспериментов. Из неравенства Чебышёва следует утверждение, полученное Я. Бернулли, которое является простейшей формой закона больших чисел: по условию теоремы при любом значении  $a > 0$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a\right) = 0. \quad (18)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pq}{a^2 n} = 0$ .

Отметим, что по условию теоремы при любом значении  $\varepsilon > 0$  равенство (18) эквивалентно следующему равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

которое и означает, что при увеличении числа экспериментов  $n$  вероятность того, что частота  $\frac{m}{n}$  появления события  $A$  близка к вероятности появления события  $A$ , приближается к 1.

**Замечание.** Под законом больших чисел обычно понимают не только приведенную формулировку, но и ряд других теорем, обосновывающих отмеченную закономерность для применения математики в естествознании. Эта закономерность состоит в том, что совместное действие многих независимых случайных факторов часто приводит к результатам, почти не зависящим от каждого из этих факторов по отдельности.

**Задача 3\***

Какое количество экспериментов достаточно провести, чтобы равенство  $p \approx \frac{m}{n}$  (где  $n$  — искомое число экспериментов, а  $m$  — число выпадений события  $A$ ) с точностью до 0,1 получить с вероятностью 0,9?

► Для решения достаточно найти такое  $n$  (см. неравенство (17)), чтобы было выполнено неравенство  $\frac{pq}{0,1^2 n} \leq 0,1$ . Учитывая, что  $q = 1 - p$ , можно записать

$$pq = p(1 - p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

и поэтому достаточно указать  $n$ , удовлетворяющее неравенству  $\frac{1}{4 \cdot 0,1^2 n} \leq 0,1$ . Отсюда  $n \geq 250$ .

Как видим, если мы оцениваем требуемое число экспериментов с помощью неравенства Чебышева, получаем очень большие числа. Правда, более глубокие теоремы показывают, что можно ограничиться меньшим числом экспериментов. ◀

**Вопросы для контроля**

1. Объясните, какие эксперименты называются независимыми. Приведите примеры таких экспериментов.
2. Запишите формулу Бернулли. Объясните, в каких условиях ее можно применять.
3. Объясните смысл простейшей формы закона больших чисел.
- 4\*. а) Запишите неравенство Чебышева. Объясните его смысл.  
б) Пользуясь неравенством Чебышева, обоснуйте простейшую форму закона больших чисел.

**Упражнения**

- 1°. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика пять очков выпадут ровно: 1) три раза; 2) один раз.
2. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика одно очко выпадет не более трех раз.
3. Найдите вероятность того, что при 6 бросаниях игрального кубика число очков, кратное 3, выпадет ровно: 1) два раза; 2) пять раз.
4. Что вероятнее выиграть у равного противника (ничейный результат не учитывается):  
1) три партии из четырех или пять из восьми;  
2\*) не меньше трех партий из четырех или не меньше пяти партий из восьми?
- 5°. В мастерской работают 6 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева до обеденного перерыва равна 0,8. Найдите вероятность того, что до обеденного перерыва:  
1) перегреются ровно 4 мотора; 2) перегреются все моторы;  
3) ни один мотор не перегреется.

6. Вероятность появления события  $A$  в эксперименте равна 0,3. Эксперимент повторили независимым образом 5 раз. Найдите вероятность того, что событие  $A$  появится не меньше двух раз.
- 7\*. Используя неравенство Чебышёва, определите, сколько достаточно провести экспериментов, чтобы равенство  $p \approx \frac{m}{n}$  (где  $n$  — искомое число экспериментов, а  $m$  — число выпадений события  $A$ ) с точностью до 0,01 получить с вероятностью 0,95?
- 8\*. Используя неравенство Чебышёва, определите, какова вероятность того, что равенство  $p \approx \frac{m}{n}$  выполняется с точностью до 0,1 при проведении 100 экспериментов?

### 18.8. Понятия случайной величины и ее распределения. Математическое ожидание случайной величины

**1. Понятие случайной величины.** Под *случайной величиной* в теории вероятностей понимают переменную величину, которая в данном случайном эксперименте может принимать те или иные числовые значения с определенной вероятностью. Обозначают случайные величины прописными буквами латинского алфавита:  $X, Y, Z, \dots$ , а их значения — соответствующими строчными буквами:  $x, y, z, \dots$ . Тот факт, что случайная величина  $X$  приняла значение  $x$ , записывают так:  $X = x$ .

Например, в пункте 18.1 (с. 264) были найдены вероятности появления той или иной суммы очков при бросании двух игральных кубиков. Появляющаяся сумма очков — случайная величина. Обозначим ее через  $X$ . Тогда  $x_1 = 2, x_2 = 3, \dots, x_{10} = 11, x_{11} = 12$  — значения случайной величины  $X$ . Значения случайной величины  $X$  и соответствующая вероятность ее появления ( $p_1, p_2, \dots, p_{10}, p_{11}$ \*) приведены в таблице:

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, какие значения величина  $X$  принимает с одинаковыми вероятностями, какое значение величины  $X$  является с большей вероятностью и т. д. Такую таблицу называют *таблицей распределения значений случайной величины по их вероятностям* и говорят, что эта таблица задает *закон распределения* рассмотренной *случайной величины*.

Приведем определения рассмотренных понятий. Отметим, что случайную величину можно задать в любом случайном эксперименте. Для этого

\* Таким образом, через  $p_i$  обозначена вероятность события — случайная величина  $X$  приняла значение  $x_i$ . Это можно записать так:  $P(X = x_i) = p_i$  (где  $i = 1, 2, \dots, 11$ ).

достаточно каждому элементарному событию из пространства элементарных событий эксперимента поставить в соответствие некоторое число (в этом случае говорят, что задана числовая функция, область определения которой является пространство элементарных событий).

*Случайной величиной называется числовая функция, областью определения которой является пространство элементарных событий.*

Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты пространство элементарных событий состоит из двух событий:  $u_1$  — выпал «герб»,  $u_2$  — выпало «число». Эти события несовместны, и в результате эксперимента обязательно произойдет только одно из этих событий. Поставим в соответствие событию  $u_1$  число 1, а событию  $u_2$  — число 0 (то есть будем считать, что в случае появления «герба» выпадает число 1, а в случае появления «числа» выпадает 0). Тогда получим случайную величину  $X$ , которая принимает только два значения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$  (то есть  $X(u_1) = x_1 = 1$ ,  $X(u_2) = x_2 = 0$ ). Рассмотренную функцию — случайную величину  $X$  — можно задать также с помощью следующей таблицы:

Результат эксперимента	$u_1$ — выпал «герб»	$u_2$ — выпало «число»
Значение $X$	1	0

Закон распределения этой случайной величины задается таблицей:

$X$	1	0
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Отметим, что закон распределения каждой случайной величины устанавливает соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями, то есть является функцией, область определения которой — все значения случайной величины. Поэтому

*законом распределения случайной величины  $X$  называется функция, которая каждому значению  $x$  случайной величины  $X$  ставит в соответствие число  $P(X = x)$  (вероятность события, состоящего в том, что случайная величина  $X$  приняла значение  $x$ ).*

В общем случае закон распределения случайной величины, принимающей только  $n$  значений, можно записать в виде таблицы:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$P_1$	$P_2$	...	$P_n$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — разные значения случайной величины  $X$ , а  $p_i = P(X = x_i)$  (где  $i = 1, 2, \dots, n$ ) — вероятности, с которыми  $X$  принимает эти значения.

События  $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$  попарно несовместны, и их сумма является достоверным событием. Поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1, следовательно,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Это равенство часто используют для проверки правильности задания закона распределения случайной величины, особенно в тех случаях, когда он задается не в результате теоретического расчета вероятностей событий с использованием классического определения вероятности, а в результате использования статистического определения вероятности.

Например, в экспериментах с подбрасыванием пуговицы с ушком для пришивания падение пуговицы на ушко или на лицевую сторону может быть рассмотрено как случайная величина  $Y$  с условными значениями  $y_1 = 1$  (падение на ушко) и  $y_2 = 0$  (падение на лицевую сторону). Результаты серии экспериментов с некоторой пуговицей представлены в таблице, задающей закон распределения случайной величины.

$Y$	1	0
$P$	0,45	0,55

$$(\text{проверка: } 0,45 + 0,55 = 1)$$

Замечание. В том случае, когда приходится находить сумму всех значений некоторой величины, можно использовать знак  $\sum$  (сигма, читается: «Сумма»), введенный Л. Эйлером (1707–1783). Например, если вероятность  $P$  принимает значения  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , то введем обозначение\*:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum P.$$

Используя это обозначение, проверку правильности составления последней таблицы можно записать следующим образом:  $\sum P = 0,45 + 0,55 = 1$ .

Рассмотренные в этом пункте случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от латинского *discretus* — раздельный, прерывистый), а распределение вероятностей такой величины называется *дискретным распределением вероятностей*.

Если случайная величина может принимать любое значение на некотором промежутке, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время  $T$  ожидания автобуса на остановке является непрерывной случайной величиной.

**2. Математическое ожидание случайной величины.** Дадим определение этого понятия для дискретной случайной величины.

Пусть случайная величина  $X$  принимает значения  $x_1, x_2, \dots, x_k$  соответственно с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , то есть имеет закон распределения:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_k$

\* Точнее указанная сумма записывается так:  $P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum_{i=1}^k P_i$ .



Сумма произведений всех значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием* величины  $X$  (и обозначается  $MX$  (или  $M(X)$ ):

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k. \quad (1)$$

Если значения случайной величины  $X$  имеют одну и ту же вероятность  $p$ , то, учитывая, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ , получаем  $k p = 1$  и  $p = \frac{1}{k}$ . Тогда

$$MX = x_1 p + x_2 p + \dots + x_k p = p(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k},$$

то есть в этом случае математическое ожидание случайной величины  $X$  равно среднему арифметическому всех ее значений.

Говорят, что *математическое ожидание случайной величины есть среднее взвешенное (вероятностями) ее значений*.

Математическое ожидание называют еще средним значением случайной величины. Иногда также говорят, что математическое ожидание случайной величины есть ее значение в среднем.

*Математическое ожидание показывает, на какое среднее значение случайной величины  $X$  можно надеяться в результате длительной серии экспериментов.* С помощью математического ожидания можно сравнивать случайные величины, заданные законами распределения.

Например, пусть количества очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух ловких стрелков, имеют следующие законы распределения:

$X$	8	9	10
$P$	0,4	0,1	0,5

$Y$	8	9	10
$P$	0,1	0,6	0,3

Чтобы выяснить, какой из стрелков стреляет более метко, находят математическое ожидание для каждой случайной величины:

$$MX = 8 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,5 = 9,1; \quad MY = 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,3 = 9,2.$$

Следовательно, среднее количество очков, выбиваемое при одном выстреле, у второго стрелка несколько больше, чем у первого. Это дает основание сделать вывод о том, что второй стрелок стреляет немного лучше, чем первый.

Понятие математического ожидания возникло в связи с изучением азартных игр. Приведем примеры.

**Пример 1** Игрок вносит в банк игорного дома 1000 р. Бросают игральную кость. По правилам игры игрок может получить 1800 р., если случится событие  $A_1$  — выпадет 6 очков; 1200 р., если случится событие  $A_2$  — выпадет или 4, или 5 очков; 0 рублей, если случится событие  $A_3$  — выпадет или 1, или 2, или 3 очка.

Будем считать, что игрок получает  $X$  рублей, т. е.  $X$  — случайная величина, которая может принимать значения  $x_1 = 1800$ ,  $x_2 = 1200$ ,  $x_3 = 0$  соответственно с вероятностями

$$p_1 = p(A_1) = \frac{1}{6}, \quad p_2 = p(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p_3 = p(A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{где } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины  $X$  равно

$$MX = 1800 \cdot \frac{1}{6} + 1200 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 700.$$

Математическое ожидание — очень важный показатель игры. Многочисленные опыты показывают, что число  $MX = 700$  в нашем случае — это есть та сумма, которую в среднем игорный дом выплачивает каждому игроку. Но это означает, что каждый игрок в среднем теряет 300 р. из внесенных в банк игорного дома 1000 р.

**Пример 2** Игрок вынимает из колоды (в 36 карт) одну карту. Он получает (то есть выигрывает) 10 р., если вынет бубнового туза, 5 р., если вынет бубнового короля, и кладет на стол 1 р. (то есть проигрывает, но можно сказать, что выигрывает  $-1$  р.) в остальных случаях.

Будем считать, что игрок получает  $X$  рублей, где  $X$  — случайная величина, которая может принимать значения  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = -1$  соответственно с вероятностями

$$p_1 = \frac{1}{36}, \quad p_2 = \frac{1}{36}, \quad p_3 = \frac{34}{36}, \quad \text{где } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины  $X$  равно

$$MX = 10 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + (-1) \cdot \frac{34}{36} = -\frac{19}{36}.$$

Это означает, что каждый игрок в среднем теряет  $\frac{19}{36}$  р.

**Пример 3** *Задача Паскаля.* Два игрока  $A$  и  $B$  согласились, что в их игре вся ставка достанется тому, кто первый выиграет 5 партий. Но игра оказалась прерванной, когда игрок  $A$  имел 4 выигрыша, а игрок  $B$  — 3 выигрыша. В каком отношении игроки должны разделить ставку в этой прерванной игре (в каждой партии выигрывает один из игроков — ничьих нет; вероятность выигрыша каждого игрока в одной партии считается равной 0,5)?

Рассмотрим, какие случаи могли бы произойти, если бы игроки сыграли еще две партии (независимо от их первоначальной договоренности):

1) игрок  $B$  выиграет обе партии; 2) игрок  $B$  выиграет первую партию, но проиграет вторую; 3) игрок  $B$  проиграет первую партию, но выиграет вторую; 4) игрок  $B$  проиграет обе партии.

По первоначальному соглашению всю игру выигрывает первый игрок в трех из этих четырех случаев, второй — лишь в одном. Следовательно, вероят-

ность события  $A$  (игрок  $A$  выиграл всю игру) равна  $\frac{3}{4}$ , а вероятность события  $B$  (игрок  $B$  выиграл всю игру) равна  $\frac{1}{4}$ .

Если ставка равна  $m$  р., то игрок  $A$  получил бы  $X_A$  р., где  $X_A$  — случайная величина, которая принимает значение  $m$  с вероятностью  $\frac{3}{4}$  и значение  $0$  с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , а игрок  $B$  получил бы  $X_B$  р., где  $X_B$  — случайная величина, которая принимает значение  $m$  с вероятностью  $\frac{1}{4}$  — и значение  $0$  с вероятностью  $\frac{3}{4}$ .

Найдем математическое ожидание величин  $X_A$  и  $X_B$ , то есть найдем, сколько в среднем получил бы каждый игрок:

$$M(X_A) = m \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}m, \quad M(X_B) = m \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}m.$$

Следовательно, в среднем игроки разделили бы ставку в отношении  $3 : 1$ , поэтому ставку надо разделить в отношении  $M(X_A) : M(X_B)$ , то есть в отношении  $3 : 1$ .

### Вопросы для контроля

- а) Объясните, что такое случайная величина для данного случайного эксперимента. Приведите примеры. б\*) Дайте определение случайной величины. Пользуясь определением, задайте какую-то случайную величину для эксперимента с подбрасыванием двух монет.
- Объясните, что такое закон распределения случайной величины. Приведите примеры.
- Закон распределения случайной величины, принимающей только  $n$  значений, задан в виде таблицы. Как можно проверить правильность заполнения строки со значениями вероятностей в этой таблице?
- Объясните, в чем состоит отличие между дискретной и непрерывной случайными величинами. Приведите примеры таких величин.
- Дайте определение математического ожидания случайной величины  $X$ .

### Упражнения

- Составьте таблицу распределения по вероятностям  $P$  случайной величины  $X$  — числа очков, выпадающих при бросании игрального кубика.
- Есть 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика  $A$  одно очко встречается на гранях один раз, у кубика

$B$  — 2 раза, а у кубика  $C$  — 3 раза (рис. 139). Случайные величины  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — число очков, выпавших соответственно на каждом из кубиков  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Задайте законы распределения случайных величин  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  с помощью соответствующих таблиц.

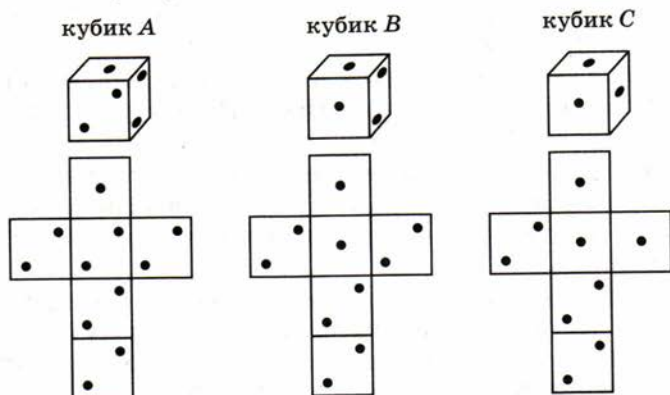


Рис. 139

3. Подбрасывают две монеты. Результату «герб» припишем условное числовое значение 0, а результату «число» — 1. Составьте таблицу распределения по вероятностям  $P$  значений случайной величины  $X$  — суммы чисел, выпавших на монетах.
- 4\*. Трижды подбрасывают монету. Случайная величина  $X$  — число выпадений «герба». Задайте закон распределения случайной величины  $X$  с помощью таблицы. (У к а з а н и е. Для вычисления соответствующих вероятностей используйте формулу Бернулли.)
5. Пусть закон распределения случайной величины  $X$  задан таблицей:

1) 

$X$	2	5	6	7
$P$	0,3	0,1	0,2	0,4

2) 

$X$	4	5	8	10	12
$P$	0,4	0,1	0,05	0,05	0,4

Найдите математическое ожидание этой величины.

6. Подбрасывают игральный кубик. Найдите математическое ожидание величины  $X$  — числа выпавших очков.
7. Выигрыши (в условных единицах), которые приходятся на один билет в каждой из двух лотерей, имеют следующие законы распределения:

$X$	0	1	5	10
$P$	0,9	0,06	0,03	0,01

$Y$	0	1	5	10
$P$	0,85	0,12	0,02	0,01

Какой из этих лотерей вы отдали бы предпочтение?

Будем называть игру справедливой, если в среднем будет одинаковым число очков или денег, получаемых каждым игроком. Определите, является ли справедливой игра, описанная в следующих задачах (8–10).

8. Подбрасывают две монеты. Игрок *A* получает 3 очка, если выпадают два герба, 0 очков в других случаях. Игрок *B* получает 2 очка, если выпадают герб и число, 0 очков в других случаях.
9. Подбрасывают две монеты. Игрок *A* получает 2 очка, если выпадают два числа, 0 очков в других случаях. Игрок *B* получает 1 очко, если выпадают герб и число, 0 очков в других случаях.
10. Подбрасывают два игральные кубика. Игрок *A* получает 6 очков, если сумма выпавших очков не больше 7, и 0 очков в других случаях. Игрок *B* получает 7 очков, если сумма выпавших очков больше 7, и 0 очков в других случаях.
- 11\*. Подбрасывают две монеты. Игрок *A* получает  $a$  очков, если выпадают два герба, 0 очков в других случаях. Игрок *B* получает  $b$  очков, если выпадают герб и число, 0 очков в других случаях. Найдите отношение  $a : b$ , при котором эта игра будет справедливой.
12. *Задача Луки Пачоли* (1494 г.). Двое игроков играют до трех выигрышей. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Как справедливо разделить ставку 210 ливров (ливр — серебряная монета)?
- 13\*. *Задача Пьера Ферма* (1654 г.). Пусть до выигрыша всей встречи игроку *A* недостает двух партий, а игроку *B* — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

### 18.9. Понятие о статистике. Генеральная совокупность и выборка

**1. Понятие о статистике.** «Статистика знает все», — утверждали И. Ильф и Е. Петров в своем знаменитом романе «Двенадцать стульев» и продолжали: «Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики... Известно, сколько в стране охотников, балерин, станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок... Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас из статистических таблиц!»

Это ироничное описание дает достаточно точное представление о *статистике* (от латинского *status* — состояние) — науке, изучающей, обрабатывающей и анализирующей количественные данные о разнообразнейших массовых явлениях в жизни. Экономическая статистика изучает изменение цен, спроса и предложения товаров, прогнозирует рост и падение производства и потребления. Медицинская статистика изучает эффективность разных лекарств и методов лечения, вероятность возникновения некоторых заболеваний в зависимости от возраста, пола, наследственности, условий жизни, вредных привычек, прогнозирует распространение эпидемий. Демографическая статистика изучает рождаемость, численность населения, его

состав (возрастной, национальный, профессиональный). А есть еще статистика финансовая, налоговая, биологическая, метеорологическая...

Статистика имеет многовековую историю. Уже в Древнем мире вели статистический учет населения. Однако случайное толкование статистических данных, отсутствие строгой научной базы статистических прогнозов даже в середине XIX в. еще не позволяли говорить о статистике как науке. Только в XX в. появилась математическая статистика — наука, опирающаяся на законы теории вероятностей. Выяснилось, что статистические методы обработки данных из самых разных областей жизни имеют много общего. Это позволило создать универсальные научно обоснованные методы статистических исследований и проверки статистических гипотез. Таким образом,

*математическая статистика — это раздел математики, изучающий математические методы обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.*

В математической статистике рассматриваются методы, которые дают возможность по результатам экспериментов (статистическим данным) делать определенные выводы вероятностного характера.

Математическая статистика подразделяется на две обширные области: 1) *описательная статистика*, которая рассматривает методы описания статистических данных, их табличное и графическое представление и пр.; 2) *аналитическая статистика* (теория статистических выводов), которая рассматривает обработку данных, полученных в ходе эксперимента, и формулировку выводов, имеющих прикладное значение для конкретной области человеческой деятельности. Теория статистических выводов тесно связана с теорией вероятностей и базируется на ее математическом аппарате.

Среди основных задач математической статистики можно отметить следующие.

1. **Оценка вероятности.** Пусть некоторое случайное событие имеет вероятность  $p > 0$ , но ее значение нам неизвестно. Требуется оценить эту вероятность по результатам экспериментов, то есть решить задачу об оценке вероятности через частоту.
2. **Оценка закона распределения.** Исследуется некоторая случайная величина, точное выражение для закона распределения которой нам неизвестно. Необходимо по результатам экспериментов найти приближенное выражение для функции, задающей закон распределения.
3. **Оценка числовых характеристик случайной величины** (например, математического ожидания — см. п. 18.8).
4. **Проверка статистических гипотез** (предположений). Исследуется некоторая случайная величина. Исходя из определенных рассуждений, выдвигается, например, гипотеза о распределении этой случайной величины. Необходимо по результатам экспериментов принять или отклонить эту гипотезу.

Результаты исследований, проводимых методами математической статистики, применяются для принятия решений. В частности, при планирова-

нии и организации производства, при контроле качества продукции, при выборе оптимального времени наладки или замены действующей аппаратуры (например, при определении времени замены двигателя самолета, отдельных частей станков и т. д.).

Как и в каждой науке, в статистике используются свои специфические термины и понятия. Некоторые из них приведены в таблице 32. Запоминать их определения необязательно, достаточно понимать их смысл.

Таблица 32

Часто употребляемый термин	Смысл термина	Научный термин	Определение
Общий ряд данных	То, откуда выбирают	<b>Генеральная совокупность</b>	<i>Множество всех возможных результатов наблюдения (измерения)</i>
Выборка	То, что выбирают	<b>Статистическая выборка, статистический ряд</b>	<i>Множество результатов, реально полученных в данном наблюдении (измерении)</i>
Варианта	Значение одного из результатов наблюдения (измерения)	<b>Варианта</b>	<i>Одно из значений элементов выборки</i>
Ряд данных	Значения всех результатов наблюдения (измерения)	<b>Вариационный ряд</b>	<i>Упорядоченное множество всех вариант</i>

**2. Генеральная совокупность и выборка.** Для изучения различных массовых явлений проводятся специальные статистические исследования. Любое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называют *этапом статистических наблюдений*. Для получения статистических данных в результате наблюдений похожие элементы некоторой совокупности сравнивают по разным признакам. Например, учащихся 11 классов можно сравнивать по росту, размеру одежды, успеваемости и т. д. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, массе, материалу и т. д. Практически любой признак или непосредственно измеряется, или может получить условную числовую характеристику (см. пример с выпадением «герба» или «числа» при подбрасывании монеты на с. 302). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выяс-

нить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, потому что полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги. В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, называемой *генеральной совокупностью*, обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой*, а число элементов в выборке называется *объемом выборки*.

Если в выборке все основные признаки генеральной совокупности представлены в той же пропорции и с той же относительной частотой, с которой данный признак выступает в заданной генеральной совокупности, то эту выборку называют *репрезентативной* (от французского *représentatif* — показательный).

Иными словами, репрезентативная выборка представляет собой меньшую по размеру, но точную модель той генеральной совокупности, которую она должна отражать. В той степени, в какой выборка является репрезентативной, выводы, основанные на изучении этой выборки, можно с большой долей уверенности считать применимыми ко всей генеральной совокупности.

Понятие репрезентативности отобранной выборки не означает ее полного представительства по всем признакам генеральной совокупности, поскольку это практически обеспечить невозможно. Отобранная из всей совокупности часть должна быть репрезентативной относительно тех признаков, которые изучаются.

Чтобы выборка была репрезентативной, она должна быть выделена из генеральной совокупности случайным образом. Этого можно достичь различными способами. Чаще всего используют следующие виды выборок: 1) *собственно-случайную*; 2) *механическую*; 3) *типическую*; 4) *серийную*. Кратко охарактеризуем каждую из них.

- 1) Члены генеральной совокупности можно предварительно занумеровать и каждый номер записать на отдельной карточке. После тщательного перемешивания будем отбирать наугад из пачки таких карточек по одной карточке и получим выборочную совокупность любого нужного объема, которая называется *собственно-случайной выборкой*. Номера на отобранных карточках укажут, какие члены генеральной совокупности попали в выборку. (Заметим, что при этом возможны два принципиально различных способа отбора карточек в зависимости от того, возвращается или не возвращается обратно вынутая карточка после записи ее номера.) Собственно-случайную выборку заданного объема  $n$  можно образовать и с помощью так называемых таблиц случайных чисел или генератора случайных чисел на компьютере. *При образовании собственно-случайной выборки каждый член генеральной совокупности с одинаковой вероятностью может попасть в выборку.*
- 2) Выборка, в которую члены из генеральной совокупности отбираются через определенный интервал, называется *механической*. Например, если объем выборки должен составлять 5% объема генеральной совокупности



(5 %-ная выборка), то отбирается ее каждый 20-й член, при 10 %-ной выборке — каждый 10-й член генеральной совокупности и т. д. Механическую выборку можно образовать, если имеется определенный порядок следования членов генеральной совокупности, например, если они следуют друг за другом в определенной последовательности во времени. Именно так появляются изготовленные на станке детали, приборы, сошедшие с конвейера, и т. п. При этом необходимо убедиться, что в следующих один за другим членах генеральной совокупности значения признака не изменяются с той же (или кратной ей) периодичностью, что и периодичность отбора элементов в выборку. Например, пусть из продукции металлообрабатывающего станка в выборку попадает каждая пятая деталь, а после каждой десятой детали рабочий производит смену (или заточку) режущего инструмента и наладку станка. Эти операции рабочего направлены на улучшение качества деталей (износ режущего инструмента происходит более или менее равномерно). Следовательно, в выборочную совокупность попадут детали, на качество которых работа станка влияет в одну и ту же сторону, и значения признака выборочной совокупности могут неправильно отразить соответствующие значения признака генеральной совокупности.

- 3) Если из предварительно разбитой на непересекающиеся группы генеральной совокупности образовать собственно-случайные выборки из каждой группы (с повторным или бесповторным отбором членов), то отобранные элементы составят выборочную совокупность, которая называется *типической*.
- 4) Если генеральную совокупность предварительно разбить на непересекающиеся серии (группы), а затем, рассматривая серии как элементы, образовать собственно-случайную выборку (с повторным или бесповторным отбором серий), то все члены отобранных серий составят выборочную совокупность, которая называется *серийной*.

Например, пусть на заводе 150 станков (10 цехов по 15 станков) производят одинаковые изделия. Если в выборку отбирать изделия из тщательно перемешанной продукции всех 150 станков, то образуется собственно-случайная выборка. Но можно отбирать изделия отдельно из продукции первого, второго и т. д. станков. Тогда будет образована типическая выборка. Если же членами генеральной совокупности считать цеха и сначала образовать собственно-случайную выборку цехов, а потом в каждом из отобранных цехов взять все произведенные изделия, то все отобранные изделия (из всех отобранных цехов) составят серийную выборку.

Как уже отмечалось, практически любой признак  $X$ , который изучается, или непосредственно измеряется, или может получить числовую характеристику. Поэтому первичные экспериментальные данные, характеризующие выделенную выборку, обычно представлены в виде набора чисел, записанных исследователем в порядке их поступления. Количество ( $n$ ) чисел в этом наборе — *объем выборки*, а численность ( $m$ ) варианты (одного из значений

элементов выборки) называют *частотой варианты*. Отношение  $\frac{m}{n}$  называют относительной частотой ( $W$ ) варианты.

Используя эти понятия, запишем соотношение между ними в репрезентативной выборке.

- Пусть  $S$  — объем генеральной совокупности,  $n$  — объем репрезентативной выборки, в которой  $k$  значений исследуемых признаков распределены по частотам  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , где  $\sum M = n$ . Тогда в генеральной совокупности частотам  $M_1, M_2, \dots, M_k$  будут соответствовать частоты  $s_1, s_2, \dots, s_k$  тех же значений признака, что и в выборке ( $\sum s = S$ ). По определению репрезентативной выборки получаем:

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S},$$

где  $i$  — порядковый номер значения признака ( $1 \leq i \leq k$ ). Из этого соотношения находим:

$$s_i = SW_i \quad \left( \text{или } s_i = S \frac{M_i}{n} \right), \quad \text{где } 1 \leq i \leq k. \quad \circ \quad (1)$$

### Пример

Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодежного фасона. Для того чтобы определить, сколько кроссовок и какого размера необходимо выпустить, были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение размеров обуви по частотам представлено в таблице:

Размер ( $X$ )	36	37	38	39	40	41	42	43	44	$\sum M = n = 50$
Частота ( $M$ )	2	5	6	12	11	7	4	2	1	

Сколько кроссовок разного размера будет изготавливать фабрика?

### Решение

► Будем считать рассмотренную выборку объемом  $n = 50$  подростков репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объемом  $S = 1000$ ) количество кроссовок каждого размера пропорционально количеству кроссовок соответствующего размера в выборке (и для каждого размера находится по формуле (1)). Результаты расчетов будем записывать в таблицу:

Размер ( $X$ )	36	37	38	39	40	41	42	43	44	$\sum M = n = 50$
Частота ( $M$ )	2	5	6	12	11	7	4	2	1	
Относительная частота ( $W$ )	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\sum W = 1$
Количество кроссовок ( $SW$ )	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\sum (SW) = S = 1000$

Ответ.

Размер	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Количество кроссовок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

В сельском хозяйстве для определения количественного соотношения изделий разного сорта пользуются так называемым *выборочным методом*. Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта, теоретическую основу которого составляет закон больших чисел.

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зеленый и желтый. Небольшой емкостью, например ложкой, вынимают из разных мест коробки порции гороха. В каждой порции подсчитывают число желтых горошин  $M$  и число всех горошин  $n$ . Для каждой порции находят относительную частоту появления желтой горошины  $W = \frac{M}{n}$ . Так делают  $k$  раз (на практике обычно берут  $5 < k < 10$ ) и каждый раз вычисляют относительную частоту. За статистическую вероятность извлечения желтой горошины из коробки принимают среднее арифметическое полученных относительных частот  $W_1, W_2, \dots, W_k$ :

$$W_{\text{cp}} = \frac{W_1 + W_2 + \dots + W_k}{k}.$$

### Вопросы для контроля

- Объясните, какие задачи решают статистика и математическая статистика.
- Объясните, как вы понимаете термины: генеральная совокупность, выборка, репрезентативная выборка. Приведите примеры.

### Упражнения

- Определите, какую из предложенных выборок в последнем столбце таблицы 33 можно считать репрезентативной.

Таблица 33

№	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1	2	3	4
1°	Партия одинаковых деталей объемом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 100 деталей, лежащих рядом; 2) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии

1	2	3	4
2°	Все бродячие собаки областного центра	Определение числа собак, больных чумкой	1) Одна собачья стая; 2) по нескольку случайным образом отловленных собак из каждого района города
3°	Все работы государственной итоговой аттестации по математике учащихся 9 классов школ города	Определение соотношения между числом учащихся, находящихся на низком, среднем и высоком уровнях учебных достижений по математике	1) 10 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 2) 100 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 3) 100 работ учащихся одной школы
4°	Партия штампованных деталей объемом 100 000 штук	Определение средней массы детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, изготовленных последними; 3) 50 деталей, случайным образом выбранных из партии
5	Бидон молока	Определение жирности молока (в процентах)	1) Ложка молока, взятая с поверхности через 2 ч после доения; 2) стакан молока, налитый из бидона после охлаждения его в погребе в течение 2 ч; 3) ложка молока, взятая после тщательного перемешивания молока
6	Урожай зерна с площади 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 1 га; 2) среднее арифметическое урожайности зерна с двух соседних участков площадью 1 га: северного и восточного склонов холма; 3) среднее арифметическое урожайностей зерна с 10 участков, площадью 10 соток, выбранных на поле случайным образом

2. В отрывке из художественного произведения некоего автора объемом 600 слов деепричастия встречаются 72 раза. Определите ориентировочное количество деепричастий в отрывке объемом 2000 слов этого же автора.
3. Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, которые летом носят кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях для этого вида головных уборов. Результаты опроса отображены в таблице:

Цвет	Черный	Красный	Синий	Серый	Белый	Желтый	Зеленый
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, предложите рекомендации швейной фабрике по количеству выпуска кепок каждого цвета, если фабрика должна выпустить 30 000 кепок.

4. Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города, для которых завод производит молоко, был проведен опрос 50 наугад выбранных покупателей о том, какой жирности молоко они потребляют. Результаты опроса представлены в таблице:

Жирность молока (в %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, дайте рекомендации молокозаводу по объему выпуска молока каждого вида, если молокозавод должен выпускать 2000 л молока ежедневно.

### 18.10. Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

Таблица 34

Определение	Пример
Ранжирование ряда данных	
Под <i>ранжированием ряда данных</i> понимают расположение элементов этого ряда в порядке возрастания (имеется в виду, что каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего).	Если ряд данных выборки имеет вид 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то после ранжирования он превращается в ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. (*)
Размах выборки ( $R$ )	
<i>Размах выборки</i> — это разность между наибольшим и наименьшим значениями величины в выборке.	Для ряда (*) размах выборки: $R = 9 - 3 = 6$ .

Мода ( $M_o$ )											
<i>Мода</i> — это значение элемента выборки, встречающееся чаще остальных.	В ряду (*) значение 4 встречается чаще всего, итак, $M_o = 4$ .										
Медиана ( $M_e$ )											
<i>Медиана</i> — это так называемое срединное значение упорядоченного ряда значений: — если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине; — если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.	Для ряда (*), в котором 9 членов, медиана — это среднее (то есть пятое) число 5: $M_e = 5$ . Если рассмотреть ряд 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9, в котором 10 членов, то медиана — это среднее арифметическое пятого и шестого членов: $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5$ .										
Среднее значение ( $\bar{X}$ ) выборки											
<i>Средним значением</i> выборки называется среднее арифметическое всех чисел ряда данных выборки. Если в ряду данных записаны значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ (среди которых могут быть и одинаковые), то $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (**)$ Если известно, что в ряду данных различные значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ встречаются соответственно с частотами $m_1, m_2, \dots, m_k$ (тогда $\sum M = n$ ), то среднее арифметическое можно вычислить по формуле $\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{n}$	Пусть ряд данных задан таблицей распределения его различных значений по частотам $M$ : <table border="1" style="margin: 10px auto;"><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table> $\sum M = n = 8.$ Тогда по формуле (**) $\bar{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$ или по другой формуле $\bar{X} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4,25.$	X	2	4	5	7	M	3	1	2	2
X	2	4	5	7							
M	3	1	2	2							

1. **Табличное и графическое представление данных. Полигоны частот.** Как уже отмечалось, практически любой признак  $X$ , который изучается, или непосредственно измеряется, или может получить числовую характеристику. Поэтому первичные экспериментальные данные, характеризующие выделенную выборку, обычно представлены в виде набора чисел, записанных исследователем в порядке их поступления. Если данных много, то получен-

ный набор чисел трудно обозрим и сделать по нему какие-то выводы очень сложно. Поэтому первичные данные нуждаются в обработке, которая обычно начинается с их группировки. Группировка выполняется различными методами в зависимости от целей исследования, вида изучаемого признака и количества экспериментальных данных (объема выборки), но наиболее часто группировка сводится к представлению данных в виде таблиц, в которых различные значения элементов выборки упорядочены по возрастанию и указаны их частоты (то есть количество каждого элемента в выборке). При необходимости в этой таблице указывают также относительные частоты для каждого элемента, записанного в первой строке. Такую таблицу часто называют рядом распределения (или *вариационным рядом*).

Например, пусть в результате изучения размера обуви 30 мальчиков 11 класса был получен набор чисел (результаты записаны в порядке опроса): 39; 44; 41; 39; 40; 41; 45; 42; 44; 41; 41; 43; 42; 43; 41; 44; 42; 38; 40; 38; 41; 40; 42; 43; 42; 41; 43; 40; 40; 42.

Чтобы удобнее было анализировать информацию, в подобных ситуациях числовые данные сначала *ранжируют*, располагая их в порядке возрастания (когда каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего). В результате ранжирования получаем следующий ряд:

38; 38; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 42; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 43; 43; 44; 44; 44; 45.

Затем составляем таблицу, в первой строке которой указаны все различные значения полученного ряда данных ( $X$  — размер обуви выбранных 30 мальчиков 11 класса), а во второй строке — их частоты  $M$ :

$X$	38	39	40	41	42	43	44	45	
$M$	2	2	5	7	6	4	3	1	$n = \sum M = 30$

Получаем ряд распределения рассматриваемого признака  $X$  по частотам.

Иногда удобно проводить анализ ряда распределения на основе его графического изображения.

Отметим на координатной плоскости точки с координатами  $(x_1; m_1)$ ,  $(x_2; m_2)$ , ...,  $(x_k; m_k)$  и соединим их последовательно отрезками (рис. 140). Полученную ломаную линию называют *полигоном частот*.

То есть

*полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки с координатами  $(x_1; m_1)$ ,  $(x_2; m_2)$ , ...,  $(x_k; m_k)$ , где  $x_i$  — значения различных элементов ряда данных, а  $m_i$  — соответствующие им частоты.

Аналогично определяется и строится *полигон относительных частот* для рассматриваемого признака  $X$  (строятся точки с координатами  $(x_1; w_1)$ ,  $(x_2; w_2)$ , ...,  $(x_k; w_k)$ , где  $x_i$  — значения различных элементов ряда данных, а  $w_i$  — соответствующие им относительные частоты.

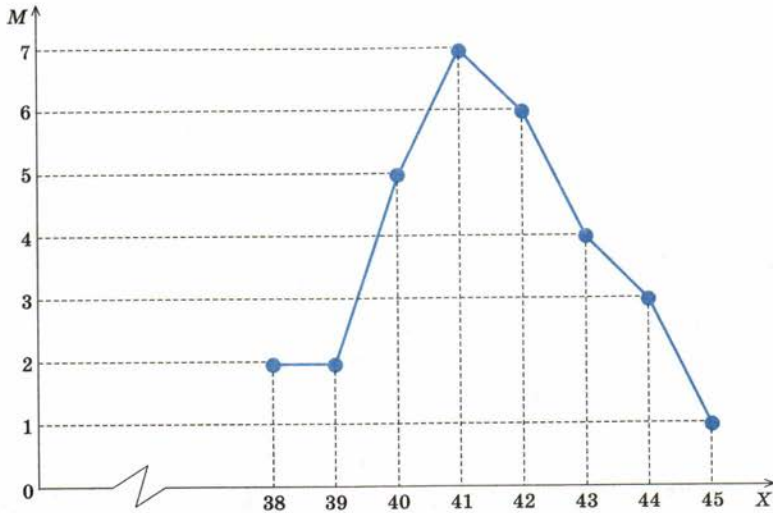


Рис. 140

Если вычислить относительные частоты для каждого из различных значений ряда данных, рассмотренного в начале этого пункта, то распределение значений рассматриваемого признака  $X$  по относительным частотам можно задать таблицей:

$X$	38	39	40	41	42	43	44	45	
$W$	$\frac{1}{15} \approx 0,07$	$\frac{1}{15} \approx 0,07$	$\frac{1}{6} \approx 0,17$	$\frac{7}{30} \approx 0,23$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{2}{15} \approx 0,13$	$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{1}{30} \approx 0,03$	$\Sigma W = 1$

Также распределение значений рассматриваемого признака  $X$  по относительным частотам можно представить в виде полигона относительных частот (рис. 141), в виде линейной диаграммы (рис. 142) или в виде круговой диаграммы, предварительно записав значения относительной частоты в процентах (рис. 143).

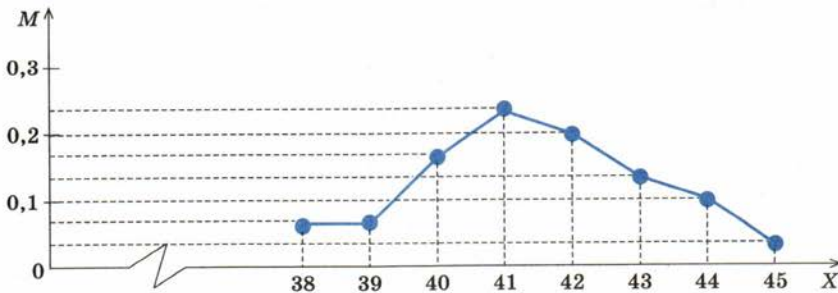


Рис. 141



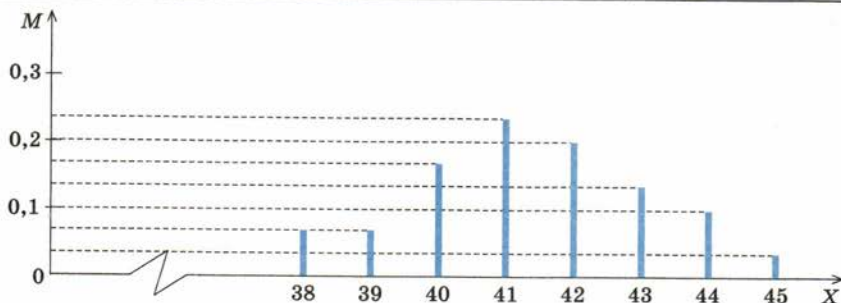


Рис. 142

Напомним, что для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, вычисленным для каждого из различных значений ряда данных. Обратим внимание, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность только при небольшом количестве полученных секторов. В противном случае ее применение малоэффективно.

Если рассматриваемый признак принимает много разных значений, то его распределение можно лучше себе представить после разбиения всех значений ряда данных на классы. Количество классов может быть любым, удобным для исследования (обычно их выбирают в количестве от 4 до 12). При этом величины (объемы) классов должны быть одинаковыми.

Например, в следующей таблице представлены сведения о заработной плате 100 рабочих одного предприятия (в некоторых условных единицах). При этом значения зарплаты (округлены до целого числа условных единиц) сгруппированы в 7 классов, каждый объемом в 100 условных единиц.

Классы	От 400 до 500	От 500 до 600	От 600 до 700	От 700 до 800	От 800 до 900	От 900 до 1000	От 1000 до 1100
Номер класса $X$	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) $M$	4	6	18	36	22	10	4

(проверка:  $\sum M = 100$ )

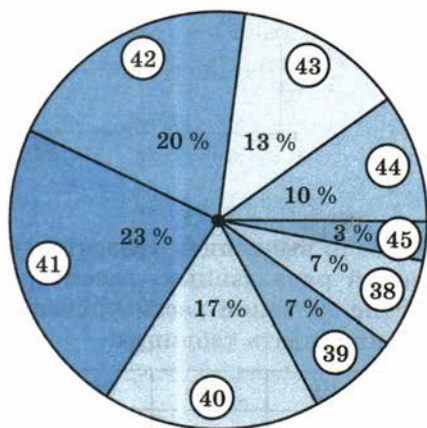


Рис. 143

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить с помощью полигона частот (рис. 144) или столбчатой диаграммы (рис. 145).

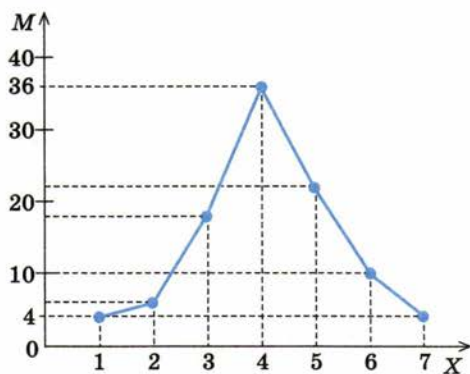


Рис. 144

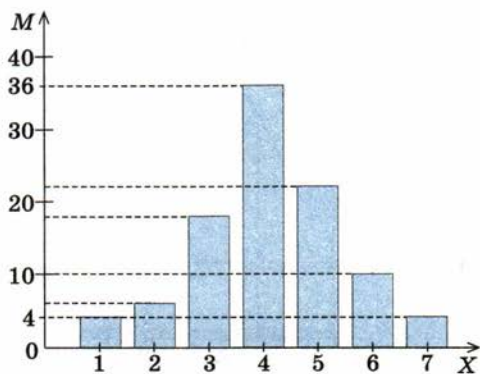


Рис. 145

**2. Числовые характеристики рядов данных. Размах, мода и медиана ряда данных.** Иногда выборку случайных величин или всю генеральную совокупность этих величин приходится характеризовать одним числом. На практике это необходимо, например, для быстрого сравнения двух или больше совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть после летних каникул провели опрос 10 девочек и 9 мальчиков одного класса о количестве книг, прочитанных ими за каникулы. Результаты были записаны в порядке опроса. Получили следующие ряды чисел:

для девочек: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5;

для мальчиков: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Как уже отмечалось, чтобы удобнее было анализировать информацию, в подобных случаях числовые данные ранжируют, располагая их в порядке возрастания (когда каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего). В результате ранжирования получили следующие ряды.

Для девочек:

$$3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12; \quad (1)$$

для мальчиков:

$$3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. \quad (2)$$

Тогда распределение по частотам  $M$  величин:  $X$  — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и  $Y$  — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, можно задать таблицами:

$X$	3	4	5	8	12
$M$	3	2	3	1	1

$$\sum M = n = 10$$

$Y$	3	4	5	6	7
$M$	2	4	1	1	1

$$\sum M = n = 9$$

Эти распределения можно также проиллюстрировать графически с помощью полигона частот (рис. 146, 147).

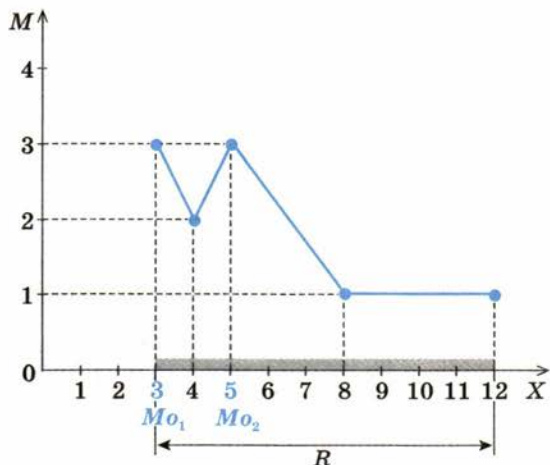


Рис. 146

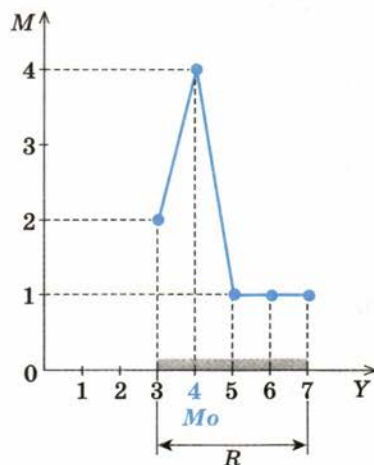


Рис. 147

Для сравнения рядов (1) и (2) используют различные характеристики. Приведем некоторые из них.

*Размах ряда чисел* (обозначается  $R$ ) называют разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел. Поскольку мы анализируем выборку некоторых величин, то

*размах выборки* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями величины в выборке.

Для ряда (1) размах  $R = 12 - 3 = 9$ , а для ряда (2) размах  $R = 7 - 3 = 4$ . На графике размах — это длина области определения полигона частот (рис. 146, 147).

Одной из статистических характеристик ряда данных является его *мода* (обозначается  $Mo$ , от латинского слова *modus* — мера, правило).

*Мода* — это значение элемента выборки, встречающееся чаще остальных.

Так, в ряду (1) две моды — числа 3 и 5:  $Mo_1 = 3$ ,  $Mo_2 = 5$ , а в ряду (2) одна мода — число 4:  $Mo = 4$ . На графике мода — это значение абсциссы точки, в которой достигается максимум полигона частот (см. рис. 146, 147). Отметим, что моды может и не быть, если все значения рассматриваемого признака встречаются одинаково часто.

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выяснить некоторый типовой показатель. Например, когда изучают данные о моделях мужских рубашек, проданных в определенный день в универсаме, то удобно использовать такой показатель, как мода, который характеризует модель,



няя одинаковые слагаемые в числителе на соответствующие произведения, получаем, что среднее арифметическое можно вычислять по формуле

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{n} \quad (4)$$

Последнюю формулу удобно использовать в тех случаях, когда в выборке распределение величины по частотам задано в виде таблицы. Напомним, что распределение по частотам  $M$  величин:  $X$  — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и  $Y$  — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, было задано такими таблицами:

$X$	3	4	5	8	12
$M$	3	2	3	1	1

$$\sum M = n = 10$$

$Y$	3	4	5	6	7
$M$	2	4	1	1	1

$$\sum M = n = 9$$

Тогда средние значения заданных выборок равны:

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5,2,$$

$$\bar{Y} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4,4.$$

Поскольку  $\bar{X} > \bar{Y}$ , то можно сказать, что за один и тот же промежуток времени девочки в классе читают книг больше, чем мальчики.

Обратим внимание, что в пособиях по статистике моду, медиану и среднее значение выборки объединяют одним термином — *меры центральной тенденции*, подчеркивая тем самым возможность охарактеризовать ряд выборки одним числом.

Не для каждого ряда данных имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется ряд

$$5, 5, 8, 110 \quad (5)$$

годовых доходов четырех людей (в тыс. у. е.), то очевидно, что ни мода (5), ни медиана (6,5), ни среднее значение (32) не могут выступать в роли единой характеристики всех значений ряда данных. Это объясняется тем, что размах ряда (105) является соизмеримым с наибольшим из его значений.

В данном случае можно искать центральные тенденции, например, для части ряда (5):

$$5, 5, 8,$$

условно назвав его выборкой годового дохода низкооплачиваемой части населения.

Если в выборке среднее значение существенно отличается от моды, то его нецелесообразно выбирать в качестве типичной характеристики рассматриваемой совокупности данных (чем больше значение моды отличается от среднего значения, тем «более несимметричным» является полигон частот совокупности).

### Вопросы для контроля

- Объясните, что называется полигоном частот рассматриваемого признака  $X$ . Приведите примеры построения полигона частот и полигона относительных частот.
- На примере ряда данных 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 объясните, что такое размах, мода, медиана и среднее значение ряда и дайте соответствующие определения.

### Упражнения

- 1°. На основании данных таблицы представьте в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение некоторого признака  $X$ .

1) 

$X$	1	2	3	4
$W$	0,1	0,3	0,4	0,2

2) 

$X$	1	2	3	4	5
$W$	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. Постройте полигон частот и полигон относительных частот некоторого признака  $X$ , распределение которого представлено в таблице:

1) 

$X$	1	3	5	7	9
$M$	3	0	5	7	5

2) 

$X$	11	12	13	14	15	16
$M$	6	5	2	3	1	3

- 3°. На рисунке 148 построены полигоны, иллюстрирующие распределение частоты продажи магазином в течение недели компьютеров (черная линия) и телевизоров (синяя линия). Укажите два дня, непосредственно следующие друг за другом, когда:

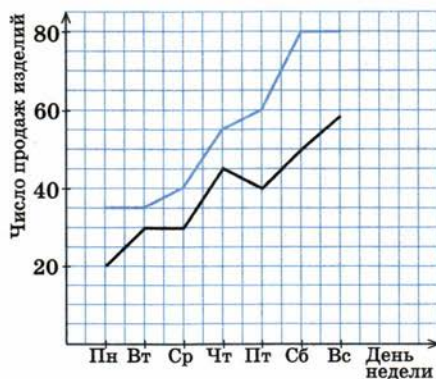


Рис. 148

- 1) число проданных телевизоров выросло больше, чем число проданных компьютеров;

- 2) число проданных телевизоров увеличилось, а число проданных компьютеров уменьшилось;  
 3) число проданных компьютеров выросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

4. Измерили рост 50 старшеклассников и результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав эти данные по классам 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, представьте частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью:

1) таблицы; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы.

5. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение заданного ряда данных:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5;                      2) -3, -2, -2, -1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.

Постройте полигон частот значений величины  $X$ . Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданного ряда данных.

6. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение выборки, заданной таблицей распределения значений величины  $X$  по частотам:

1) 

$X$	2	3	4	5
$M$	3	4	1	3

2) 

$X$	-1	3	4	5	7
$M$	2	3	4	4	1

Постройте полигон частот значений величины  $X$ . Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданной совокупности данных.

7. Девочки 11 класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты (в см):

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Найдите моду, медиану и среднее значение этой совокупности данных. Какое из этих значений лучше всего характеризует спортивную подготовку девочек класса?

## § 19. СОЕДИНЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ. РЕШЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

### 19.1. Соединения с повторениями

Таблица 35

Размещения с повторениями	
<i>Размещением с повторениями из <math>n</math> элементов по <math>k</math> называется конечная последовательность, состоящая из <math>k</math> элементов <math>(a_1, a_2, \dots, a_k)</math> некоторого <math>n</math>-элементного множества <math>M</math></i>	
Формула числа размещений с повторениями	Пример
$\tilde{A}_n^k = n^k$	Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться, равно $\tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$
Перестановки с повторениями	
<i>Перестановкой с повторениями состава <math>n = k_1 + k_2 + \dots + k_m</math> из элементов <math>a_1, a_2, \dots, a_m</math> некоторого множества <math>M</math> называется любая конечная последовательность, состоящая из <math>n</math> элементов, в которую элемент <math>a_1</math> входит <math>k_1</math> раз, элемент <math>a_2</math> входит <math>k_2</math> раз, ..., элемент <math>a_m</math> входит <math>k_m</math> раз</i>	
Формула числа перестановок с повторениями	Пример
$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!},$ где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из трех двоек, двух семерок и одной пятерки, равно $\tilde{P}_6 = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$ (учтено, что $3 + 2 + 1 = 6$ ).
Сочетания с повторениями	
<i>Если задано <math>n</math>-элементное множество, то сочетаниями с повторениями из <math>n</math> элементов по <math>k</math> называются наборы, в каждый из которых входят <math>k</math> заданных элементов (один и тот же элемент может входить в набор несколько раз)</i>	



Формула числа сочетаний с повторениями	Пример																		
$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	Если в продаже есть цветы четырех сортов, то количество разных букетов, составленных из 7 цветов, равно $\tilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$																		
Схема поиска решения простейших комбинаторных задач																			
Выбор правила																			
Правило суммы	Правило произведения																		
Если элемент $A$ можно выбрать $m$ способами, а элемент $B$ — $n$ способами, то $A$ или $B$ можно выбрать $m + n$ способами.	Если элемент $A$ можно выбрать $m$ способами, а после этого элемент $B$ — $n$ способами, то $A$ и $B$ можно выбрать $m \cdot n$ способами.																		
Выбор формулы																			
Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?																			
Да																			
Нет																			
Все ли элементы входят в соединение?																			
Да																			
Нет																			
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Перестановки</th> <th colspan="2">Размещения</th> <th colspan="2">Сочетания</th> </tr> <tr> <th>без повторов</th> <th>с повторениями</th> <th>без повторов</th> <th>с повторениями</th> <th>без повторов</th> <th>с повторениями</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>P_n = n!</math></td> <td><math>\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}</math>, где <math>k_1 + k_2 + \dots + k_m = n</math></td> <td><math>A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}</math></td> <td><math>\tilde{A}_n^k = n^k</math></td> <td><math>C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}</math></td> <td><math>\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k</math></td> </tr> </tbody> </table>		Перестановки		Размещения		Сочетания		без повторов	с повторениями	без повторов	с повторениями	без повторов	с повторениями	$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ , где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Перестановки		Размещения		Сочетания															
без повторов	с повторениями	без повторов	с повторениями	без повторов	с повторениями														
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ , где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$														

### 19.1.1. Размещения с повторениями

#### Объяснение и обоснование

Для введения понятия размещения с повторениями напомним понятие последовательности, которым вы пользовались в курсе алгебры 9 класса.

Например, рассмотрим последовательность  $(a_n)$  двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5:

$$15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95.$$

У этой последовательности

$$a_1 = 15, a_2 = 25, a_3 = 35, a_4 = 45, a_5 = 55, a_6 = 65, a_7 = 75, a_8 = 85, a_9 = 95.$$

Можно сказать, что каждому натуральному числу от 1 до 9 ставится в соответствие единственное двузначное натуральное число, оканчивающееся цифрой 5. Тем самым задается функция, областью определения которой служит множество {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, а областью значений — множество {15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95}.

Тогда можно дать следующее определение последовательности.

**Функция, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество первых  $n$  натуральных чисел, называется *последовательностью*.**

Если последовательность определена на множестве всех натуральных чисел, то ее называют *бесконечной последовательностью*, а если последовательность определена на множестве первых  $n$  натуральных чисел, то ее называют *конечной*.

*Размещением с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  называется конечная последовательность, состоящая из  $k$  элементов ( $a_1, a_2, \dots, a_k$ ) некоторого  $n$ -элементного множества  $M$ .*

Например, из трех цифр множества {1; 5; 7} можно составить такие размещения из двух элементов с повторениями:

(1; 1), (1; 5), (1; 7), (5; 5), (5; 7), (7; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).

Количество размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементов с повторениями обозначается  $\tilde{A}_n^k$  (волнистая линия указывает на возможность повторения элементов). Как видим,  $\tilde{A}_3^2 = 9$ .

- Выясним, сколько всего можно составить размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ . Составление размещения представим себе как последовательное заполнение  $k$  мест, которые будем изображать в виде клеточек (рис. 149). На первое место мы можем выбрать один из  $n$  элементов заданного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать  $n$  способами). Далее, если элементы можно повторять, то на каждое следующее место мы снова можем выбрать один из  $n$  элементов заданного множества.

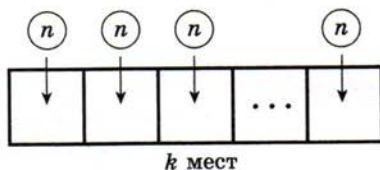


Рис. 149

Поскольку нам необходимо выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на  $k$ -е, то используем правило произведения и получим **формулу для вычисления числа размещений из  $n$  элементов по  $k$  с повторениями:**

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ множителей}} = n^k \quad \circ$$

Например,  $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$  (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

Напомним, что при решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления.

Для этого можно выяснить:

- Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?
- Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из  $n$  заданных элементов в соединении используется только  $k$  элементов, то по определению — это размещение из  $n$  элементов по  $k$ . После определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями.

### Примеры решения задач

**Задача 1** Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться.

#### Решение

► Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, равно числу размещений из 7 элементов по 3. Тогда получаем количество трехзначных чисел для задания 1:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210,$$

для задания 2\*:  $\tilde{A}_7^3 = 7^3 = 343$ . ◀

#### Комментарий

При выборе формулы принимаем во внимание, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования элементов учитывается и не все элементы выбираются (только 3 цифры из заданных семи). Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений для задания 1 и с повторениями для задания 2).

**Задача 2** Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться.

#### Решение

► 1) Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть  $A_7^3$ .

Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых

#### Комментарий

Для решения задачи можно или использовать соответствующие формулы (см. решение), или выполнить непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения (см. задание 2). В этом случае, чтобы сделать рассуждения наглядными, удобно изобразить соответствующие разряды

первым элементом является цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть  $A_6^2$ . Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180. \triangleleft$$

► 2) На первое место в трехзначном числе мы можем поставить любую цифру, кроме 0, — всего 6 возможностей. Так как цифры в числе могут повторяться, то на второе место можно поставить любую из 7 заданных цифр — имеем 7 возможностей. На третье место снова можно поставить любую из 7 заданных цифр — также 7 возможностей. Поскольку мы должны заполнить и первое место, и второе, и третье, то по правилу произведения получаем, что искомое количество трехзначных чисел равно  $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ . ◁

в трехзначном числе в виде клеточек, например так:

1)	6 возмож- ностей	6 возмож- ностей	5 возмож- ностей
2)	6 возмож- ностей	7 возмож- ностей	7 возмож- ностей

Также следует учесть, что число, составленное из трех цифр, первая из которых — цифра 0, не считается трехзначным.

### Вопросы для контроля

- Объясните, что называется размещением из  $n$  элементов по  $k$ : а) без повторений, б) с повторениями. Приведите примеры.
- Запишите формулу для вычисления числа размещений из  $n$  элементов по  $k$ : а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
- Обоснуйте формулу для вычисления числа размещений из  $n$  элементов по  $k$  с повторениями.

### Упражнения

- Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 9, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться?
- Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться?
- Сколько существует семизначных телефонных номеров, у которых первая цифра отлична от нуля?
- Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы полученные числа были: 1) четными; 2) кратными 5?

## 19.1.2. Перестановки с повторениями

## Объяснение и обоснование

Если мы будем переставлять цифры в числе 2226 так, чтобы получить разные четырехзначные числа, то получим *перестановки с повторениями*, составленные из трех двоек и одной шестерки: (2, 2, 2, 6), (2, 2, 6, 2), (2, 6, 2, 2), (6, 2, 2, 2) — всего 4 перестановки (соответственно получаем четыре четырехзначных числа: 2226, 2262, 2622, 6222).

*Перестановкой с повторениями* состава  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$  из элементов  $a_1, a_2, \dots, a_m$  некоторого множества  $M$  называется любая конечная последовательность, состоящая из  $n$  элементов, в которую элемент  $a_1$  входит  $k_1$  раз,  $a_2$  входит  $k_2$  раз, ...,  $a_m$  входит  $k_m$  раз.

Количество перестановок с повторениями из  $n$  элементов обозначают  $\tilde{P}_n$ . Иногда, чтобы подчеркнуть, что в заданной перестановке из  $n$  элементов  $k_1$  раз повторяется первый элемент  $a_1$ ,  $k_2$  раз повторяется второй элемент  $a_2$ , ...,  $k_m$  раз повторяется  $m$ -й элемент  $a_m$  (сумма  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ), используется также обозначение  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . В частности, в рассмотренном примере можно записать:  $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = 4$ .

- Выясним, сколько всего можно составить перестановок с повторениями из  $n$  элементов, если в каждой из перестановок  $k_1$  раз повторяется элемент  $a_1$ ,  $k_2$  раз повторяется элемент  $a_2$ , ...,  $k_m$  раз повторяется элемент  $a_m$  (где  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ). Составление перестановки представим себе как последовательное заполнение  $n$  мест, которые мы будем изображать в виде клеточек (на рисунке 150 изображена одна из таких перестановок). Сначала предположим, что все  $n$  элементов, из которых составляется перестановка, разные. Тогда получаем перестановки без повторений, их количество  $P_n = n!$ . Далее учтем, что при перестановке местами элементов  $a_1$ , занимающих какие-то  $k_1$  мест (не обязательно подряд), рассмотренная перестановка не изменится (поскольку мы переставляем одинаковые элементы). Элементы, стоящие на  $k_1$  местах, можно переставить  $k_1!$  способами. Подсчитывая общее количество перестановок из  $n$  разных элементов, мы пользовались правилом произведения (см. с. 234). Тогда в полученном произведении  $n!$ , в случае повторения  $k_1$  раз элемента  $a_1$ , лишним является произведение  $k_1!$ . Чтобы избавиться от этого лишнего множителя, достаточно число  $n!$  разделить на число  $k_1!$ . Аналогично, если элемент  $a_2$  повторяется  $k_2$  раз, то в полученном произведении  $n!$  лишним является произведение  $k_2!$ . Чтобы избавиться от этого множителя, достаточно число  $n!$  разделить на число  $k_2!$ . Повторяя эти рассуждения  $m$  раз, получаем, что количество перестановок с повторениями из  $n$  элементов, в каждой из которых  $k_1$  раз повторяется элемент  $a_1$ ,  $k_2$  раз повторяется элемент  $a_2$ , ...,  $k_m$  раз повторяется элемент  $a_m$  (где  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ), равно

$$\tilde{P}_n = P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}, \quad \circ$$

Например, количество перестановок с повторениями, составленных из трех двоек и одной шестерки, равно  $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$  (что совпадает со значением, полученным выше с помощью непосредственного вычисления количества таких перестановок).

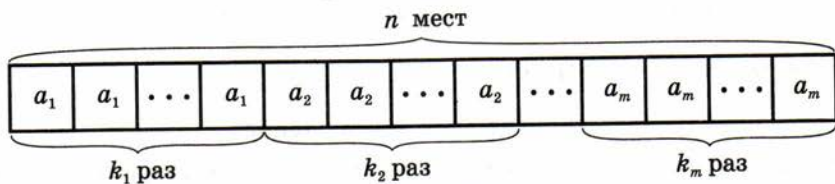


Рис. 150

### Примеры решения задач

**Задача** Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно получить при перестановке цифр 1, 1, 4, 4.

**Решение**

► Искомое количество четырехзначных чисел равно

$$\tilde{P}_4 = P(2; 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6. \quad \triangleleft$$

**Комментарий**

Поскольку порядок элементов учитывается и для получения четырехзначного числа необходимо использовать все элементы, то искомое соединение — это перестановки с повторениями из 4 элементов. Их количество  $\tilde{P}_4$  вычисляется по приведенной выше формуле, при этом учитывается состав этих перестановок:  $k_1 = 2$  (2 цифры 1),  $k_2 = 2$  (2 цифры 4),  $n = k_1 + k_2 = 2 + 2 = 4$ .

### Вопросы для контроля

- Объясните, что называется перестановкой из  $n$  элементов: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры.
- Запишите формулу для вычисления числа перестановок из  $n$  элементов: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
- Обоснуйте формулу для вычисления числа перестановок из  $n$  элементов с повторениями.

### Упражнения

- Сколько различных пятизначных чисел можно составить при перестановке цифр 2, 2, 3, 3, 5?

2. Сколько шестизначных чисел можно составить:
  - 1) из двух цифр 5 и четырех цифр 7; 2) из трех цифр 5 и трех цифр 7?
3. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить при перестановке цифр 0, 0, 6, 6.
4. Сколькими способами можно разложить 28 разных предметов в 4 разных ящика так, чтобы в каждом ящике было 7 предметов?

### 19.1.3. Сочетания с повторениями

#### Объяснение и обоснование

Пусть задано  $n$ -элементное множество (то есть множество, содержащее  $n$  разных элементов). Будем составлять наборы, содержащие  $k$  элементов этого множества (один и тот же элемент может входить в набор несколько раз). Два таких набора будем считать одинаковыми тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый состав (не учитывая порядок следования элементов в наборе<sup>1</sup>). Такие наборы назовем *сочетаниями с повторениями из  $n$  элементов по  $k$* . Таким образом,

*если задано  $n$ -элементное множество, то сочетаниями с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  называются наборы, в каждый из которых входит  $k$  заданных элементов (один и тот же элемент может входить в набор несколько раз).*

Например, из двух букв  $\{a; b\}$  можно составить следующие сочетания с повторениями по четыре элемента:  $aaaa$ ,  $aaab$ ,  $aabb$ ,  $abbb$ ,  $bbbb$ . (Отметим, что в соответствии с принятой выше договоренностью, например, наборы  $aaab$  и  $abaa$  одинаковы, поскольку они имеют одинаковый состав — три буквы  $a$  и одну букву  $b$ .)

Количество сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  обозначим  $\tilde{C}_n^k$ .

Как видим,  $\tilde{C}_2^4 = 5$ .

- Выясним, сколько всего можно составить сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ . Составление комбинации представим себе так. Пусть имеется неограниченное количество предметов  $n$  различных видов. Нужно выяснить, сколько можно образовать наборов из  $k$  элементов, если учитывать только количество элементов каждого вида. Соответствующий выбор можно представить себе наглядно так. Возьмем длинный ящик и разделим его на  $n$  отсеков, поставив  $n - 1$  перегородку. Потом возьмем  $k$  одинаковых шаров и разместим их в полученные отсеки. В первый отсек (слева от первой перегородки) положим столько шаров, сколько мы выбираем элементов первого вида, во второй — столько шаров, сколько мы выбираем элементов второго вида, ..., справа от последней перегородки положим столько шаров, сколько мы выбираем элементов  $n$ -го

<sup>1</sup> То есть наборы, которые состоят из одних и тех же элементов, взятых соответственно одно и то же число раз, считают одинаковыми.

вида. Если две перегородки находятся рядом и не разделены шарами или перегородка стоит с краю, слева или справа от всех шаров, то количество шаров между ними равно нулю и соответствующего вида элементы не включаются в соединение (один из возможных вариантов размещения части шаров и перегородок изображен на рис. 151).



Рис. 151

У нас расставлены в ряд  $n + k - 1$  объектов:  $k$  из них шары, а  $n - 1$  — перегородки. Тогда соответствующий набор будет определяться тем, на каких местах такие объекты стоят. Из  $(n + k - 1)$  мест можно выбрать  $k$  мест для шаров  $C_{n+k-1}^k$  способами. Следовательно<sup>1</sup>,

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad \circ$$

Например,

$$\tilde{C}_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5$$

(что совпадает со значением, полученным выше с помощью непосредственного подсчета количества таких сочетаний с повторениями).

### Примеры решения задач

#### Задача

В почтовом отделении продаются открытки 5 видов. Найдите количество способов покупки 7 открыток.

#### Решение

► Искомое число способов равно числу сочетаний с повторениями из 5 элементов по 7, то есть

$$\tilde{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$



#### Комментарий

При выборе открыток порядок их следования не учитывается, значит, соответствующие соединения — сочетания. Условие задачи не запрещает покупать одинаковые открытки, следовательно, используем формулу для числа сочетаний с повторениями:  $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ .

<sup>1</sup> Также общее число наборов можно записать, учитывая, что из  $(n + k - 1)$  мест можно выбрать  $n - 1$  место для перегородок  $C_{n+k-1}^{n-1}$  способами. Но  $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{n+k-1-(n-1)} = C_{n+k-1}^k$ .



## Вопросы для контроля

- Объясните, что называется сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$ :  
а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры.
- Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ :  
а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
- Обоснуйте формулу для вычисления числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  с повторениями.

## Упражнения

- Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают любые три из следующих значений: 4, 5, 6, 7?
- В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в этом отделении: а) 12 открыток; б) 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?
- Сколько можно построить разных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?

## 19.2. Решение более сложных комбинаторных задач

Напомним, что в случае, когда нам приходится выбирать набор, в который входит и первый, и второй, и третий, и т. д. элементы, способы выбора каждого элемента надо перемножать, а если приходится выбирать или первый элемент, или второй, или третий и т. д. элемент, способы выбора каждого элемента надо складывать.

При выборе формулы для подсчета количества соответствующих соединений следует иметь в виду, что в определении только одного вида соединений — сочетаний не учитывается порядок следования элементов. А те соединения, где учитывается порядок следования элементов (размещения и перестановки), отличаются тем, что в перестановки входят все заданные элементы, а в размещения — не все (конечно, за исключением того случая, когда мы рассматриваем перестановки как частный случай размещения).

Кроме того, чтобы выбрать соответствующую формулу для соединений (без повторений или с повторениями), необходимо дополнительно выяснить, могут ли элементы в соединении повторяться. Приведем примеры таких рассуждений (простейшие примеры были приведены также в § 17).

**Задача 1** Собрание из 60 членов выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии по подготовке проекта постановления собрания. Сколькими способами это можно сделать?

## Решение

- 1) Поскольку надо выбрать и председателя, и секретаря, и членов редакционной комиссии, то будем использовать правило произведения.

2) Сначала выберем председателя и секретаря. Задаем себе вопрос: «Учитывается ли порядок следования элементов?» Ответ: «Да» (потому что первый выбранный будет председателем, а второй — секретарем собрания). Задаем себе второй вопрос: «Все ли элементы входят в соединение?» Ответ: «Нет» (потому что выбираем двух из 60 человек). Следовательно, соответствующее соединение будет размещением (без повторений) из 60 элементов по 2, и число таких размещений равно  $A_{60}^2$ .

Аналогично выбираем трех членов редакционной комиссии (из оставшихся 58 членов). Снова задаем себе вопрос: «Учитывается ли порядок элементов?» Ответ: «Нет» (потому что независимо от того, в каком порядке будут выбраны члены редакционной комиссии, они все будут выполнять одну и ту же работу). Значит, соответствующее соединение будет сочетанием (без повторений) из 58 элементов по 3, и число таких сочетаний равно  $C_{58}^3$ .

Тогда выбор и председателя, и секретаря, и трех членов редакционной комиссии выполняется  $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$  способами, то есть

$$A_{60}^2 \cdot C_{58}^3 = \frac{60!}{(60-2)!} \cdot \frac{58!}{3! \cdot (58-3)!} = 10 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 = 109\,230\,240. \triangleleft$$

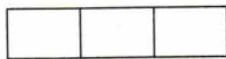
**Замечание.** Как уже отмечалось, ответ к этой задаче можно не записывать в виде числа, а оставить в виде  $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$ .

Некоторые комбинаторные задачи связаны с цифровой записью числа. Анализируя условие и требование таких задач, часто удобно изображать позиции, которые может занимать каждая цифра, в виде пустых клеточек (рис. 152, а–в).

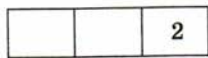
**Задача 2** Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5:  
1) если цифры в числе не повторяются;  
2) если цифры повторяются?

**Решение**

► Чтобы число было четным, последняя его цифра должна быть четной, то есть из заданных цифр это 2 (рис. 152, б) или 4 (рис. 152, в).



а



б



в

Рис. 152

Поскольку условию задачи удовлетворяет или первый вариант (последняя цифра 2), или второй (последняя цифра 4), то применим правило суммы.

Вычислим количество четных трехзначных чисел в каждом варианте. Поскольку в записи чисел порядок цифр важен и у нас только два свободных места, а на них «претендуют» 4 цифры (или 5 — если цифры могут повторяться), следовательно, имеем дело с размещениями: 1) из четы-

рех элементов по два (без повторений) —  $A_4^2$ ; 2) из пяти элементов по два (с повторениями) —  $\tilde{A}_5^2$ .

Количество возможных трехзначных чисел, оканчивающихся на 2 и на 4 (см. рис. 152, б и в), одинаково, поэтому по правилу суммы общее количество четных трехзначных чисел будет следующим:

$$1) 2A_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 24; \quad 2) 2\tilde{A}_5^2 = 2 \cdot 5^2 = 50. \triangleleft$$

### Задача 3

Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами эти группы пассажиров могут выходить из лифта на указанных этажах?

#### Решение

► Так как по условию 9 пассажиров выходят группами по 2, 3 и 4 человека, то лифт должен сделать 3 остановки, чтобы вышли все пассажиры ( $2 + 3 + 4 = 9$ ). Отдельно подсчитаем количество способов разделения пассажиров на три группы (по 2, 3 и 4 человека) и отдельно — количество способов выбора трех остановок лифта. Для решения задачи необходимо выбрать и группы пассажиров, и этажи для их выхода, следовательно, будем применять правило произведения.

Из 9 пассажиров можно выбрать группу из 2 человек (не учитывая порядок их выбора, поскольку они выходят на одном этаже)  $C_9^2$  способами. Из семи оставшихся пассажиров можно выбрать группу из 3 человек  $C_7^3$  способами. После этого останется 1 группа из 4 членов (формально ее можно выбрать  $C_4^4 = 1$  способом). Следовательно, группы пассажиров можно составить  $C_9^2 C_7^3 C_4^4$  способами.

Три остановки из 10 этажей можно выбрать  $A_{10}^3$  способами (порядок учитывается, поскольку группы могут выходить в разном порядке). Тогда искомое число равно  $A_{10}^3 C_9^2 C_7^3 C_4^4 = \frac{10!}{7!} \cdot \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 = \frac{10!}{4!} \triangleleft$

Обратим внимание, что для решения многих комбинаторных задач главным является не столько знание комбинаторных формул, сколько умение построить целесообразную математическую модель заданной ситуации.

### Задача 4

В некотором сказочном королевстве не было двух людей с одинаковым набором зубов. Каким может быть максимальное количество жителей этого королевства, если у человека 32 зуба?

#### Решение

► Пронумеруем все зубы, которые должны быть у человека, числами от 1 до 32. Изобразим набор зубов у каждого жителя королевства в виде 32 клеточек (рис. 153) и в каждую клеточку поставим цифру 1, если на этом

месте у рассматриваемого жителя зуб есть, и цифру 0, если на этом месте у него зуба нет (на рисунке изображен один из возможных наборов зубов).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Рис. 153

Тогда каждый житель королевства будет закодирован некоторой упорядоченной последовательностью из 32 нулей и единиц. По условию, в королевстве нет людей с одинаковыми наборами зубов, поэтому максимальное количество людей в королевстве равно количеству таких наборов. Эти наборы являются размещениями с повторениями из двух элементов (0 и 1) по 32. Следовательно, их количество равно  $\tilde{A}_2^{32} = 2^{32}$ . Таким образом, максимальное количество людей в сказочном королевстве может равняться  $2^{32}$  (это приблизительно  $4 \cdot 10^9$ ). ◁

#### Упражнения

- Сколько существует шестизначных чисел, которые делятся на 5, если:
  - цифры в числе не повторяются;
  - цифры в числе могут повторяться?
- На одной из параллельных прямых даны 100 точек, а на другой — 200. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
- Сколько существует семизначных чисел, в которых каждые две соседние цифры разной четности?
- Сколькими способами можно выбрать 4 карты из колоды в 36 карт, чтобы выбранные карты были: 1) одной масти; 2) двух мастей; 3) трех мастей; 4) четырех мастей?
- Сколько трехзначных чисел, кратных 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:
  - цифры в числе не повторяются;
  - цифры в числе могут повторяться?
- Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
- Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры (каждый на своей). Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на станции, с которой начинается движение?
- В шахматном кружке 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревнованиях надо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна войти хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров в 6 разных ящиков, если:
- 1) ни один ящик не должен быть пустым;
  - 2) некоторые ящики могут быть пустыми?
10. Сколькими способами натуральное число  $n$  можно представить в виде суммы  $k$  натуральных слагаемых (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными)?

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 3

1. Сколько существует трехзначных чисел, не содержащих в десятичной записи цифру 0?
2. Сколько существует четных четырехзначных чисел, не содержащих в десятичной записи цифру 0?
3. Сколько четырехзначных чисел, кратных 5, все цифры которых разные, можно записать, используя только цифры 5, 6, 7, 8 и 9?
4. Сколько четных четырехзначных чисел, все цифры которых разные, можно записать, используя только цифры 2, 3, 5, 7 и 8?
5. В классе, в котором 15 учеников, выбирают старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
6. В классе, в котором 18 учеников, выбирают трех делегатов на школьную конференцию. Сколькими способами это можно сделать?
7. Сколько трехзначных чисел, кратных трем, можно записать, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6?
8. Сколькими способами можно 4 черных и 8 белых шаров расположить в ряд так, чтобы два черных шара не оказались рядом?
9. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей.
10. Ученик имеет 6 разных учебников, по одному на каждый предмет. Сколькими способами их можно расположить на полке так, чтобы учебники по физике и химии не стояли рядом?
11. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
12. В скольких точках пересекаются 11 прямых, если среди них только две параллельны, а никакие три из них не пересекаются в одной точке?
13. В скольких точках пересекаются 10 непараллельных прямых, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?
14. На шахматном турнире сыграно 55 партий. При этом каждый участник сыграл с каждым из остальных участников одну партию. Сколько шахматистов принимали участие в турнире?
15. В шахматном турнире принимали участие 10 игроков. При этом каждый игрок сыграл с каждым из остальных игроков одну партию. Сколько всего было сыграно партий в турнире?

Решите уравнение (16–18).

16. 1)  $C_{x-3}^2 = 21$ ; 2)  $C_{x+4}^2 = x^2 - 1$ ;  
 3)  $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$ ; 4)  $C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10$ .
17. 1)  $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$ ; 2)  $\frac{P_{x-n} A_{x+1}^{n+1}}{P_{x-1}} = 90$ ;  
 3)  $\frac{P_{x-4} A_x^4}{P_{x-2}} = 42$ ; 4)  $\frac{P_{x-n} A_{x+2}^{n+2}}{P_x} = 110$ .
18. 1)  $C_{x+1}^5 = \frac{3}{8} \cdot A_x^3$ ; 2)  $C_{4x+9}^{4(x+1)} = 5A_{4x+7}^3$ ;  
 3)  $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$ ; 4)  $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15} \cdot A_{x+1}^3$ .
19. В стандартном виде многочлена  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  найдите слагаемое, не содержащее переменную  $x$ .
20. В стандартном виде многочлена  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  найдите коэффициент при  $x$ .
21. В стандартном виде многочлена  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$  найдите коэффициент при  $x^2$ .
22. В стандартном виде многочлена  $\left(\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{a}\right)^5$  найдите слагаемое, не содержащее переменную  $a$ .
23. Найдите средний член разложения  $\left(a\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$ , если известно, что коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена как  $14 : 3$ .
24. Найдите член разложения бинома  $\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$ , содержащий после упрощений  $z^5$ , если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.
25. Определите  $x$  при условии, что пятый член разложения бинома  $(\sqrt{x} + x^{-1})^6$  равен  $\frac{5}{9}$ .
26. Определите  $x$  при условии, что разность между пятым и третьим членами разложения бинома  $(x + \sqrt{5})^6$  равна 300.
27. Определите  $x$  при условии, что третий член разложения бинома  $(x + x^{\lg x})^5$  равен 1 000 000.
28. Найдите рациональные члены разложения бинома:
- 1)  $(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^5$ ; 2)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{10}$ ; 3)  $(1 + \sqrt[4]{2})^{15}$ ; 4)  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^8$ .

29. Олег уже три месяца принимает участие в еженедельной лотерее, но ни одного раза не выиграл. Однако он продолжает играть, утверждая: «Лотерея — случайная игра, иногда выигрываешь, иногда проигрываешь. Я уже долго не выигрывал, поэтому уверен, что обязательно выиграю в одном из ближайших розыгрышей». Согласны ли вы с соображениями Олега?
30. Учащиеся провели 100 экспериментов по подбрасыванию монеты без дефектов. В результате «герб» выпал 46 раз, «число» — 54 раза. Учащиеся поспорили, что с большей вероятностью появится при следующем подбрасывании: «герб» или «число»? «Более вероятно появление «герба», — сказал Егор, — ведь до этого эксперимента он выпадал реже, чем «число», выходит, теперь должен выпадать чаще». — «Вероятнее появление «числа», — сказал Виктор, — раз оно выпадало чаще, то и будет выпадать чаще». — «Появление «герба» и появление «числа» равновероятны, — сказала Наташа, — потому что результат каждого следующего случайного эксперимента не зависит от результатов предыдущих экспериментов». С кем бы вы согласились и почему?
31. За три года (2003–2005) на реке было два наводнения, последнее из которых произошло в 2005 году. С каким вариантом ответа на вопрос «Когда будет следующее наводнение?» вы согласны и почему?
- а) В 2006 году; б) в 2007 году; в) наводнений не будет несколько лет, потому что в последнее время их уже было слишком много; г) не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.
32. Во многих книгах встречается известный анекдот:  
— Доктор, — спрашивает пациент, — есть ли у меня надежда на выздоровление?  
— Безусловно, — отвечает врач. — Статистика говорит, что один пациент из ста выздоравливает при этой болезни.  
— Но почему же именно я должен выздороветь?  
— Потому что именно вы и есть мой сотый больной!  
Верно ли рассуждает врач и каковы, по вашему мнению, шансы больного на выздоровление?
33. В лотерее принимает участие более 10 тысяч человек. Известно, что на каждые 100 билетов приходится один выигрышный. Сергей купил 100 билетов и уверен, что среди них наверное будет хотя бы один выигрышный. Согласны ли вы с его предположением?  
Какие из следующих событий в этой ситуации являются возможными? достоверными? невозможными?  
Среди купленных билетов:  
а) нет ни одного выигрышного;  
б) есть только один выигрышный;  
в) есть три выигрышных;  
г) есть 53 выигрышных.
34. В ящике есть 14 красных и 6 черных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар будет красным?

35. Из слова «математика» наугад выбирают одну букву. Какова вероятность того, что выберут букву «а»?
36. Бросают три игральных кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших чисел будет четным числом.
37. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших чисел будет четным числом.
38. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и набрал их наугад, помня только то, что эти цифры четные и разные. Найдите вероятность того, что номер телефона набран правильно.
39. В ящике 6 белых, 1 красный и 3 черных шара. Какова вероятность того, что наугад вынутые два шара будут разного цвета?
40. Вероятность того, что Аленка решит задачу, равна 0,8; а вероятность того, что Остап решит задачу, — 0,7. Найдите вероятность того, что задачу не решит ни один из них.
41. Два стрелка стреляют в одну мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком — 0,6; а вторым — 0,9. Найдите вероятность того, что в мишень попадет только один из них.
42. Ученик написал четыре поздравительные открытки и наугад вложил их в четыре подписанных конверта. Найдите вероятность того, что только двое из адресатов получают адресованные именно им поздравления.
43. Ученик написал четыре поздравительные открытки и наугад вложил их в четыре подписанных конверта. Найдите вероятность того, что ни один адресат не получит адресованное ему поздравление.
44. Для класса, в котором учатся 16 учащихся, выделены путевки для отдыха: 6 — в Сочи, 6 — в Анапу и 4 — в Карелию. Найдите вероятность того, что двое друзей будут отдыхать вместе.

## СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Элементарные задачи, которые позднее были отнесены к стохастике, то есть к комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике, ставились и решались еще во времена Древних Египта, Греции и Рима. Этот период так называемой предыстории теории вероятностей заканчивается в XVI в. работами итальянских математиков Д. Кардано (1501–1576) «Книга о игре в кости», Н. Тарталья (1499–1557) «Общий трактат о числе и мере», Г. Галилея (1564–1642) «О выпадении очков при игре в кости» и др. В этих работах уже фигурирует понятие вероятности, используется теорема о вероятности произведения независимых событий, высказываются некоторые соображения относительно так называемого закона больших чисел.

В середине XVII в. вопросами теории вероятностей заинтересовались французские математики П. Ферма (1601–1665) и Б. Паскаль (1623–1662) и нидерландский математик Х. Гюйгенс (1629–1695). В своих работах они уже использовали теоремы сложения и умножения вероятностей,



понятия зависимых и независимых событий, математического ожидания. Х. Гюйгенс издал в 1657 г. первый трактат по теории вероятностей «О расчетах в азартных играх». Следующие шаги в развитии теории вероятностей и математической статистики связаны с именами голландского математика Я. де Витта (1625–1672) и английского математика Э. Галлея (1656–1742), которые занимались вопросами страхования и составили первые таблицы смертности соответственно в 1671 г. и 1693 г.

Одними из первых исследователей в теории вероятностей и математической статистики были швейцарские математики Я. Бернулли (1654–1705), Н. Бернулли (1687–1759), Д. Бернулли (1700–1782) и российский математик Л. Эйлер (1707–1783).

Я. Бернулли написал книгу «Искусство предположений» (изданную в 1713 году), где, в частности, приводит так называемое биномиальное распределение вероятностей и закон больших чисел.

Н. Бернулли своей работой «Опыт применения искусства предположений к правовым вопросам» (1711 г.) продолжил работу Я. Бернулли. Он применил вероятностные идеи и методы к оценке показаний свидетелей, подсчета рента, страхования жизни и товаров.

Д. Бернулли первым выдвинул идею применения бесконечно малых величин в задачах теории вероятностей. Главная его работа в теории вероятностей — «Опыт исследования применения исчисления бесконечно малых в искусстве предположений».

Л. Эйлер внес выдающийся вклад в применение теории вероятностей в демографии. Он фактически стал основоположником современной демографии.

Среди первых книг по теории вероятностей стоит отметить «Учение о случае», написанное в 1716 г. английским математиком французского происхождения А. де Муавром (1667–1754). В 1733 г. Муавр нашел функцию нормального распределения как приближение биномиального распределения.

Английским математиком Б. Байесом (1702–1761) написана работа «Опыт решения одной задачи учения о случае», изданная в 1763–1764 гг. В ней, в частности, приведен частный случай формулы, которая позднее была названа его именем. В 1777 г. французский математик Ж. де Бюффон (1707–1788) привел первый пример геометрической вероятности.

Значительный вклад в развитие теории вероятностей принадлежит французским математикам П. Лапласу (1749–1827) и С. Пуассону (1781–1840).

Лаплас издал в 1812 г. монументальное исследование «Аналитическая теория вероятностей», а в 1814 г. — популярную книгу «Опыт философии теории вероятностей». В своих работах он подробно рассмотрел азартные игры, геометрическую вероятность, теорему Бернулли и ее связь с нормальным распределением вероятностей, теорию наименьших квадратов и т. д. Следует подчеркнуть, что только после работ Лапласа стало возможным широкое применение научно обоснованных методов в теории вероятностей.

Больше того, много позднейших результатов, как будто открытых другими математиками, можно найти в работах Лапласа.

Главной работой Пуассона в области теории вероятностей является «Исследование вероятностей судебных приговоров в криминальных и гражданских делах», в которой содержится, в частности, и его теорема, связанная с законом распределения Пуассона.

Большую роль в распространении идей теории вероятностей и математической статистики в России сыграли выдающиеся российские математики В. Я. Буняковский (1804–1889) и М. В. Остроградский (1801–1862).

Как считал известный российский математик Б. В. Гнеденко (1911–1995), увлечение теорией вероятностей в первой четверти XIX в. привело к огромному количеству работ, связанных с применением этой теории к разным проблемам естественных наук и общественной жизни. Многие из этих применений были мало обоснованными и воспринимались математиками как «математические скандалы». Поэтому это увлечение сменилось глубоким разочарованием и полным скептицизмом относительно применений теории вероятностей к научному познанию мира. Дальнейшее развитие теории вероятностей потребовало уточнения основных ее положений. Необходимо было установить предмет теории вероятностей, область ее применений, изучить и усилить ее специфические методы исследований. Большую работу в этом направлении провел выдающийся российский математик П. Л. Чебышёв (1821–1894). П. Л. Чебышёв внес заметный вклад во многие разделы математики, в частности в теорию вероятностей, где он обобщил закон больших чисел, доказал так называемую центральную предельную теорему для суммы независимых случайных величин и получил много других результатов. Курс теории вероятностей, который он читал в Петербургском университете, отличается четкостью формулировок и обоснованностью доказательств утверждений.

По мнению выдающегося российского математика А. Н. Колмогорова (1903–1987), благодаря П. Л. Чебышёву была создана российская математическая школа, которая стала лучшей в мире во многих разделах математики, в частности в теории вероятностей.

Среди известнейших математиков, которые были учениками П. Л. Чебышёва, следует назвать А. А. Маркова (1856–1922), ставшего выдающимся математиком именно благодаря своим исследованиям в теории вероятностей.

Книга А. А. Маркова «Исчисление вероятностей», первое издание которой вышло в 1900 г., а четвертое — в 1924 г., в течение многих лет была лучшей из тех, по которым учились российские математики. В этой книге, в частности, раскрывается, в каком понимании *статистическая вероятность  $P^*(A)$  близка к вероятности  $P(A)$  при больших  $n$ : вероятность значительного отклонения  $P_n^*(A)$  от  $P(A)$  близка к нулю, но это не означает, что значительные отклонения невозможны при больших  $n$ .*

Огромные достижения в теории вероятностей почти не применялись в математической статистике в конце XIX в. Это, в частности, видно из

важных работ бельгийского математика А. Кетле (1796–1874) и английских математиков Ф. Гальтона (1822–1911) и К. Пирсона (1857–1936). Этот недостаток был устранен в начале XX в. Значительную роль в этом сыграли представители англо-американской школы У. Госсет (Стьюдент) (1876–1937), Э. Пирсон (1895–1980) и Э. Нейман (1894–1981), благодаря работам которых была создана теория статистической проверки гипотез.

В конце XIX в. французский математик Ж. Бертран (1822–1900) привел ряд парадоксов, связанных с теорией вероятностей, а выдающийся французский математик А. Пуанкаре (1854–1912) обобщил такие парадоксы, которые подчеркивали нечеткость и неточность некоторых определений и понятий теории вероятностей. Из этого следовала необходимость соответствующих уточнений. Сделать это стало возможным благодаря аксиоматическому методу, который в начале XX в. начал применяться во многих отраслях математики.

В XX в. теория вероятностей также постепенно превращается в строгую аксиоматическую теорию. Это произошло благодаря работам многих математиков. Так, английский математик Р. Фишер (1890–1962) развил статистический, или эмпирический, подход к формированию понятия вероятности. Немецкий математик Р. Мизес (1883–1953) ввел понятие пространства элементарных событий. Российский математик С. Н. Бернштейн (1880–1968) в 1917 г. напечатал работу «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей», а в 1927 г. издал книгу «Теория вероятностей», в которой вывел собственную аксиоматическую теорию вероятностей. Эта книга считается одной из лучших среди произведений мировой литературы по теории вероятностей. Но действительно решающим этапом в развитии теории вероятностей стала работа А. Н. Колмогорова (1903–1987) «Основные понятия теории вероятностей» (впервые изданная на немецком языке в 1933 г. и на русском языке в 1936 г.), в которой он изложил свою аксиоматику теории вероятностей и после которой теория вероятностей заняла равноправное место среди других математических дисциплин.

Большие достижения в теории вероятностей и математической статистике имели также российские математики А. Я. Хинчин (1894–1959), Е. Е. Слуцкий (1880–1948), Б. В. Гнеденко (1911–1995) и многие другие.

## § 20. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## 20.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Таблица 36

1. Понятие комплексного числа	
Определение	Обозначения и термины
<p><i>Комплексными числами</i> называются выражения вида <math>a + bi</math>, где <math>a</math> и <math>b</math> — действительные числа (<math>a \in \mathbf{R}</math>, <math>b \in \mathbf{R}</math>), <math>i</math> — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен <math>-1</math>:</p> $i^2 = -1.$	<p><math>z = a + bi</math> — комплексное число,  <math>a</math> — действительная часть комплексного числа (также обозначают <math>a = \operatorname{Re} z</math>),  <math>b</math> — мнимая часть комплексного числа (также обозначают <math>b = \operatorname{Im} z</math>),  <math>i</math> — мнимая единица.  Действительное число <math>a</math> считается равным комплексному числу <math>a + 0i</math>, то есть <math>a = a + 0i</math>, где <math>a \in \mathbf{R}</math>, в частности</p> $0 = 0 + 0i.$ <p>Числа <math>z = a + bi</math> и <math>\bar{z} = a - bi</math> называются <i>сопряженными комплексными числами</i>.</p>
2. Равенство комплексных чисел	
Определение	Пример
<p>Два комплексных числа называются <i>равными</i>, если равны их действительные и мнимые части.</p>	$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ <p>Если <math>2 + xi = y + 5i</math>, то <math>y = 2</math>, <math>x = 5</math>.</p>

3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме			
Ориентир	Пример	Запись в общем виде (определение)	
<p>Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над комплексными числами выполняются как действия над обыкновенными буквенными выражениями (одночленами и двучленами), но с учетом того, что <math>i^2 = -1</math>.</p>	<i>Сложение</i>		
	$(6 + 7i) + (3 - 5i) = 6 + 3 + 7i - 5i = 9 + 2i$	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	
	<i>Вычитание</i>		
	$(9 + 2i) - (3 - 5i) = 9 - 3 + 2i + 5i = 6 + 7i$	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	
<i>Умножение</i>			
	$(3 + 2i) \cdot (4 + 3i) = 12 + 9i + 8i + 6i^2 = (заменяем i^2 на -1) = 12 + 17i - 6 = 6 + 17i$	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	
<p>Выполняя деление комплексных чисел, удобно сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю.</p>	<i>Деление</i>		
	$\frac{6 + 17i}{4 + 3i} = \frac{(6 + 17i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{24 - 18i + 68i - 51i^2}{16 - 9i^2} = \frac{24 + 50i + 51}{16 + 9} = \frac{75 + 50i}{25} = 3 + 2i$	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$	
4. Свойства сопряженных чисел			
<p>Если <math>z = a + bi</math>, <math>\bar{z} = a - bi</math>, где <math>a \in \mathbf{R}</math>, <math>b \in \mathbf{R}</math>, то</p> <p><math>z + \bar{z} = 2a \in \mathbf{R}</math>, <math>z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}</math>.</p> <p style="text-align: right;"><i>Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.</i></p>			
5. Нахождение степеней числа $i$			
$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$			
...	...	...	...
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

6. Геометрическое изображение комплексных чисел	
в виде точек на координатной плоскости	в виде векторов на координатной плоскости
<p><b>Геометрическое изображение комплексных чисел устанавливает взаимно однозначное соответствие</b></p> <p>между комплексными числами и точками плоскости (которая называется <i>комплексной плоскостью</i>)</p> $z = a + bi \leftrightarrow M(a; b)$	<p>между комплексными числами и радиус-векторами (векторами, отложенными от начала координат)</p> $z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}$
	$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$ $z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$ $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \leftrightarrow \overline{OM}$ $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i \leftrightarrow \overline{OK}$

### Объяснение и обоснование

**1. Расширение понятия числа. Понятие комплексного числа.** Рассмотрим, как может происходить расширение понятия числа. Простейшим числовым множеством является множество  $N$  *натуральных чисел*. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения и умножения (то есть сумма двух натуральных чисел является натуральным числом и произведение двух натуральных чисел является натуральным числом). Вычитание выполняется не всегда ( $5 - 3 = 2$ , а разность  $3 - 5$  не выражается натуральным числом).

Чтобы действие вычитания можно было выполнять всегда, необходимо расширить множество натуральных чисел, дополнить его отрицательными числами и нулем. В результате такого расширения получили множество  $Z$  *целых чисел*.

Однако во множестве целых чисел не всегда можно выполнить действие деления. Чтобы действие деления (на число, не равное нулю) всегда выполнялось, необходимо расширить множество целых чисел, дополнить его мно-

жеством всех обыкновенных дробей (то есть числами вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа и  $n \neq 0$ ). В результате такого расширения мы получаем множество  $Q$  рациональных чисел. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

В множестве рациональных чисел не всегда можно выполнить действие извлечения корня из положительного числа (например,  $\sqrt{2}$  не является рациональным числом). Чтобы действие извлечения корня из положительного числа всегда выполнялось, необходимо расширить множество рациональных чисел, дополнить его *иррациональными числами*. В результате такого расширения мы получаем множество  $R$  действительных чисел. В этом множестве, кроме действий сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль), также всегда можно выполнить действие извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. Отметим, что каждое расширение множества чисел проводят таким образом, чтобы в новом множестве выполнялись все законы действий, которые выполнялись в предыдущем множестве.

Однако во множестве действительных чисел нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то есть во множестве действительных чисел нельзя решить даже простейшие, на первый взгляд, уравнения, как  $x^2 + 1 = 0$ ,  $x^2 + 9 = 0$  и др. Таким образом, мы приходим к необходимости расширить множество действительных чисел, присоединив к нему такие новые числа, чтобы в новом множестве  $S$  так называемых комплексных чисел всегда можно было извлечь квадратный корень (или корень  $n$ -й степени) не только из положительного, но и из отрицательного числа.

Обратим внимание, что для того чтобы извлечь квадратный корень из отрицательного числа, достаточно уметь извлекать квадратный корень из  $(-1)$ . Тогда, например, если выполняются известные правила действий, то

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}.$$

Число нового вида  $\sqrt{-1}$  принято обозначать знаком  $i$  (буквой  $i$ ) и называть *мнимой единицей* ( $i$  — первая буква латинского слова *imaginarius* — мнимый). Согласно определению квадратного корня, квадрат числа  $i$  равен  $(-1)$ , то есть  $i^2 = -1$ . С помощью нового числа можно записать значение квадратного корня из любого отрицательного числа, например,  $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i^*$ . Тогда выражение  $2 + \sqrt{-16}$  может быть записано так:  $2 + 4i$ .

Мы получили выражение  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа. Выражения такого вида называются *комплексными числами*. Таким образом,

\* Для комплексных чисел знак  $\sqrt{\quad}$  уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому  $\sqrt{-1} = \pm i$  (поскольку  $(\pm i)^2 = i^2 = -1$ ),  $\sqrt{-16} = \pm 4i$ , а  $2 + \sqrt{-16} = 2 \pm 4i$ . Более подробно операция извлечения корня  $n$ -й степени из комплексного числа рассмотрена на с. 364.

комплексными числами называются выражения вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа ( $a \in R, b \in R$ ), если их равенство и действия над ними определяются правилами, приведенными в пункте 2. Как будет показано ниже,  $i$  — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен  $-1$ :  $i^2 = -1$ .

В комплексном числе  $a + bi$  число  $a$  называется *действительной частью*, а число  $b$  — *мнимой частью*.

## 2. Понятие равенства комплексных чисел и операции над комплексными числами.

Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные и мнимые части,

то есть  $a + bi = c + di$ , тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .

Например, равенство  $2 + xi = y - 5i$  при действительных  $x$  и  $y$  возможно только при

$$y = 2 \text{ и } x = -5.$$

Каждое комплексное число вида  $a + 0i$  отождествляют с действительным числом  $a$  и записывают:  $a + 0i = a$ . Таким образом, *действительные числа являются частью множества комплексных чисел*. Например,

$$5 + 0i = 5, 0 + 0i = 0.$$

Каждое комплексное число вида  $0 + bi$  отождествляют с выражением  $bi$  и записывают:  $0 + bi = bi$  (комплексное число  $bi$  называют *чисто мнимым числом*); в частности, комплексное число  $0 + 1i$  отождествляют с числом  $i$  и пишут:  $0 + 1i = i$ .

Действия сложения, вычитания и умножения над комплексными числами выполняются по тем же законам, что и над действительными. Это позволяет пользоваться следующим ориентиром: *для практического выполнения действий над комплексными числами достаточно выполнять эти операции так, как будто выражение  $(a + bi)$  является не комплексным числом, а двучленом. (При этом необходимо учитывать, что  $i$  — не переменная, а определенное число, такое, что  $i^2 = -1$ , поэтому в результате умножения необходимо заменить  $i^2$  на  $(-1)$ .)*

Для того чтобы иметь право пользоваться этим ориентиром, необходимо соответствующим образом дать определение действий над комплексными числами.

1) *Сложение комплексных чисел.* Пусть  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 7 + 4i$ .

Тогда  $z_1 + z_2 = (2 + 7) + (3 + 4)i = 9 + 7i$ . Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является *определением суммы двух комплексных чисел*.

Если  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ , то *суммой* этих комплексных чисел называется комплексное число  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ .

Отметим, что, как и для действительных чисел,

$$z_1 + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z_1.$$



2) *Вычитание комплексных чисел.* Пусть  $z_1 = 9 + 7i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ .

Тогда  $z_1 - z_2 = (9 - 2) + (7 - 3)i = 7 + 4i$ . Если обозначить разность рассмотренных чисел через  $z_3 = z_1 - z_2 = 7 + 4i$ , то  $z_3 + z_2 = (7 + 4i) + (2 + 3i) = 9 + 7i = z_1$ . Поэтому для определения действия вычитания достаточно знать определения суммы и равенства комплексных чисел.

*Разностью двух комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$  называется такое комплексное число  $z_3 = x + yi$ , которое в сумме с  $z_2$  дает  $z_1$ .*

● Если  $z_3 + z_2 = z_1$ , то  $(x + c) + (y + d)i = a + bi$ . Согласно определению равенства комплексных чисел  $x + c = a$ ,  $y + d = b$ . Тогда  $x = a - c$ ,  $y = b - d$ . Таким образом,  $z_1 - z_2 = x + yi = (a - c) + (b - d)i$ . ○

3) *Умножение комплексных чисел.* Пусть  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 7 + 4i$ .

Тогда  $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2$ . Заменяя  $i^2$  на  $(-1)$ , получаем:  $z_1 \cdot z_2 = 14 + 29i - 12 = 2 + 29i$ .

Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является определением произведения двух комплексных чисел.

*Если  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ , то произведением этих комплексных чисел называется комплексное число  $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .*

Как и для действительных чисел, возведение комплексного числа в натуральную степень сводится к последовательному умножению числа на себя. В частности,  $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1$ . Таким образом, мы показали, что из определения умножения комплексных чисел следует, что  $i^2 = -1$ . Поэтому при умножении комплексных чисел и возведении их в степень мы действительно имеем право заменять  $i^2$  на число  $-1$ . Например,  $i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ .

Примем по определению  $i^0 = 1$  (а также при  $z \neq 0$   $z^0 = 1$ ).

Тогда, учитывая, что  $i^4 = 1$ , получаем:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1, \quad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i, \quad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1, \quad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i.$$

Например,  $i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = -i$ ,  $i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = -1$ .

Обратим внимание, что при возведении комплексного числа  $a + bi$  в квадрат или в куб можно использовать соответствующие формулы сокращенного умножения (заменяя  $i^2$  на  $-1$ ). Например,

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Введем также понятие *сопряженных комплексных чисел*, которые нам будут необходимы для практического выполнения деления комплексных чисел.

*Числа  $z = a + bi$  и  $\bar{z} = a - bi$  называют сопряженными комплексными числами.*

Например, числа  $z = 2 + 5i$  и  $\bar{z} = 2 - 5i$  — сопряженные. Найдем сумму и произведение этих чисел:

$$z + \bar{z} = (2 + 5i) + (2 - 5i) = 4 \quad \text{— действительное число,}$$

$$z \cdot \bar{z} = (2 + 5i) \cdot (2 - 5i) = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29 \quad \text{— действительное число.}$$

*Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.*

- Если  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - bi$ , где  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$ , то

$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{— действительное число } (2a \in \mathbf{R}).$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}. \quad \circ$$

- 4) *Деление комплексных чисел.* Пусть необходимо разделить  $z_1 = 2 + 29i$  на  $z_2 = 2 + 3i$ . Запишем деление с помощью черты дроби и, пользуясь основным свойством дроби, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю (чтобы получить в знаменателе действительное число):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 29i}{2 + 3i} = \frac{(2 + 29i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 6i + 58i - 87i^2}{4 - 9i^2} = \frac{4 + 52i + 87}{4 + 9} = \frac{91 + 52i}{13} = 7 + 4i.$$

В п. 3) мы получили, что  $(2 + 3i)(7 + 4i) = 2 + 29i$ . Следовательно, и во множестве комплексных чисел операцию деления можно проверять с помощью операции умножения.

В общем виде деление комплексных чисел выполняется так:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \quad (1)$$

- Обратим внимание, что строгое получение формулы (1) опирается на *определение частного комплексных чисел*, аналогичное определению их разности.

*Частным двух комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$  ( $z_2 \neq 0$ ) называется такое комплексное число  $z_3 = x + yi$ , которое при умножении на  $z_2$  дает  $z_1$ .*

Из этого определения получаем, что  $z_3 \cdot z_2 = z_1$ , то есть  $(x + yi)(c + di) = a + bi$ . Тогда по определению равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} xc - yd = a, \\ xd + yc = b. \end{cases} \quad (2)$$

Умножим первое уравнение системы на  $c$ , а второе — на  $d$  и сложим полученные уравнения. Имеем  $x(c^2 + d^2) = ac + bd$ . Поскольку  $z_2 \neq 0$ , то  $c^2 + d^2 \neq 0$ , следовательно,  $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ . Аналогично, если первое уравнение

умножить на  $d$ , а второе — на  $c$  и вычесть из второго уравнения первое, получим  $y(c^2 + d^2) = bc - ad$ , следовательно,  $y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ . Тогда  $\frac{z_1}{z_2} = z_3 = x + yi =$

$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$ , что совпадает с результатом, полученным по форму-

ле (1). Поскольку система (2) при  $c^2 + d^2 \neq 0$  имеет единственное решение  $(x; y)$ , то частное  $z_3$  двух комплексных чисел (при  $z_2 \neq 0$ ) определяется однозначно.  $\circ$

Таким образом, мы обосновали корректность использования приведенного практического ориентира для выполнения действий над комплексными числами. Из приведенных определений операций над комплексными числами следует справедливость для комплексных чисел тех основных свойств операций сложения и умножения, которые выполнялись для действительных чисел (проверьте это самостоятельно).

## Свойства сложения

- 1)  $z + w = w + z$ .
- 2)  $(z + w) + t = z + (w + t)$ .
- 3)  $z + 0 = z$  ( $0 = 0 + 0i$ ).
- 4) Для каждого комплексного числа  $z = a + bi$  существует противоположное число ( $-z = -a - bi$ ), такое, что
 
$$z + (-z) = 0.$$

## Свойства умножения

- 1')  $zw = wz$ .
- 2')  $(zw)t = z(wt)$ .
- 3')  $z \cdot 1 = z$  ( $1 = 1 + 0i$ ).
- 4) Для каждого комплексного числа  $z \neq 0$  существует обратное ему число  $\frac{1}{z}$ , такое, что  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ . Например, для комплексного числа  $z = c + di$  по формуле (1) имеем

$$\frac{1}{z} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i.$$

- 5) Операции сложения и умножения комплексных чисел объединены распределительным законом

$$(z + w)t = zt + wt.$$

Для множества действительных чисел эти основные свойства 1–5 (их еще называют аксиомами поля действительных чисел) определяют все остальные свойства действительных чисел (кроме свойств упорядоченности и непрерывности, которые определяются в поле действительных чисел другими аксиомами). Поскольку основные свойства 1–5 выполняются и для комплексных чисел, то все тождества, которые вы знаете из курса алгебры, остаются справедливыми и для множества комплексных чисел.

Например,

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3.$$

Заметим, что определение комплексного числа можно сформулировать, опираясь только на понятие действительного числа, без привлечения числа  $i$ , поскольку, в определении комплексного числа  $a + bi$  нас интересуют лишь действительные числа  $a$  и  $b$ , идущие в определенном порядке. Поэтому, можно дать следующие определения комплексных чисел, их равенства и операций сложения и умножения комплексных чисел.

Комплексным числом  $z$  называют пару  $(a; b)$  действительных чисел, взятых в определенном порядке.

Если  $z = (a; b)$  — комплексное число, то  $a$  называют его действительной частью, а  $b$  — мнимой частью. Приняты обозначения  $a = \operatorname{Re} z$ ,  $b = \operatorname{Im} z$  (от французских слов *réelle* — действительный и *imaginaire* — мнимый).

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные и мнимые части. То есть, комплексные числа  $z_1 = (a; b)$  и  $z_2 = (c; d)$  равны ( $z_1 = z_2$ ) тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .

Операции сложения и умножения комплексных чисел (то есть упорядоченных пар действительных чисел) вводятся с учетом формул, приведенных на с. 351–352.

Если  $z_1 = (a; b)$  и  $z_2 = (c; d)$ , то суммой этих комплексных чисел называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = (a + c; b + d),$$

а произведением данных комплексных чисел называют комплексное число

$$z_1 z_2 = (ac - bd; ad + bc).$$

Итак, мы ввели понятие комплексного числа и определили для этих чисел операции сложения и умножения. Теперь можно перейти к записи комплексных чисел в виде  $z = a + bi$ , о которой говорилось выше. Для этого заметим следующее.

1) Для пар вида  $(a; 0)$  определенные выше операции сложения и умножения сводятся к соответствующим операциям над действительными частями, то есть имеют место равенства

$$(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0) \text{ и } (a; 0) \cdot (c; 0) = (ac; 0).$$

По этой причине каждое комплексное число вида  $(a; 0)$  отождествляют с действительным числом  $a$  и записывают  $(a; 0) = a$ .

2) Если обозначить пару  $(0; 1)$  через  $i$ , то есть  $i = (0; 1)$ , то

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0) = -1.$$

3) Тогда

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Учитывая, что  $(a; 0) = a$ ,  $(b; 0) = b$ ,  $(0; 1) = i$ , получаем

$$z = (a; b) = a + bi.$$

Далее комплексные числа  $z = (a; b)$ , определенные как упорядоченные пары действительных чисел, можно записывать в виде  $z = a + bi$  (где  $i = (0; 1)$  и  $i^2 = -1$ ) и использовать все правила и формулы, приведенные выше.

**3. Геометрическое изображение комплексных чисел.** Каждое комплексное число  $z = a + bi$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$ ) можно изобразить точкой  $M$  на координатной плоскости с координатами  $(a; b)$  (рис. 154). И наоборот, каждую точку  $M(a; b)$  координатной плоскости можно считать изображением комплексного числа  $z = a + bi$ . В таком случае говорят, что геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости (эту плоскость называют *комплексной плоскостью*).

Действительные числа  $a = a + 0i$  изображаются точками с координатами  $(a; 0)$ , которые находятся на оси абсцисс. Поэтому эта ось комплексной плоскости называется *действительной осью*. Чисто мнимые числа  $bi = 0 + bi$  изображаются точками с координатами  $(0; b)$ , которые находятся на оси ординат. Поэтому эта ось комплексной плоскости называется *мнимой осью*.

Также комплексное число  $z = a + bi$  на координатной плоскости можно изображать в виде так называемого радиус-вектора  $\overline{OM}$  (вектора с началом в начале координат и концом в точке  $M(a; b)$ , то есть в виде вектора  $\overline{OM}$  с координатами  $(a; b)$ ) (рис. 155). Такое изображение также устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и соответствующими радиус-векторами. С помощью последнего изображения мож-

но проиллюстрировать, что нахождение суммы и разности комплексных чисел — это просто нахождение суммы и разности соответствующих векторов (рис. 156), поскольку при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при вычитании — вычитаются (см. табл. 36).

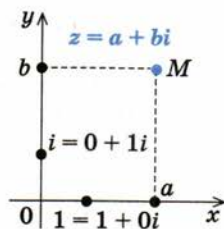


Рис. 154

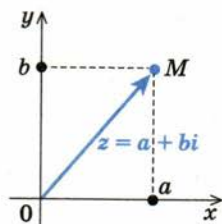


Рис. 155

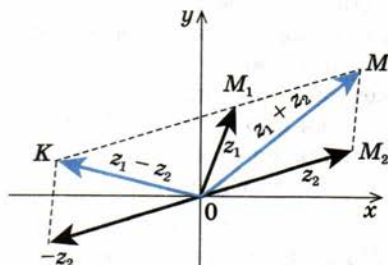


Рис. 156

**Замечание.** Геометрическое изображение действительных чисел на числовой прямой позволяет легко сравнивать действительные числа: из двух чисел на числовой прямой больше то, которое изображено правее (и меньше то, которое изображено левее). Но для комплексных чисел, изображаемых точками на координатной плоскости, мы не можем ввести аналогичное определение (поскольку рассматривается не одна, а две координаты). Поэтому для комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше», то есть нельзя, например, сказать, какое из комплексных чисел больше:  $3 + 2i$  или  $2 + 5i$ .

Отметим, что введение комплексных чисел позволяет решать *квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом* (которые в множестве действительных чисел не имели корней). Во множестве комплексных чисел знак  $\sqrt{\quad}$  уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому, например,  $\sqrt{-1} = \pm i$  (поскольку  $(\pm i)^2 = i^2 = -1$ ),  $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$ ,  $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \pm i\sqrt{7}$ . (Как будет показано далее (с. 365), квадратный корень из комплексного числа имеет только два значения, поэтому других значений записанные квадратные корни не имеют.) Учитывая это, найдем корни квадратных уравнений с помощью известных формул.

**Пример**

Решите уравнение: 1)  $x^2 - 2x + 5 = 0$ ; 2)  $x^2 - 3x + 4 = 0$ .

► 1)  $x^2 - 2x + 5 = 0$ , тогда  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$ . Следовательно,  
 $x_1 = 1 + 2i$ ,  $x_2 = 1 - 2i$ . ◀

► 2)  $x^2 - 3x + 4 = 0$ , тогда  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$ . Следовательно,

$$x_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad x_2 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i. \quad \triangleleft$$

## Вопросы для контроля

1. Дайте определение комплексного числа. Приведите примеры. Укажите на этих примерах действительную и мнимую части комплексного числа.
2. Сформулируйте определение равенства двух комплексных чисел. В каком случае будут равны комплексные числа  $(m + 5i)$  и  $(-3 + ni)$  при  $m, n \in \mathbf{R}$ ?
3. 1) Приведите примеры выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами.  
2) Дайте определения суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел.
4. 1) Объясните, какие комплексные числа называют сопряженными.  
2) Сформулируйте свойства сопряженных комплексных чисел. Приведите примеры.
- 3) Докажите свойства сопряженных комплексных чисел.
5. 1) Сформулируйте основные свойства операций сложения и умножения во множестве комплексных чисел.  
2) Обоснуйте справедливость этих свойств.
6. Объясните на примерах, как можно изображать комплексные числа на координатной плоскости: а) в виде точек, б) в виде радиус-векторов.

## Упражнения

1. Назовите действительную и мнимую части комплексного числа:
  - 1)  $5 + 3i$ ;
  - 2)  $2 - 4i$ ;
  - 3)  $-5 + i$ ;
  - 4)  $-5 - 3i$ ;
  - 5)  $4i$ ;
  - 6)  $7$ .
2. Зная, что заданные комплексные числа равны, найдите значения  $x$  и  $y$  (при  $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ ):
  - 1)  $2x + 4i = 6 - yi$ ;
  - 2)  $8 + 4xi = y + 12i$ ;
  - 3)  $-4 + xi = 2y - 3i$ ;
  - 4)  $2xi = y + 2i$ .
3. Найдите сумму комплексных чисел:
  - 1)  $(5 + 2i) + (3 - 4i)$ ;
  - 2)  $(1 - 7i) + (-3 + 8i)$ ;
  - 3)  $(4 - i) + (-1 - 3i)$ ;
  - 4)  $(2 + 6i) + (2 - 6i)$ .
4. Найдите разность комплексных чисел:
  - 1)  $(9 - i) - (5 + 4i)$ ;
  - 2)  $(3 + 8i) - (1 - 11i)$ ;
  - 3)  $(-5 - 2i) - (6 + 3i)$ ;
  - 4)  $(4 + i) - (-2 - 3i)$ .
5. Найдите произведение комплексных чисел:
  - 1)  $(2 + 5i) \cdot (4 - 2i)$ ;
  - 2)  $(5 - i) \cdot (-2 - 6i)$ ;
  - 3)  $(-4 + 6i) \cdot (3 + i)$ ;
  - 4)  $(7 - 4i) \cdot (7 + 4i)$ .
6. Найдите частное комплексных чисел:
  - 1)  $\frac{18+i}{2+3i}$ ;
  - 2)  $\frac{6-4i}{1-i}$ ;
  - 3)  $\frac{11-10i}{4-3i}$ ;
  - 4)  $\frac{1}{1+i}$ .
 Упростите выражение (7–8).
  7. 1)  $i^{41}$ ;
  - 2)  $i^{27} + 2i^{13}$ ;
  - 3)  $3i^{24} + 2i^{14}$ ;
  - 4)  $i^{33} + i^7$ .
  8. 1)  $(2 - 3i)^2$ ;
  - 2)  $(1 - i)^3$ ;
  - 3)  $(3 + 4i)^2$ ;
  - 4)  $(2 + i)^3$ .

9. Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число:

а) в виде точки; б) в виде радиус-вектора:

1)  $z_1 = 2 + 3i$ ;

2)  $z_2 = -1 - i$ ;

3)  $z_3 = 3 - 2i$ ;

4)  $z_4 = -2 - 4i$ ;

5)  $z_5 = -3$ ;

6)  $z_6 = 4i$ .

10. Решите уравнение:

1)  $x^2 - 4x + 29 = 0$ ;

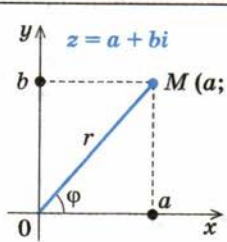
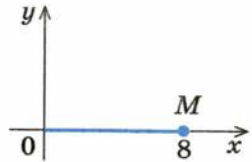
2)  $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ;

3)  $x^2 + x + 2 = 0$ ;

4)  $3x^2 + 5x + 3 = 0$ .

## 20.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Таблица 37

1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа	
Понятие	Иллюстрация, термины и определения
<p>Комплексное число <math>z = a + bi</math> изображается точкой <math>M(a; b)</math>. Положение этой точки можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка <math>OM = r</math> и величину угла <math>\varphi</math>, который луч <math>OM</math> образует с положительным направлением оси <math>Ox</math>. Тогда</p> $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$ <p>Отсюда <math>a = r \cos \varphi</math>, <math>b = r \sin \varphi</math>, поэтому <math>z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi) i</math>. Тогда <math>z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)</math> — <b>тригонометрическая форма комплексного числа</b>.</p>	 <p><math>r = \sqrt{a^2 + b^2}</math> — <b>модуль (или абсолютная величина) комплексного числа</b> <math>z = a + bi</math>.</p> $ z  = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ <p><math>\varphi</math> — <b>аргумент</b> комплексного числа <math>z</math> (обозначается <math>\text{Arg } z</math>)</p> <p><math>\text{Arg } z = \varphi</math>, где <math>\cos \varphi = \frac{a}{r}</math>, <math>\sin \varphi = \frac{b}{r}</math>.</p>
Примеры	
<p>1. Изобразим комплексное число <math>8 = 8 + 0i</math> на комплексной плоскости. Из рисунка видно, что <math> 8  = OM = 8</math>, <math>\text{Arg } 8 = 0</math>, то есть в тригонометрической форме <math>8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)</math>.</p> 	<p>2. <math>z = 1 - i</math>, где <math>a = 1</math>, <math>b = -1</math>. Тогда</p> $ z  =  1 - i  = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}.$ $\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi &= \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \text{Arg } z = \varphi = \frac{7\pi}{4},$ <p>то есть в тригонометрической форме</p> $1 - i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$

2. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме	
$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$ $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \text{ (или отличаются на } 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}) \end{cases}</math> </div>	<p>Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на <math>2\pi k</math>, где <math>k \in \mathbb{Z}</math>.</p>
3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	
$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$ $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$	
Умножение	Деление
$z_1 \cdot z_2 =$ $= r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$ <p>При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.</p>	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$ <p>При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (модуль делимого делится на модуль делителя и из аргумента делимого вычитается аргумент делителя).</p>
Возведение в степень	
$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{N}</math> </div> <p>При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. (Формулу можно использовать и для целых отрицательных <math>n</math>.)</p>	<p style="text-align: center;">Пример</p> $(1-i)^{20} = \left( \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right)^{20} =$ $= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \left( \frac{7\pi}{4} \cdot 20 \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{4} \cdot 20 \right) \right) =$ $= 2^{10} (\cos 35\pi + i \sin 35\pi) =$ $= 1024 (-1 + i \cdot 0) = -1024$
Извлечение корня $n$ -й степени	
$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k \in \mathbb{Z}$ <p>(Всего получаем <math>n</math> разных значений при <math>k = 0, 1, 2, \dots, n-1</math>.)</p>	<p>При извлечении корня <math>n</math>-й степени из комплексного числа извлекается арифметический корень <math>n</math>-й степени из модуля, а к аргументу прибавляется <math>2\pi k</math> и результат делится на показатель корня.</p>



<p>Во множестве комплексных чисел знаки <math>\sqrt{\quad}</math>, <math>\sqrt[4]{\quad}</math>, <math>\sqrt[2k]{\quad}</math> не являются знаками арифметических корней, как во множестве действительных чисел. Знаком <math>\sqrt[n]{z}</math> обозначаются все <math>n</math> значений корня для любого <math>n</math> (четного или нечетного).</p>	<p style="text-align: center;">Примеры</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\sqrt{-1} = \pm i</math>.</li> <li><math>\sqrt{9} = \pm 3</math> (только во множестве комплексных чисел!).</li> <li><math>t = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[3]{8} \cdot \left( \cos \frac{0+2\pi k}{3} + i \sin \frac{0+2\pi k}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right), k \in \mathbf{Z}</math> (в последнем равенстве <math>\sqrt[3]{8} = 2</math> — арифметический корень). Имеем три различных значения <math>\sqrt[3]{8}</math>:  <ol style="list-style-type: none"> <li>при <math>k = 0</math> <math>t_0 = \sqrt[3]{8} = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2</math>;</li> <li>при <math>k = 1</math>  <math>t_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}</math>;</li> <li>при <math>k = 2</math>  <math>t_2 = \sqrt[3]{8} = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}</math>,  то есть <math>\sqrt[3]{8}</math> имеет три значения: <math>2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}</math>.</li> </ol> </li> </ol>
--	---

### Объяснение и обоснование

**1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа.** Как уже отмечалось, каждое комплексное число  $z = a + bi$  можно изобразить на координатной (комплексной) плоскости в виде точки  $M(a; b)$  или в виде вектора  $\overline{OM}$  (с координатами  $(a; b)$ ). Но положение точки  $M$  (вектора  $\overline{OM}$ ) на координатной плоскости можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка  $OM = r$  и величину угла  $\varphi$ , образованного лучом  $OM$  с положительным направлением оси  $Ox$  (рис. 157). Учитывая формулу расстояния между двумя точками и определение косинуса и синуса на координатной плоскости, получаем:

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

Тогда  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$  и заданное комплексное число  $z$  можно записать так:  $z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Полученная запись комплексного числа  $z$  называется **тригонометрической формой** этого числа, а его запись в виде  $a + bi$  — **алгебраической формой** комплексного числа. Следовательно, **тригонометрической формой комплексного числа  $z = a + bi$  называется запись этого числа в виде**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{где } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

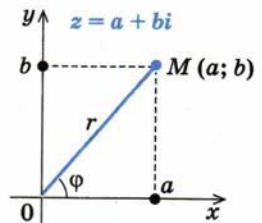


Рис. 157

\* Величину угла будем измерять в радианах.

Неотрицательное число  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем* (или *абсолютной величиной*) комплексного числа  $z = a + bi$  и обозначается  $|z|$ . Следовательно,

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Как и для действительных чисел на координатной (комплексной) плоскости, *модуль комплексного числа — это расстояние от точки, изображающей заданное число, до точки 0* (до начала координат). Как и для действительных чисел, только при  $z = 0$  модуль  $z$  равен нулю, а если  $z \neq 0$ , то  $|z| > 0$ . Отметим, что для действительного числа  $z = a = a + 0i$  его модуль  $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$  совпадает с обычным модулем действительного числа.

Число  $\varphi$ , входящее в запись тригонометрической формы комплексного числа  $z = a + bi$ , называется *аргументом* комплексного числа и обозначается  $\text{Arg } z$ . Следовательно,

$$\text{Arg } z = \varphi, \text{ где } \cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r} \quad (r = \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Как уже отмечалось, при геометрическом изображении комплексного числа  $z = a + bi$  в виде точки  $M(a; b)$  (или радиус-вектора  $\overline{OM}$ ) аргумент  $\varphi$  — это числовое значение величины угла, образованного лучом  $OM$  с положительным направлением оси  $Ox$  (см. рис. 157). Понятно, что этот угол можно определить только с точностью до  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ . Поэтому аргумент комплексного числа  $z$  имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на числа, кратные  $2\pi$ . Отметим, что для комплексного числа  $0 = 0 + 0i$  аргумент нельзя определить, поскольку  $|0| = r = 0$  (в этом случае радиус-вектор  $\overline{OM}$  превращается в точку — нуль-вектор — и мы не можем указать его направление).

### Пример

Запишите в тригонометрической форме число  $\sqrt{3} - i$ .

► Если  $z = a + bi = \sqrt{3} - i$ , то  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = -1$ . Найдем модуль этого комплексного числа:  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ . Аргумент  $\varphi$  найдем из соотношений:  $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$ . Поскольку косинус  $\varphi$  положителен, а синус  $\varphi$  — отрицателен, то соответствующий угол  $\varphi$  находится в IV четверти и как одно из значений аргумента можно взять  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$  (или любое другое значение, отличающееся от него на  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , например,  $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ ). Тогда заданное комплексное число в тригонометрической форме записывается следующим образом:

$$z = \sqrt{3} - i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right). \triangleleft$$

В простейших случаях тригонометрическую форму комплексного числа можно записывать, опираясь на изображение этого числа на координатной плоскости.

Например, для числа  $1 = 1 + 0i$ , изображаемого точкой  $M(1; 0)$  (рис. 158), модуль  $r = OM = 1$  и аргумент  $\varphi = 0$  (угол между лучом  $OM$  и положительным направлением оси  $Ox$  равен  $0$ ). Тогда в тригонометрической форме число  $1$  можно записать так:  $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ .

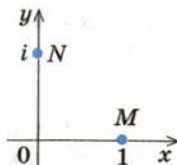


Рис. 158

Аналогично для числа  $i = 0 + 1i$ , изображаемого точкой  $N(0; 1)$  (см. рис. 158), модуль  $r = ON = 1$  и аргумент  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (угол между лучом  $ON$  и положительным направлением оси  $Ox$  равен  $\frac{\pi}{2}$ ), тогда в тригонометрической форме число  $i$  можно записать так:  $i = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ .



Рис. 159

Напомним, что для действительных чисел геометрический смысл выражения  $|a - b|$  — это расстояние между соответствующими точками на числовой прямой, то есть  $|a - b| = AB$  (рис. 159).

Аналогично для комплексных чисел геометрический смысл выражения  $|z - w|$  — это расстояние между соответствующими точками на координатной (комплексной) плоскости.

● Действительно, комплексное число  $z$  изображается вектором  $\overline{OM}$  или точкой  $M$ , а комплексное число  $w$  — вектором  $\overline{ON}$  или точкой  $N$  (рис. 160). Тогда комплексное число  $z - w$  изображается разностью этих векторов, то есть вектором  $\overline{NM}$ . Число  $|z - w|$  равно длине этого вектора, то есть расстоянию между точками  $M$  и  $N$ . ○

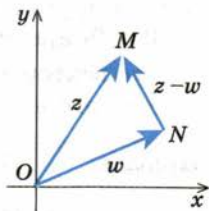


Рис. 160

Например, пусть необходимо изобразить множество точек  $z$  комплексной плоскости, для которых выполняется равенство

$$|z - 2 + 3i| = 4 \quad (1)$$

или неравенство

$$|z - 2 + 3i| \leq 4. \quad (2)$$

Для этого достаточно записать данные условия так:  $|z - (2 - 3i)| = 4$ ;  $|z - (2 - 3i)| \leq 4$  и использовать геометрический смысл модуля разности. Тогда множество точек, задаваемое равенством (1), — это окружность радиуса 4 с центром в точке  $O_1(2; -3)$  (рис. 161, а), а множество точек, задаваемое неравенством (2), — это круг радиуса 4 с центром в точке  $O_1(2; -3)$  (рис. 161, б).

Отметим, что в случае, когда два комплексных числа равны, они изображаются одной и той же точкой  $M$  на координатной плоскости. Но тогда

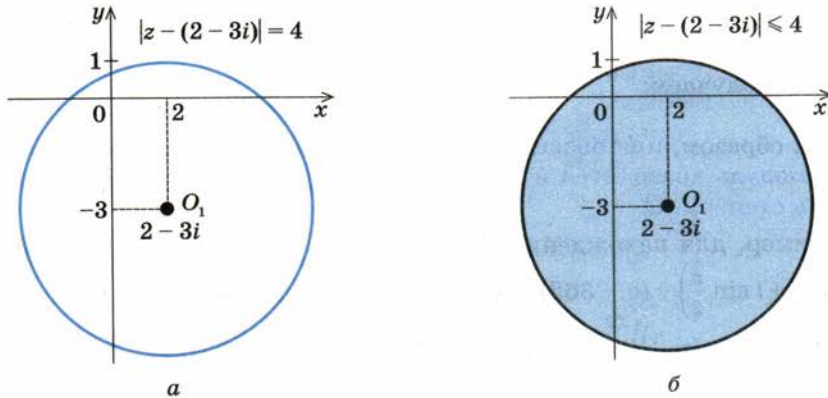


Рис. 161

их модули (расстояния до начала координат) равны, а аргументы (то есть углы, образованные лучом  $OM$  с положительным направлением оси  $Ox$ ) или равны, или отличаются на целое число полных оборотов, то есть на  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ . И наоборот, если модули двух комплексных чисел равны, а аргументы или равны, или отличаются на  $2\pi k$ , то эти числа изображаются на координатной плоскости одной и той же точкой, следовательно, эти числа равны. Таким образом,

**два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ .**

То есть, если  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , то равенство  $z_1 = z_2$  выполняется тогда и только тогда, когда  $r_1 = r_2$  и  $\varphi_1 = \varphi_2$  (или  $\varphi_2$  отличается от  $\varphi_1$  на  $2\pi k$ , то есть  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ ).

**2. Умножение, возведение в степень и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.**

- Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$ ,  
 $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin (\varphi_1 + \varphi_2)$ , получаем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (3)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.  $\circ$

- Возведение в натуральную степень комплексного числа  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  сводится к умножению одинаковых множителей, поэтому, используя несколько раз формулу (3), получаем:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}} = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n \text{ раз}} \left( \underbrace{\cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)}_{n \text{ раз}} + i \underbrace{\sin(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)}_{n \text{ раз}} \right).$$

Отсюда получаем:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (4)$$

Таким образом, при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.  $\circ$

Например, для нахождения  $i^{102}$  учтем, что в тригонометрической форме  $i = 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$  (с. 362). Тогда, используя формулу (4), получаем  $i^{102} = \left( 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right)^{102} = 1^{102} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot 102 \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \cdot 102 \right) \right) = 1 (\cos 51\pi + i \sin 51\pi) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1$  (что совпадает с значением, полученным на с. 352 в алгебраической форме).

Поскольку деление — действие, обратное умножению, то при делении числа  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  на число  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  (при  $z_2 \neq 0$ ) модули необходимо разделить, а аргументы — вычитать:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (5)$$

Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

- По формуле (3) произведение числа  $z_3 = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$  на число  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  равно:

$$z_3 z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 (\cos((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2) + i \sin((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2)) = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = z_1.$$

Это и означает, что число  $z_3$  является частным от деления числа  $z_1$  на число  $z_2$ .  $\circ$

**Замечание.** Если  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то по определению  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$  (при  $z \neq 0$ ). Поскольку  $1 = 1 + 0i = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$ , то, учитывая равенства (4) и (5) для  $n \in \mathbb{N}$ , имеем:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1 (\cos 0 + i \sin 0)}{r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{1}{r^n} (\cos(0 - n\varphi) + i \sin(0 - n\varphi)) = r^{-n} (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)).$$

Это равенство означает, что формулу (4) можно использовать не только для натуральных, но и для целых значений  $n$  при  $z \neq 0$  (напомним, что  $z^0 = 1$  при  $z \neq 0$ ).

**3. Извлечение корня из комплексного числа.** Как и для действительных чисел, *корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$*  (где  $n$  — натуральное число) называется такое комплексное число  $t$ , что  $t^n = z$ .

Корень  $n$ -й степени из  $z$  обозначается  $\sqrt[n]{z}$ . Следовательно, если  $t = \sqrt[n]{z}$ , то  $z = t^n$ . Покажем, что из любого комплексного числа  $z$  можно извлечь корень  $n$ -й степени, причем если  $z \neq 0$ , то  $\sqrt[n]{z}$  принимает  $n$  различных значений. Для обоснования используем тригонометрическую форму рассмотренных комплексных чисел.

- Пусть  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Число  $t$  будем искать в виде
- $$t = R (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Если  $t = \sqrt[n]{z}$ , то  $z = t^n$ . Учитывая, что  $t^n = R^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ , получаем:

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = R^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Но два комплексных числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы или равны, или отличаются на  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ . Следовательно,

$$R^n = r, \tag{6}$$

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \tag{7}$$

Поскольку  $r \geq 0$  и число  $R$  должно быть неотрицательным, то из равенства (6) получаем:

$$R = \sqrt[n]{r} \text{ (арифметическое значение),}$$

а из равенства (7) имеем:

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = t = R (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k \in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

Учитывая, что функции  $\cos x$  и  $\sin x$  являются периодическими с наименьшим положительным периодом  $2\pi$ , делаем вывод, что значения  $\sqrt[n]{z}$ , которые дает формула (9), могут повторяться только в том случае, когда значения  $\alpha$  (см. формулу 8) будут отличаться на число, кратное  $2\pi$ . Выясним, при каких значениях  $k_1$  и  $k_2$  это может быть. Для этого разность

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi (k_1 - k_2)}{n}$$

должна быть кратной  $2\pi$ , а разность  $k_1 - k_2$  должна, в свою очередь, делиться на  $n$ . Отсюда следует, что при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  формула (9) дает разные значения  $\sqrt[n]{z}$ . При  $k = n$  получаем те же значения корня, что и при  $k = 0$ , при  $k = n + 1$  — те же значения корня, что и при  $k = 1$ , и т. д. Следовательно, по формуле (9) мы всегда получим точно  $n$  различных значений  $\sqrt[n]{z}$  (при  $z \neq 0$ ). То есть

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

(Всего получаем  $n$  различных значений при  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .) Итак,

при извлечении корня  $n$ -й степени из комплексного числа из модуля извлекается арифметический корень  $n$ -й степени, а к аргументу прибавляется  $2\pi k$  (где  $k \in \mathbf{Z}$ ) и результат делится на показатель корня. ○

**Пример** Найдите все значения  $\sqrt[4]{1}$ .

▶ Запишем подкоренное число в тригонометрической форме

$1 = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$ . Тогда по формуле (10):

$$t = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} (\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{0+2\pi k}{4} + i \sin \frac{0+2\pi k}{4} \right) = 1 \left( \cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2} \right).$$

Всего получаем 4 различных значения:

При  $k = 0$   $t_0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1 (1 + i \cdot 0) = 1.$

При  $k = 1$   $t_1 = 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1 (0 + i \cdot 1) = i.$

При  $k = 2$   $t_2 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) = 1 (-1 + i \cdot 0) = -1.$

При  $k = 3^*$   $t_3 = 1 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 1 (0 + i \cdot (-1)) = -i.$

Следовательно,  $\sqrt[4]{1}$  имеет четыре различных значения:  $1; -1; i; -i$ . ◁

**З а м е ч а н и е.** Если записать формулу (10) следующим образом:

$$t_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \right) \right), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

то, учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что все точки, изображающие числа  $t_k$ , лежат на окружности радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются на  $\frac{2\pi}{n}$ , поэтому указанные точки делят окружность на  $n$  равных частей. То есть эти точки являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в эту окружность. Например, точки, изображающие все значения  $\sqrt[4]{1}$  (то есть  $\pm 1$  и  $\pm i$ ), являются вершинами правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 162).

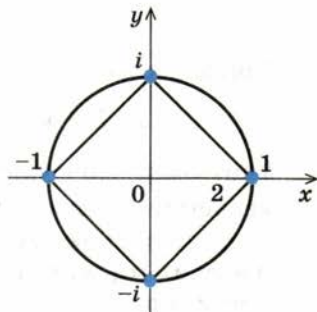


Рис. 162

### Вопросы для контроля

1. Пользуясь геометрическим изображением комплексного числа, поясните смысл понятий модуля и аргумента комплексного числа.
2. Запишите формулы, по которым для комплексного числа  $z = a + bi$  можно найти его модуль и аргумент. Приведите примеры.
3. Запишите общий вид комплексного числа в тригонометрической форме. Приведите примеры записи комплексных чисел в тригонометрической форме.
4. Объясните, в каком случае будут равными комплексные числа  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ .

\* Как было обосновано выше, если подставлять другие целые значения  $k$ , то найденные значения будут повторяться: например, при  $k = 4$  получаем:

$$t = 1 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1 (1 + i \cdot 0) = 1 = t_0.$$

- Объясните и обоснуйте геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел. Изобразите множество точек  $z$  комплексной плоскости, для которых  $|z - i| = 1$ .
- Объясните, как выполняются действия умножения, деления и возведения в степень над комплексными числами в тригонометрической форме. Запишите и докажите соответствующие формулы.
- Запишите и докажите формулу для извлечения корня  $n$ -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

### Упражнения

- Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число. Пользуясь соответствующим изображением, найдите его модуль и аргумент и запишите заданное число в тригонометрической форме:
  - $3i$ ;
  - $4$ ;
  - $-5i$ ;
  - $-7$ .
- Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
  - $\sqrt{3} + i$ ;
  - $2 + 2i$ ;
  - $3i$ ;
  - $-3 - 3i$ ;
  - $-4$ ;
  - $-1 - \sqrt{3}i$ ;
  - $-2 + 2\sqrt{3}i$ .
- Представьте в алгебраической форме число, заданное в тригонометрической форме:
  - $4 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ ;
  - $6 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ ;
  - $2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ .
- Изобразите на комплексной плоскости множество точек  $z$ , удовлетворяющих условию:
  - $|z - 2 - i| = 2$ ;
  - $|z + i| \geq 3$ ;
  - $|z + 1 - i| \leq 2$ ;
  - $|z - 3| = 4$ .
- Найдите произведение и частное комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , заданных в тригонометрической форме (результат запишите в тригонометрической и алгебраической формах):
  - $z_1 = 12 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ ,  $z_2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ;
  - $z_1 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ,  $z_2 = 3 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$ .
- Вычислите выражение, предварительно представив числитель и знаменатель в тригонометрической форме:
  - $\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ ;
  - $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{i - \sqrt{3}}$ ;
  - $\frac{1 + i}{-1 - i}$ ;
  - $\frac{-1 + i}{\sqrt{3} - i}$ .
- Возведите комплексное число в степень, предварительно представив основание степени в тригонометрической форме:
  - $(1 + i)^{16}$ ;
  - $(-\sqrt{3} + i)^{15}$ ;
  - $(\sqrt{3} + i)^{12}$ ;
  - $(1 - i)^{20}$ .
- Найдите все значения корня  $n$ -й степени из комплексного числа:
  - $\sqrt[3]{i}$ ;
  - $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$ ;
  - $\sqrt[4]{-16}$ ;
  - $\sqrt[6]{-1}$ .
- Найдите все комплексные корни уравнения:
  - $z^3 - 27 = 0$ ;
  - $z^4 + 81 = 0$ ;
  - $z^6 + 64 = 0$ ;
  - $z^4 - 625 = 0$ .



# Раздел СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ

## § 21. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Таблица 38

### Уравнения и неравенства

1. Область допустимых значений (ОДЗ)	
<p><i>Областью допустимых значений (или областью определения) уравнения (или неравенства) называется общая область определения для функций <math>f(x)</math> и <math>g(x)</math>, стоящих в левой и правой частях уравнения (или неравенства).</i></p>	<p>Для уравнения <math>\sqrt{x+2} = x</math> ОДЗ: <math>x + 2 \geq 0</math>, то есть <math>x \geq -2</math>, так как область определения функции <math>f(x) = \sqrt{x+2}</math> определяется условием <math>x + 2 \geq 0</math>, а область определения функции <math>g(x) = x</math> — множество всех действительных чисел.</p>
2. Уравнения-следствия	
<p>Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется <i>следствием</i> первого.</p> <p>Если из <i>правильности</i> первого равенства следует <i>правильность</i> каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.</p> <p><i>При этом возможно появление посторонних корней.</i> Поэтому при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения.</p>	$\sqrt{x+2} = x.$ <p>► Возведем обе части уравнения в квадрат:</p> $(\sqrt{x+2})^2 = x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2, x_2 = -1.$ <p>Проверка. <math>x = 2</math> — корень; <math>x = -1</math> — посторонний корень.</p> <p>Ответ: 2. ◁</p>

## 3. Равносильные уравнения и неравенства

Определение	Простейшие теоремы
<p>Два уравнения (неравенства) называются <i>равносильными</i> на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения.</p> <p>То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого. (Схема решения уравнений с помощью равносильных преобразований приведена в пунктах 4 и 6 этой таблицы.)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Если из одной части уравнения (неравенства) перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение (неравенство), равносильное заданному (на любом множестве).</li> <li>2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), то получим уравнение, равносильное заданному (на ОДЗ заданного уравнения).</li> </ol>

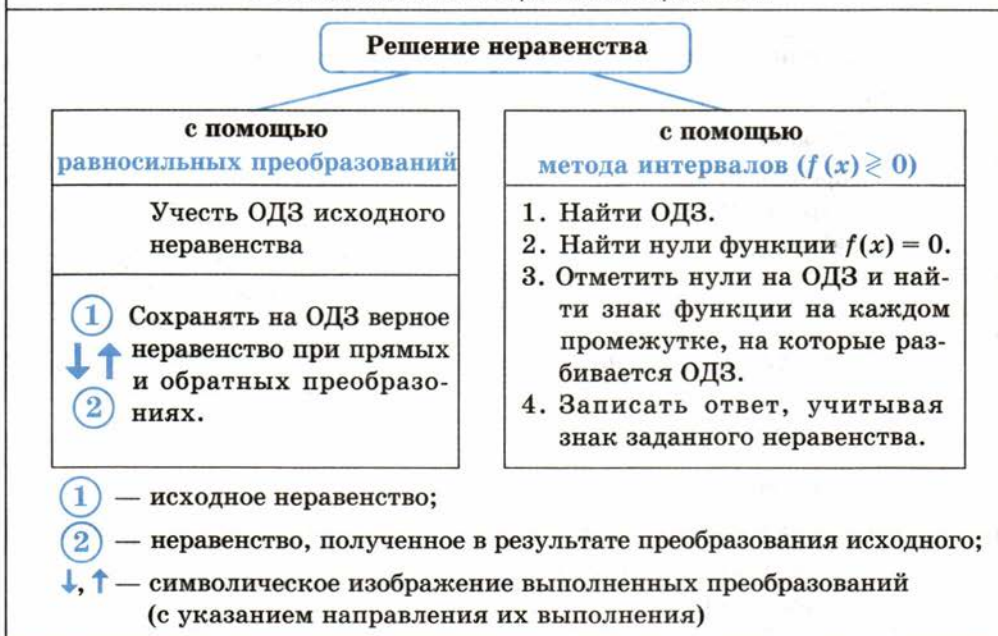
## 4. Схема поиска плана решения уравнений

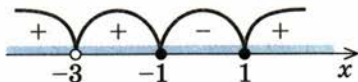


\* Применение свойств функций к решению уравнений рассмотрено также в § 11.

5. Замена переменных	
Ориентир	Пример
<p>Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).</p>	$\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0.$ <p>► Замена: <math>\sin x = t</math>,</p> $t^2 - 2t - 3 = 0,$ $t_1 = 3, t_2 = -1.$ <p>1. При <math>t = 3</math> имеем  <math>\sin x = 3</math> — корней нет,          поскольку <math> 3  &gt; 1</math>.</p> <p>2. При <math>t = -1</math> имеем  <math>\sin x = -1</math>, тогда</p> $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$ <p>Ответ: <math>-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}</math>. ◀</p>

## 6. Схема поиска плана решения неравенств



7. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \geq 0$ )	
План	Пример
<p>1. Найти ОДЗ.</p> <p>2. Найти нули функции <math>f(x) = 0</math>.</p> <p>3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции <math>f(x)</math> на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.</p> <p>4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.</p>	<p>Решите неравенство <math>\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} \geq 0</math>.</p> <p>► Пусть <math>f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2}</math>.</p> <p>1. ОДЗ: <math>(x + 3)^2 \neq 0</math>, то есть <math>x \neq -3</math>.</p> <p>2. Нули функции: <math>f(x) = 0</math>.</p> $\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} = 0, \quad x^2 - 1 = 0,$ $x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \text{ (входят в ОДЗ).}$ <p>3. </p> <p>Ответ: <math>(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)</math>. ◁</p>
8. Теоремы о равносильности неравенств	
<p>2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства), не изменяя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).</p>	
<p>3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).</p>	

## Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

1. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля		
<p><b>по определению</b></p> $ a  = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$	<p><b>с использованием геометрического смысла</b></p> <p><math> a </math> — расстояние на числовой прямой от точки <math>O</math> до точки <math>a</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math> f(x)  = a</math>.</li> <li><math> f(x)  =  g(x) </math>.</li> <li><math> f(x)  &gt; a</math>.</li> <li><math> f(x)  &lt; a</math>.</li> </ol>	<p><b>по общей схеме</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти ОДЗ.</li> <li>Найти нули всех подмодульных функций.</li> <li>Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки.</li> <li>Найти решение в каждом промежутке (и проверить, входит ли это решение в рассматриваемый промежуток).</li> </ol>
<p><b>с использованием специальных соотношений</b></p>		
<p>2. Использование геометрического смысла модуля (при <math>a &gt; 0</math>)</p>		
<ol style="list-style-type: none"> <li><math> f(x)  = a \Leftrightarrow f(x) = a</math> или <math>f(x) = -a</math>.</li> <li><math> f(x)  =  g(x)  \Leftrightarrow f(x) = g(x)</math> или <math>f(x) = -g(x)</math>.</li> <li><math> f(x)  &gt; a \Leftrightarrow f(x) &lt; -a</math> или <math>f(x) &gt; a</math>.</li> <li><math> f(x)  &lt; a \Leftrightarrow -a &lt; f(x) &lt; a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) &gt; -a, \\ f(x) &lt; a. \end{cases}</math></li> <li><math> f(x)  = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}</math></li> </ol>		

Обобщения	
6. $ f(x)  > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ или $f(x) > g(x)$ .	
7. $ f(x)  < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$	
3. Использование специальных соотношений	
1. $ u  = u \Leftrightarrow u \geq 0$ .	
2. $ u  = -u \Leftrightarrow u \leq 0$ .	
3. $ u  =  v  \Leftrightarrow u^2 = v^2$ .	
4. $ u  >  v  \Leftrightarrow u^2 > v^2$ . Тогда $ u  -  v  > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$ ; <i>знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.</i>	
5. $ u  +  v  = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$	
6. $ u  +  v  = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0, \\ v \leq 0. \end{cases}$	
7. $ u  +  v  =  u + v  \Leftrightarrow uv \geq 0$ .	
8. $ u  +  v  =  u - v  \Leftrightarrow uv \leq 0$ .	
9. $ x - a  +  x - b  = b - a \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ , где $a < b$ .	

Таблица 40

### Применение свойств функций к решению уравнений

Ориентир	Пример
1. Конечная ОДЗ	
<p>Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.</p>	$2^{\sqrt{x-1}} + 3^x = 4^{1-\sqrt{2-2x}}.$ <p>▶ ОДЗ: <math>\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2-2x \geq 0. \end{cases}</math> Тогда <math>\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 1. \end{cases}</math></p> <p>Итак, ОДЗ: <math>x = 1</math>. Проверка. <math>x = 1</math> — корень <math>(2^{\sqrt{1-1}} + 3^1 = 4^{1-\sqrt{2-2}}, 4 = 4)</math>.</p> <p>Других корней нет, поскольку в ОДЗ входит только одно число.</p> <p>Ответ: 1. ◀</p>

2. Оценка значений левой и правой частей уравнения	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">f(x) \geq a</math> <math display="block">g(x) \leq a</math> </div> <p>Если требуется решить уравнение вида <math>f(x) = g(x)</math> и выяснилось, что <math>f(x) \geq a</math>, <math>g(x) \leq a</math>, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда <math>f(x)</math> и <math>g(x)</math> одновременно будут равны <math>a</math>.</p>	$2^{x^2} = \cos \frac{x}{2}.$ <p>► Оценим значения левой и правой частей данного уравнения:  <math>f(x) = 2^{x^2} \geq 1</math> (поскольку <math>x^2 \geq 0</math>);  если <math>g(x) = \cos \frac{x}{2}</math>, то <math>-1 \leq g(x) \leq 1</math>.  Итак, <math>f(x) \geq 1</math>, <math>g(x) \leq 1</math>. Тогда данное уравнение равносильно системе</p> $\begin{cases} 2^{x^2} = 1, \\ \cos \frac{x}{2} = 1. \end{cases}$ <p>Из первого уравнения получаем <math>x^2 = 0</math>, то есть <math>x = 0</math>, что удовлетворяет и второму уравнению.</p> <p><i>Ответ: 0. ◀</i></p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">f_1(x) \geq 0,</math> <math display="block">f_2(x) \geq 0,</math> <p>.....</p> <math display="block">f_n(x) \geq 0</math> </div> $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$ <p>Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.</p>	$\sqrt{x-2} +  x^2 - 2x  + (x^2 - 4)^2 = 0.$ <p>► <math>f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0</math>, <math>f_2(x) =  x^2 - 2x  \geq 0</math>, <math>f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0</math>.  Итак, заданное уравнение равносильно системе</p> $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\  x^2 - 2x  = 0, \\ (x^2 - 4)^2 = 0. \end{cases}$ <p>Из первого уравнения получаем <math>x = 2</math>, что удовлетворяет всей системе.</p> <p><i>Ответ: 2. ◀</i></p>
3. Использование монотонности функций	
<p>Схема решения уравнения</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Подбираем один или несколько корней уравнения.</li> <li>2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку значений левой и правой частей уравнения).</li> </ol>	

Теоремы о корнях уравнения	
	<p>1. Если в уравнении <math>f(x) = a</math> функция <math>f(x)</math> возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.</p> <p style="text-align: center;">Пример</p> <p>Уравнение <math>2^x + 3^x = 5</math> имеет единственный корень <math>x = 1</math> (<math>2^1 + 3^1 = 5</math>, то есть <math>5 = 5</math>), поскольку функция <math>f(x) = 2^x + 3^x</math> возрастает (на всей области определения <math>\mathbf{R}</math>) как сумма двух возрастающих функций.</p>
	<p>2. Если в уравнении <math>f(x) = g(x)</math> функция <math>f(x)</math> возрастает на некотором промежутке, а функция <math>g(x)</math> убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.</p> <p style="text-align: center;">Пример</p> <p>Уравнение <math>5^x = 27 - x</math> имеет единственный корень <math>x = 2</math> (<math>5^2 = 27 - 2</math>, то есть <math>25 = 25</math>), поскольку <math>f(x) = 5^x</math> возрастает, а <math>g(x) = 27 - x</math> убывает (при всех <math>x \in \mathbf{R}</math>).</p>
4. «Ищи квадратный трехчлен»	
Ориентир	Пример
<p>Попытайтесь рассмотреть заданное уравнение как квадратное относительно некоторой переменной (или относительно некоторой функции).</p>	$4^x - (7 - x) \cdot 2^x + 12 - 4x = 0.$ <p>► Запишем <math>4^x = 2^{2x}</math> и введем замену <math>2^x = t</math>. Получаем</p> $t^2 - (7 - x) \cdot t + 12 - 4x = 0.$ <p>Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно <math>t</math>. Его дискриминант</p> $D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$ <p>Тогда <math>t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x + 1)}{2}</math>, то есть <math>t_1 = 4</math>, <math>t_2 = 3 - x</math>.</p> <p>Обратная замена дает <math>2^x = 4</math> (отсюда <math>x = 2</math>) или <math>2^x = 3 - x</math>. Последнее уравнение имеет единственный корень <math>x = 1</math>, так как <math>f(x) = 2^x</math> возрастает, а <math>g(x) = 3 - x</math> убывает (при всех <math>x \in \mathbf{R}</math>).</p> <p><b>Ответ:</b> 1; 2. ◁</p>



## Системы уравнений и неравенств

1. Понятие системы уравнений и неравенств	
Понятия системы и ее решений	Примеры
<p>Если ставится задача найти все общие решения двух (или больше) уравнений (неравенств) с одной или несколькими переменными, то говорят, что требуется решить <b>систему уравнений (неравенств)</b>. Записывают систему уравнений (неравенств), объединяя их фигурной скобкой.</p> <p><i>Решением системы</i> называется такое значение переменной или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), которые удовлетворяют всем уравнениям (неравенствам) системы.</p> <p><i>Решить систему уравнений (неравенств)</i> — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.</p> <p>Если система не имеет решения, то ее называют несовместной.</p>	$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя переменными. Пара чисел (5; 1), то есть $\begin{cases} x = 5, \\ y = 1 \end{cases}$ — решение системы.  $\begin{cases} x^2 - y + z = 0, \\ xy + xz + yz = 19, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ — система трех уравнений с тремя переменными.  Тройка (1; 4; 3), то есть $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ — одно из решений системы.
2. Системы-следствия	
Определение	Пример
<p>Если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, то вторая система называется <i>следствием</i> первой.</p> <p>При использовании систем-следствий возможно появление посторонних решений, потому при использовании систем-следствий проверка подстановкой решения в начальную систему является составной частью решения системы.</p>	<p>Решите систему: <math>\begin{cases} \frac{y}{x-1} = 1, \\ x^2 = y + 1. \end{cases}</math></p> <p><i>Решение.</i> Из первого уравнения системы <math>y = x - 1</math>. Подставляем во второе уравнение системы и получаем <math>x^2 = x</math>, <math>x_1 = 0</math>, <math>x_2 = 1</math>. Тогда <math>y_1 = -1</math>, <math>y_2 = 0</math>.</p> <p><i>Проверка.</i> Пара (0; -1) удовлетворяет обоим уравнениям системы и является решением системы. Пара (1; 0) не удовлетворяет первому уравнению системы и не является решением системы.</p> <p><i>Ответ:</i> (0; -1).</p>

## 3. Равносильность систем уравнений и неравенств

## Определения

Две системы уравнений (или неравенств) называются *равносильными на некотором множестве*, если на этом множестве они имеют одинаковые решения (то есть каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой).

**Если две системы не имеют решения на данном множестве, то они также считаются равносильными на этом множестве.**

*Областью допустимых значений (ОДЗ) системы* называется общая область определения всех функций, входящих в запись этой системы.

Все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.

## Простейшие свойства равносильных систем

1. Если изменить порядок записи уравнений (или неравенств) заданной системы, то получим систему, равносильную заданной.
2. Если одно из уравнений (или неравенств) системы заменить на равносильное ему уравнение (неравенство), то получим систему, равносильную заданной.
3. Если в системе уравнений из одного уравнения выразить одну переменную через другие и полученное выражение подставить вместо этой переменной во все другие уравнения системы, то получим систему, равносильную заданной.
4. Если какое-то уравнение системы заменить суммой этого уравнения, умноженное на число  $\alpha \neq 0$  и какого-то другого уравнения, умноженное на число  $\beta \neq 0$ , то получим систему, равносильную заданной.

## 4. Основные способы решения систем уравнений

## Способ подстановки

Выражаем из одного уравнения системы одну переменную через другую (или через другие) и подставляем полученное выражение вместо соответствующей переменной во все другие уравнения системы (затем решаем полученное уравнение или систему и подставляем результат в выражение для первой переменной).

**Пример.** Решить систему 
$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

**Решение.** Из первого уравнения системы  $y = 2x - 3$ . Подставляем во второе уравнение системы и получаем:  $x + 2x - 3 = 3$ . Отсюда  $x = 2$ .

$$\text{Тогда } y = 2x - 3 = 1.$$

**Ответ:** (2; 1).

## Способ сложения

Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число  $\alpha \neq 0$ , и второго уравнения, умноженного на число  $\beta \neq 0$  (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной.

**Пример.** Решить систему 
$$\begin{cases} 5x - 3y = 9, & | \cdot 2 \\ 3x + 2y = 13. & | \cdot 3 \end{cases}$$

**Решение.** Умножим обе части первого уравнения системы на 2, а второго — на 3 (чтобы получить как коэффициенты при переменной  $y$  противоположные числа) и почленно сложим полученные уравнения. Из последнего полученного уравнения находим значение  $x$ , подставляем результат в любое уравнение системы и находим значение  $y$ .

$$\begin{array}{r} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right.$$

$$19x = 57,$$

$$x = 3.$$

Тогда  $3 \cdot 3 + 2y = 13$ ,  $2y = 4$ ,  $y = 2$ .

**Ответ:** (3; 2).

## Графическое решение систем уравнений с двумя переменными

Выполняем равносильные преобразования заданной системы так, чтобы удобно было строить графики всех уравнений, входящих в систему. Затем строим соответствующие графики и находим координаты точек пересечения построенных линий — эти координаты и являются решениями системы.

## Примеры

1. Решить графически систему 
$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решение. Заданная система равносильна системе 
$$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

Графиком каждого из уравнений системы является прямая. Для построения прямой достаточно построить две ее точки.

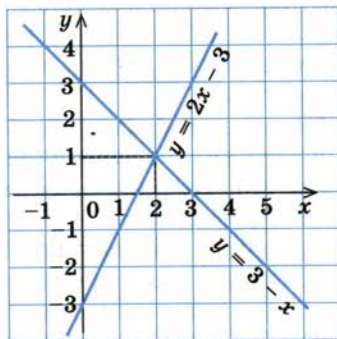
Например, для

$y = 2x - 3:$	$x$	0	1
	$y$	-3	-1

$y = 3 - x:$	$x$	0	1
	$y$	3	2

Графики пересекаются в единственной точке  $M(2; 1)$ . Итак, пара чисел  $(2; 1)$  — единственное решение заданной системы.

Ответ:  $(2; 1)$ .



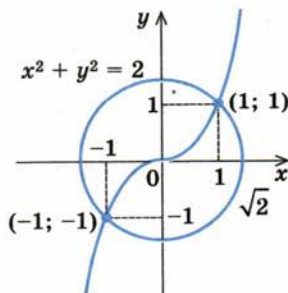
2. Решить графически систему 
$$\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

Решение. Заданная система равносильна системе 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$$

График первого уравнения — окружность радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в начале координат, а график второго — кубическая парабола  $y = x^3$ .

Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами  $(-1; -1)$  и  $(1; 1)$ .

Ответ:  $(-1; -1), (1; 1)$  — решение системы.



## Объяснение и обоснование

**1. Общие методы решения уравнений и неравенств** детально рассмотрены в учебнике 10 класса (см. в разделе 1 пункты: «Уравнения-следствия и равносильные преобразования уравнений», «Применение свойств функций к решению уравнений», «Неравенства: равносильные преобразования и общий метод интервалов», «Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля», «Уравнения и неравенства с параметрами», «Многочлены. Корни многочлена. Формулы Виета. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами»). Там же были рассмотрены и соответствующие ориентиры для использования выделенных общих методов, которые приведены в таблице 38. (Напомним, что некоторые общие методы, связанные с применением свойств функций с использованием производной к решению уравнений, также рассмотрены в этом учебнике на с. 158, таблица 17).

Рассмотрение всех уравнений и неравенств из каждой темы проводилось с использованием общих методов решения. К ним при необходимости присоединялись специальные приемы решения для некоторых типов уравнений или неравенств (см., например, схему решения тригонометрических уравнений на с. 402 или схему решения показательных уравнений на с. 405).

Аналогично можно организовать и *поиск плана решения уравнения или неравенства*.

1. Сначала *выбрать общий способ решения уравнения или неравенства и вспомнить ориентиры для его реализации* (см. пункты 4 и 6 таблицы 38). Например, если для решения уравнения вы решили использовать уравнения-следствия, то в конце обязательно придется выполнить проверку полученных корней (и, оформляя решение, записать либо саму проверку, либо предложение типа «Проверка показывает, что  $x = \dots$  — корень, а  $x = \dots$  — посторонний корень», которое свидетельствует о том, что проверку вы выполнили устно).
2. Для выполнения преобразований заданного уравнения (неравенства) *использовать соответствующие формулы* (в зависимости от вида уравнения или неравенства) *или свойства соответствующих функций либо специальные ориентиры или теоремы*, которые рассматривались при решении уравнений и неравенств определенного вида (целые или дробные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические).

Напомним, что из определения уравнения-следствия (*если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого*) получаем ориентир:

*для получения уравнения-следствия достаточно рассмотреть заданное уравнение как правильное числовое равенство и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), что каждое следующее уравнение будет правильным числовым равенством.*

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то, рассмотрев заданное уравнение как правильное числовое равенство, мы фактически

подставили в первое уравнение вместо переменной его корень. Поскольку второе уравнение тоже является правильным числовым равенством, то рассмотренный корень первого уравнения является корнем и второго уравнения, а это и означает, что второе уравнение является следствием первого. Напомним, что в результате использования уравнений-следствий возможно появление посторонних корней и поэтому проверка подстановкой корней в исходное уравнение является составной частью решения (см. решение уравнения  $\sqrt{x+2}=x$  с помощью уравнений-следствий в пункте 2 таблицы 38).

Аналогичный ориентир в курсе 10 класса был получен и для равносильных преобразований уравнений и неравенств. Напомним его: для выполнения равносильных преобразований уравнений или неравенств (см. определение в пункте 3 таблицы 38) достаточно:

1. Учесть ОДЗ заданного уравнения (неравенства).
2. Следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением правильного равенства (неравенства).

Рассуждая так же, как и в случае ориентира для уравнений-следствий, получаем следующее. Если придерживаться приведенного ориентира, то на ОДЗ каждое решение первого уравнения (неравенства) будет решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения (неравенства) будет решением первого. То есть на ОДЗ рассмотренные уравнения (неравенства) будут равносильны.

Примеры применения этого ориентира к решению уравнений и неравенств приведены в справочных таблицах 8 и 9.

*Иногда удобно выполнять равносильные преобразования не на всей ОДЗ, а только на той ее части, где находятся корни заданного уравнения (решения неравенства).*

Например, пусть для решения уравнения

$$\sqrt{x+2}=x \quad (1)$$

мы выбрали использование равносильных преобразований.

ОДЗ уравнения (1):  $x+2 \geq 0$ , то есть  $x \geq -2$ . На этой ОДЗ правая часть уравнения (1) может быть и положительной, и отрицательной. Поэтому при возведении обеих частей уравнения в квадрат мы можем гарантировать только правильность прямых преобразований (если числа равны, то и квадраты их обязательно будут равны), а обратных — нет (если  $a^2 = b^2$ , то не обязательно выполняется равенство  $a = b$ , например  $2^2 = (-2)^2$ , но  $2 \neq -2$ ).

Попробуем рассмотреть не всю ОДЗ, а только ту ее часть, где находятся корни заданного уравнения.

Для всех корней уравнения (1) должно выполняться условие  $x \geq 0$  (\*)

(поскольку при подстановке корня в уравнение (1) оно превращается в правильное равенство, в котором левая часть неотрицательна, следовательно, для всех корней и правая часть будет неотрицательной).

При условии (\*) обе части уравнения (1) неотрицательны, и при возведении в квадрат мы получаем равносильное уравнение (поскольку для неотрицательных значений аргумента функция  $y = t^2$  является возрастающей и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, поэтому при  $a \geq 0, b \geq 0$ , если  $a^2 = b^2$ , то обязательно выполняется равенство  $a = b$ ):

$$x + 2 = x^2. \quad (2)$$

Заметим, что для всех корней уравнения (2) его правая часть  $x^2 \geq 0$ , тогда и левая часть будет неотрицательной:  $x + 2 \geq 0$ . Но это означает, что для всех корней уравнения (2) ОДЗ уравнения (1) выполняется автоматически и его можно не записывать в решение (но нужно уметь объяснять, почему мы не записали ОДЗ в решение), а записывать и учитывать только ограничение (\*).

Тогда  $x^2 - x - 2 = 0$ ,  $x_1 = 2$  — корень (удовлетворяет условию (\*))  $x_2 = -1$  — посторонний корень (не удовлетворяет условию (\*)).

Ответ: 2.

**Замечание 1.** Приведенное решение можно записать также с помощью знака равносильности ( $\Leftrightarrow$ ) так:

$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x_1 = -1 \text{ или } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

**Замечание 2.** В приведенных выше рассуждениях по решению уравнения (1) мы фактически обосновали теорему (приведенную и обоснованную в учебнике 10 класса):

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases}$$

которую можно использовать при решении иррациональных уравнений вида  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ .

**2. Системы уравнений и неравенств.** С понятием системы уравнений и неравенств, их решения и с основными методами решений систем уравнений, поданными в таблице 41, вы знакомы из курса алгебры 7–9 классов (и использовали их при решении систем в 10–11 классах). Напомним, что полностью аналогично к соответствующим понятиям, связанным с уравнениями или неравенствами, вводят понятие области допустимых значений системы уравнений или неравенств (см. пункт 3 табл. 41), понятие систем-следствий для уравнений (пункт 2 табл. 41) и равносильных систем уравнений и неравенств (пункт 3 табл. 41).

Все приведенные определения относятся не только к системам уравнений или системам неравенств, но и к смешанным системам, в которые входят и уравнения, и неравенства.

Как и для уравнений, из определения системы-следствия для системы уравнений: *если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, то вторая система называется следствием первой*, получаем такой ориентир:

для получения системы-следствия достаточно рассмотреть заданную систему уравнений как систему правильных числовых равенств и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), что каждую следующую систему уравнений мы можем получить как систему правильных числовых равенств.

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то каждое решение первой системы превращает все уравнения системы в правильные числовые равенства. Но тогда вторая система тоже будет содержать все правильные числовые равенства, то есть рассматриваемые значения переменной (или упорядоченные наборы нескольких переменных) являются решением и второй системы, а это и означает, что вторая система является следствием первой. Также следует учитывать, что **при использовании систем-следствий возможно появление посторонних решений**, и потому проверка подстановкой решений в начальную систему является составляющей частью решения (см. пример в пункте 2 табл. 41).

Аналогично обосновывается, что *при равносильных преобразованиях систем уравнений или неравенств* необходимо учесть ОДЗ заданной системы и гарантировать для всех уравнений системы сохранение правильных равенств на каждом шаге решения (а для систем неравенств — сохранения правильных неравенств) не только при прямых преобразованиях, но и при обратных.

Этот ориентир позволяет обосновать простейшие свойства равносильных систем уравнений и неравенств, которые приведены в пункте 3 таблицы 41 (проведите такое обоснование самостоятельно).

Для решения некоторых систем иногда удается использовать свойства функций (см. табл. 40 и пример 3 на с. 167–168).

Следует также помнить, что для решения некоторых уравнений, неравенств и их систем бывает удобно ввести *замену переменных* (см., например, решение уравнения в пункте 5 таблицы 38).

Иногда при решении уравнений и неравенств приходится переходить не только к равносильным системам уравнений или неравенств (см., например, формулу (2)), но и к *совокупности уравнений или неравенств* (или их систем).

**Решить совокупность уравнений (неравенств или их систем) — значит найти такие значения переменной (или такие упорядоченные наборы значений переменных, если переменных несколько), каждое из которых является решением хотя бы одного из уравнений (неравенств или их систем), которые входят в совокупность, и при этом остальные уравнения (неравенства или системы) совокупности определены, или доказать, что таких наборов чисел не существует.**

Из этого определения следует, что *областью допустимых значений (ОДЗ) совокупности* считается *общая область определения для всех функций, которые входят в запись совокупности.*

Как и для уравнений, неравенств или их систем, две совокупности уравнений (неравенств или их систем) называют **равносильными на некотором**



множестве, если они на этом множестве имеют одинаковые решения. Иначе говоря, каждое решение первой совокупности на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй является решением первой. Если две совокупности не имеют решений на данном множестве, то они также считаются равносильными на этом множестве.

Совокупность уравнений, неравенств или их систем можно записывать, используя союз «или» (именно такая запись использовалась в учебнике для 10 класса). Можно также использовать специальный знак совокупности «[».

Например, уравнение  $\sqrt{2x+2}(x^2+3x-4)=0$  на его ОДЗ:  $2x+2 \geq 0$  равносильно совокупности

$$\sqrt{2x+2}=0 \quad (3)$$

$$\text{или } x^2+3x-4=0. \quad (4)$$

Уравнение (3) имеет корень  $x = -1$ , который входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (4) определено). А уравнение (4) имеет корни:  $x_1 = 1$  — входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (3) определено) и  $x_2 = -4$  — не входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (3) не определено). Таким образом, решением рассмотренной совокупности (а следовательно, и корнями заданного уравнения) являются только  $x = -1$  и  $x = 1$ .

Рассмотренное решение можно записывать, используя значки равносильности, совокупности и системы. Приведем несколько возможных способов такой записи (проанализируйте каждый из этих способов оформления), но такое оформление записи решения не является обязательным.

*I способ*

$$\sqrt{2x+2}(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+2}=0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+2}=0, \\ x^2+3x-4=0, \\ 2x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=1. \end{cases}$$

*II способ*

$$\sqrt{2x+2}(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 0, \\ \sqrt{2x+2}=0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x=-1, \\ x=1, \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=1. \end{cases}$$

*III способ*

$$\sqrt{2x+2}(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 0, \\ \sqrt{2x+2}=0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+2 \geq 0, \\ \sqrt{2x+2}=0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2 \geq 0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq -1, \\ x=1, \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=1. \end{cases}$$

**3. Уравнения и неравенства с параметрами.** Решение уравнений и неравенств с параметрами детально рассматривалось в курсе 10 класса. Для решения таких заданий часто приходится разбивать область допустимых значений параметра на такие промежутки, что при изменении параметра внутри выбранного промежутка получаем уравнения (или неравенства), которые можно решить одним и тем же методом (и решения через параметры записываются одинаково). Напомним, что методы решения заданий с параметрами в точности такие же, как и методы решения аналогичных уравнений, неравенств или их систем без параметров. Также напомним *ориентир*, который мы использовали для разбивки области допустимых значений параметра на промежутки.

*Любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.*

**Пример.** Решите уравнение  $ax + 1 = \frac{4a + 2}{x}$ , где  $x$  — переменная.

Решение	Комментарий
ОДЗ: $x \neq 0$	Выражения, стоящие в обеих частях уравнения, существуют тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю
$ax^2 + x - (4a + 2) = 0$	Умножим обе части данного уравнения на выражение $x$ — общий знаменатель для обеих частей уравнения и получим целое уравнение, которое при условии $x \neq 0$ (то есть на ОДЗ заданного уравнения) равносильно заданному
1) При $a = 0$ получаем линейное уравнение $x - 2 = 0$ . Отсюда $x = 2$ (входит в ОДЗ)	При $a = 0$ данное уравнение не является квадратным. Подставляем $a = 0$ в данное уравнение и решаем полученное уравнение (с учетом ОДЗ)
2) При $a \neq 0$ решаем квадратное уравнение: $D = 1 + 4a(4a + 2) =$ $= 16a^2 + 8a + 1 = (4a + 1)^2;$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm (4a + 1)}{2a}.$	При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение. Находим его дискриминант. Для вычисления корней уравнения целесообразно записать общую формулу для двух корней (в этом случае знак модуля можно не записывать).

<p>Тогда <math>x_1 = 2</math>, <math>x_2 = -\frac{2a+1}{a}</math>.</p> <p>Учитываем ОДЗ: <math>x_1 = 2</math> — корень (входит в ОДЗ) при любых значениях <math>a</math>.</p> <p>Поскольку <math>x_2 = 0</math> при <math>a = -\frac{1}{2}</math>, то при этом значении параметра <math>x_2 = 0</math> не является корнем данного уравнения (однако его корнем является <math>x_1 = 2</math>). При <math>a \neq -\frac{1}{2}</math> (и <math>a \neq 0</math>) значение <math>x_2 = -\frac{2a+1}{a}</math> является корнем уравнения</p>	<p>Прежде чем записывать ответ, следует обязательно выяснить, входят ли полученные значения корней в ОДЗ данного уравнения.</p> <p>Для корня <math>x_2</math> сначала нужно выяснить, при каких значениях параметра <math>a</math> его значение попадает в запрещенную область (<math>x = 0</math>). Потом можно дать ответ для найденного значения <math>\left(a = -\frac{1}{2}\right)</math> и для всех других значений <math>a</math> (учитывая, что при <math>a = 0</math> получили тот же ответ, что и при <math>a = -\frac{1}{2}</math>)</p>
<p>Ответ: 1) при <math>a = 0</math> или <math>a = -\frac{1}{2}</math> <math>x = 2</math>;</p> <p>2) при <math>a \neq 0</math> и <math>a \neq -\frac{1}{2}</math> <math>x_1 = 2</math>, <math>x_2 = -\frac{2a+1}{a}</math></p>	

Отметим, что при решении исследовательских заданий с параметрами часто решение заданных уравнений и неравенств бывает очень сложным или невозможным. В таких случаях полезно помнить специальные приемы исследования задач с параметрами, рассмотренные в курсе 10 класса. Напомним некоторые из них.

Таблица 42

### ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Исследование количества решений уравнений и их систем
Ориентир
<i>Если в задаче с параметрами речь идет о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения</i>
Особенности использования ориентира
Наиболее простым соответствующее исследование является в том случае, когда данное уравнение можно преобразовать к виду $f(x) = a$ , поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси $Ox$ (которая пересекает ось $Oy$ в точке $a$ ). Отметим, что, заменяя данное уравнение на уравнение $f(x) = a$ , нужно следить за равносильностью выполненных

преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и данное, а следовательно, количество корней у них будет одинаковым. Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = a$ , достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции  $y = f(x)$  с прямой  $y = a$  при различных значениях параметра  $a$ . (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

## Пример

Сколько корней имеет уравнение  $|x^2 - 4|x|| = a$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

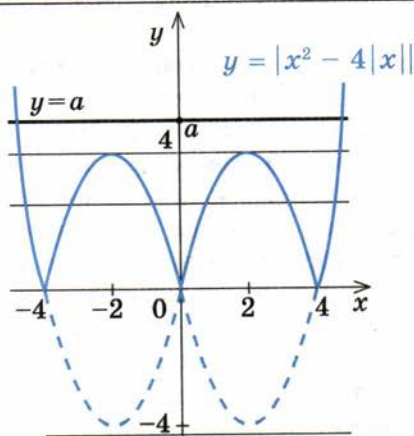
## План

## Решение

1. Построим график функции  $y = |x^2 - 4|x||$  (учитывая, что  $x^2 = |x|^2$ ), построение можно производить, например, по таким этапам:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &\rightarrow |x|^2 - 4|x| \rightarrow \\ &\rightarrow |x^2 - 4|x||. \end{aligned}$$

2. Строим график функции  $y = a$ .  
3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков: количество корней уравнения  $f(x) = a$  равно количеству точек пересечения графика функции  $y = f(x)$  с прямой  $y = a$ .  
4. Записываем ответ.



- Ответ: 1) при  $a < 0$  нет корней;  
2) при  $a = 0$  три корня;  
3) при  $0 < a < 4$  шесть корней;  
4) при  $a = 4$  четыре корня;  
5) при  $a > 4$  два корня

2. Использование четности функций, которые входят в запись уравнения

## Ориентир

*Если в уравнении  $f(x) = 0$  функция  $f(x)$  является четной или нечетной, то вместе с каждым корнем  $\alpha$  мы можем указать еще один корень этого уравнения  $(-\alpha)$*

## Пример

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых имеет единственный корень уравнение

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0. \quad (1)$$

*Решение*

Функция  $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$  является четной ( $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ ). Если  $x = \alpha$  — корень уравнения (1), то  $x = -\alpha$  тоже является корнем этого уравнения.

Поэтому единственный корень у данного уравнения может быть только тогда, когда  $\alpha = -\alpha$ , то есть  $\alpha = 0$ .

Таким образом, единственным корнем данного уравнения может быть только  $x = 0$ .

Если  $x = 0$ , то из уравнения (1) получаем  $a^2 - a = 0$ , то есть  $a(a - 1) = 0$ . Отсюда  $a = 0$  или  $a = 1$ . При  $a = 0$  уравнение (1) превращается в уравнение  $x^2 = 0$ , имеющее единственный корень  $x = 0$ . Таким образом,  $a = 0$  удовлетворяет условию задачи.

При  $a = 1$  имеем уравнение

$$\begin{aligned} \cos^2 x - x^2 - 1 = 0, \text{ то есть} \\ \cos^2 x = 1 + x^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку  $\cos^2 x \leq 1$ , а  $1 + x^2 \geq 1$ , то уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем  $x = 0$ , что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, эта система, а значит, и уравнение (2) имеют единственное решение  $x = 0$ . Следовательно,  $a = 1$  также удовлетворяет условию задачи.

*Ответ:*  $a = 0, a = 1$

*Комментарий*

Отмечаем, что в левой части данного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир. Действительно, если  $x = \alpha$  — корень уравнения  $f(x) = 0$ , то  $f(\alpha) = 0$  — верное числовое равенство.

Учитывая четность функции  $f(x)$ , имеем  $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$ . Таким образом,  $x = -\alpha$  — тоже корень уравнения  $f(x) = 0$ . Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни  $\alpha$  и  $-\alpha$  совпадают. Тогда  $x = \alpha = -\alpha = 0$ .

Выясним, существуют ли такие значения параметра  $a$ , при которых  $x = 0$  является корнем уравнения (1). (Это  $a = 0$  и  $a = 1$ .)

Поскольку значения  $a = 0$  и  $a = 1$  мы получили из условия, что  $x = 0$  — корень уравнения (1), то необходимо проверить, действительно ли при этих значениях  $a$  данное уравнение будет иметь единственный корень.

Для решения уравнения (2) оценим его левую и правую части:

$$f(x) = \cos^2 x, \quad g(x) = 1 + x^2.$$

$$\cos^2 x = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad g(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1 \end{cases}$$

## Вопросы для контроля

1. Что называется решением: а) уравнения; б) неравенства; в) системы уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств? Приведите примеры.
2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ): а) уравнения; б) неравенства; в) системы уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств.
3. Дайте определение системы-следствия данной системы уравнений. Приведите примеры.
4. Дайте определение равносильности: а) уравнений; б) неравенств; в) систем уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств. Приведите примеры равносильных преобразований. Объясните, почему выполненные преобразования являются равносильными.
5. Назовите основные методы решения: а) уравнений; б) неравенств; в) систем уравнений и неравенств и приведите примеры их использования.

## Упражнения

Решите уравнения (1–32).

- 1 (МИРЭА). 1)  $x = \sqrt{3x+40}$ ; 2)  $x = \sqrt{10x+24}$ ;  
 3)  $x = \sqrt{5x+36}$ ; 4)  $x = \sqrt{3x+28}$ .
- 2 (МИРЭА). 1)  $\sqrt{10-x} = 4-x$ ; 2)  $\sqrt{x-1} = x-3$ ;  
 3)  $\sqrt{1+x} = 2x-4$ ; 4)  $\sqrt{x+7} = 4x-5$ ;  
 5)  $x+3\sqrt{x-5} = 5$ ; 6)  $x+2\sqrt{x-6} = 6$ ;  
 7)  $\sqrt{x^4-3x-1} = x^2-1$ ; 8)  $\sqrt{x^4+x-9} = x^2-1$ ;  
 9)  $\sqrt{x(x-2)(x+3)} = 3-x$ ; 10)  $\sqrt{x(x+4)(x-3)} = 6-x$ .
- 3 (МГУ, геогр. ф-т). 1)  $\sqrt{3x+3} = 2x-3$ ; 2)  $\sqrt{3x+2} = 2x-4$ ;  
 3)  $x+1 = 2-\sqrt{x-1}$ ; 4)  $1-\sqrt{x-2} = x-1$ .
- 4 (МИРЭА). 1)  $x^2-13x+30 = (\sqrt{3x-18})^2$ ; 2)  $x^2-9x+13 = (\sqrt{5x-35})^2$ ;  
 3)  $x^2-8x+10 = (\sqrt{7x-40})^2$ ; 4)  $x^2-15x+55 = (\sqrt{x-8})^2$ .
- 5 (МИРЭА). 1)  $\sqrt{3x-5} = 3-2x$ ; 2)  $\sqrt{4x^2+4x+1} = x^2+x-1$ ;  
 3)  $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$ ;  
 4\*)  $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8$ .

6 (МГУ, социол. ф-т). 1)  $\sqrt{y-1}=6-y$ ; 2)  $\sqrt{x+1}=4-x$ ;  
 3)  $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$ ; 4)  $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-2$ .

7 (МГУ, геогр. ф-т). 1)  $5\sqrt{x-2}+3\sqrt{x+1}+2x=17$ ;  
 2)  $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}+5x=14$ .

8.1)  $\sin 2x = \sqrt{3} \cos x$ ; 2)  $\sin 2x = \sqrt{2} \sin x$ .

9.1)  $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 0$ . Укажите все корни, которые принадлежат отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;

2)  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$ . Укажите все корни, которые принадлежат отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

10. 1)  $\sin(0,5\pi + x) + \sin 2x = 0$ ; 2)  $\cos(0,5\pi + x) + \sin 2x = 0$ .

11. 1)  $\sin 4x + \sqrt{3} \sin 3x + \sin 2x = 0$ ; 2)  $\cos 3x + \sin 5x = \sin x$ .

12 (МИРЭА)\*. 1)  $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$ ; 2)  $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x$ ;  
 3)  $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 16 \cos 2x$ .

13 (МГУ, почв. ф-т). 1)  $\sin 2x = \cos x$ ; 2)  $\cos 2x = \sin x$ .

14. 1)  $\sqrt{3} \sin^2 x + 0,5 \sin(\pi + 2x) = 0$ ; 2)  $\sqrt{3} \cos^2 x - 0,5 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$ .

15\*. 1) Найдите все решения уравнения  $\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$ , которые удовлетворяют неравенству  $\cos x < \frac{1}{2}$ ;

2) Найдите все решения уравнения  $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 2 \operatorname{ctg}^2 x$ , которые удовлетворяют неравенству  $\cos x < -\frac{1}{2}$ .

16 (МИРЭА). Найдите все решения уравнения:

1)  $\cos x + \cos 5x - \cos 2x = 0$ , которые принадлежат отрезку  $[-\pi; \pi]$ ;

2)  $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$ , которые принадлежат отрезку  $[0; 2\pi]$ .

17 (МГУ, геогр. ф-т). 1)  $3 \cos 2x + 4 \sin x = 1$ ;

2)  $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$ ,  $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$ ;

3)  $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sin x$ .

18 (МГУ, биол. ф-т). 1)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$ ;

2)  $\sin x = 2 \operatorname{ctg} x$ ; 3)  $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x$ .

$$19. 1) \left| x - \frac{3}{7} \right| = \frac{2}{7}; \quad 2) \left| x - \frac{5}{8} \right| = \frac{3}{5}.$$

$$20 \text{ (МИРЭА). } 1) |14 - x| = x^2 - 196; \quad 2) |16 - x| = x^2 - 256;$$

$$3) |19 - x| = x^2 - 361; \quad 4) |17 - x| = x^2 - 289.$$

$$21 \text{ (МГУ, хим. ф-т). } 1) x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|;$$

$$2) x^2 + 1 + |x + 1| = 2|x|.$$

$$22. 1) x^2 - 6|x| - 2 = 0;$$

$$2) x^2 + 4|x| - 1 = 0;$$

$$3) |x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0;$$

$$4) |x^2 - 2x - 1| + x - 4 = 0;$$

$$5) \frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1;$$

$$6) \frac{|x|}{x} + 2x = x^2 + 1.$$

$$23 \text{ (МГУ, экон. ф-т). } 1) |x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|; \quad 2) |2x + 3| = x^2.$$

$$24^* \text{ (МГУ, почв. ф-т). } 1) \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \sin x - \frac{1}{2};$$

$$2) \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \cos x - \frac{1}{2};$$

$$3) |\cos x| - \sqrt{3} \sin \left( \frac{9\pi}{2} + x \right) = 1.$$

$$25^*. \sqrt{|2x+1|} = 1 - 2|x|;$$

$$2) \sqrt{|1-3x|} = 1 - 3|x|.$$

$$26. 1) (2x-7)\sqrt{3x^2-5x-2} = 0;$$

$$2) (2x-3)\sqrt{4x^2-5x-9} = 0;$$

$$3) (3x^2-8x-11)\sqrt{3x-5} = 0;$$

$$4) (4x^2+3x-22)\sqrt{3x-15} = 0.$$

$$27 \text{ (МГУ, ФНМ). } 1) (7 \sin x - 4\sqrt{3})(7 \sin x - 5\sqrt{2}) = 0;$$

$$2) (5 \cos x - 3\sqrt{3})(5 \cos x - 2\sqrt{6}) = 0.$$

$$28^* \text{ (МГУ, хим. ф-т). } 1) (\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0;$$

$$2) (\cos x + \sin x + \sqrt{2})\sqrt{-x^2 - 7x - 12} = 0.$$

$$29^* \text{ (МГУ, мехмат). } 1) (2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0;$$

$$2) (2 \cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0;$$

$$3) \sqrt{4x - x^2 - 3}(\sqrt{2} \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) = 0.$$

$$30^* \text{ (МГУ, хим. ф-т). } 1) \arcsin \frac{6x-7}{2x-3} = 2\pi - \pi x;$$

$$2) x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0.$$

$$31^*. 1) \log_{\sin x} (3 \sin x - \cos x) = 0;$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$



**32\*** (РЭА). Найдите наибольший корень уравнения:

$$1) \left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8;$$

$$2) (2\sqrt{3}-2)^x + 2^{x+1} = 2(\sqrt{3}+1)^x.$$

**Решите неравенство (33–57).**

**33.** 1)  $3x^2 + 2x + 1 \geq 0;$

2)  $-x^2 + 2x - 3 > 0.$

**34.** 1)  $x^3 - 3x - 2 < 0;$

2)  $x^3 - 3x^2 + 4 > 0.$

**35.** 1)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} < 0;$

2)  $\frac{x^2 - 6x + 18}{-x^2 + 8x - 12} > 0.$

**36.** 1)  $\frac{3}{x-2} \geq x;$       2)  $x \geq \frac{2}{x-1};$

3)  $\frac{x^2 - 1}{x + 5} < 1;$       4)  $\frac{2x - 1}{x - 3} < x + 3.$

**37 (МФТИ).** 1)  $\frac{5}{2-x} > 1 + \frac{3}{x+2};$

2)  $\frac{5}{x+4} < 1 + \frac{1}{4-x};$

3)  $\frac{2}{3-x} > 1 - \frac{3}{x+2};$

4)  $\frac{7}{x+5} < 1 + \frac{2}{5-x}.$

**38 (МИРЭА).** 1)  $\sqrt{12x-11} < \sqrt{10x-9};$

2)  $\sqrt{11x-9} < \sqrt{9x-7};$

3)  $\sqrt{10x-7} < \sqrt{9x-5};$

4)  $\sqrt{10x-9} < \sqrt{8x-7}.$

**39 (МФТИ).** 1)  $\sqrt{x^2-9} < 14-2x;$

2)  $\sqrt{x^2-6x} < 8+2x;$

3)  $2-3x < \sqrt{4+9x-9x^2};$

4)  $4-5x < \sqrt{16+30x-25x^2}.$

**40\* (МИРЭА).** 1)  $\sqrt{3-x} > x-2;$

2)  $\frac{1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}} > 2.$

**41\* (МГУ, псих. ф-т).** 1)  $\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1;$       2)  $\frac{3x-2}{\sqrt{5x-2}} < 1;$       3)  $\sqrt{x^2-8x+12} \geq x-5.$

**42.** 1)  $3 \log_8 (3x+2) < 2;$

2)  $4 \log_{16} (4x+3) < 3;$

3)  $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}} (1-3x) > 2;$

4)  $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}} (2x-1) > 2;$

5)  $\log_{0,5} (3-2x) > -\log_{0,5} 3;$

6)  $\log_2 (2x-5) < -\log_2 3.$

**43.** 1)  $\log_{0,4} (3,5-5x) > 2 \log_{0,4} 0,2 - 1;$

2)  $1 + 2 \log_2 0,3 > \log_2 (1,5-3x).$

**44\*.** 1)  $\log_{\sqrt{2}} (5^{x+1} - 25^x) \leq 4;$

2)  $\log_{\sqrt{6}} (7^{x+1} - 49^x) \leq 2;$

3)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2;$

4)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2^{x+2} - 4^x) \geq -2.$

$$45. 1) \operatorname{tg} 3x > 0; \quad 2) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 1; \quad 3) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$4) \operatorname{ctg} 2x \leq 0; \quad 5) \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) > \sqrt{3}; \quad 6) \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1.$$

$$46^*. 1) 5 \sin x - \sin 2x > 0; \quad 2) 5 \cos x + \sin 2x < 0.$$

$$47^* (\text{МГУ, МСАиА}). 1) 2 \sin x - 1 \leq \sqrt{6 \sin^2 x - 6 \sin x - 12};$$

$$2) 16 \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leq 7; \quad 3) 16 \sin^2 x + 9 \operatorname{ctg}^2 x \leq 15.$$

$$48 (\text{МГУ, биол. ф-т}). 1) 2x > |x| + 1; \quad 2) x^2 - 6 \geq |x|;$$

$$3) \frac{4}{|x+2|} \geq 3-x; \quad 4) \frac{3}{|x-1|} \geq 2x+5.$$

$$49^* (\text{МГТУ}). 1) \frac{4|2-x|}{4|x|} - |x-2| \leq 0; \quad 2) |1-x| + \frac{4|1-x|}{|x|-3} \geq 0;$$

$$3) |x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$$

$$50^*. 1) \frac{4^{\frac{1}{x}} - 4}{2+x} < 0; \quad 2) \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{x-2} > 0; \quad 3) \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{x+2} < 0.$$

$$51. 1) (x^2 - 9)\sqrt{x+6} > 0; \quad 2) (16 - x^2)\sqrt{8-x} < 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - 9}(x+8) > 0; \quad 4) (x-4)\sqrt{x^2 - 4} < 0.$$

$$52. 1) (x-2)(x-3)\sqrt{x-1} \leq 0; \quad 2) (x+2)(x+3)\sqrt{x+11} \leq 0;$$

$$3) (x-4)(x+3)\sqrt{x} \geq 0; \quad 4) (x-8)(x+7)\sqrt{x} \geq 0.$$

$$53 (\text{МГТУ}). 1) \frac{\sqrt{6+5x-x^2}}{x-2} < 0; \quad 2) \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2} < 0; \quad 3) \frac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3} > 0;$$

$$4) \frac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}} < 0; \quad 5) \frac{3x+2}{\sqrt{2-x-x^2}} > 0; \quad 6) \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}} < 0.$$

$$54. 1) \frac{|x-4| - \sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x+x-13}} \geq 0; \quad 2) \frac{x-11+5\sqrt{7-x}}{|x-1| - \sqrt{x+1}} \leq 0;$$

$$3) \frac{|x-5| - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{11-x+x-12}} \geq 0; \quad 4) \frac{x+2-7\sqrt{6-x}}{|x-3| - \sqrt{x+3}} \leq 0.$$

$$55^* (\text{МГУ, почв. ф-т}). 1) 2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}; \quad 2) 3^x + 3^{|x|} \leq 3;$$

$$3) 3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}; \quad 4) 2 \cdot 9^{\sqrt{8-x}} + 2 < 5 \cdot 3^{\sqrt{8-x}}.$$

$$56^* \text{ (ГУУ). } \quad 1) \frac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2} \leq 1; \quad 2) \frac{\lg(2x+9)}{\lg(2x+3)^2} \leq 1;$$

$$3) \frac{\lg\left(\frac{x}{2}+9\right)}{\lg\left(\frac{x}{2}+3\right)^2} \leq 1; \quad 4) \frac{\lg\left(\frac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\frac{x}{3}-1\right)^2} \leq 1.$$

$$57^* \text{ (МГУ, биол. ф-т). } \quad 1) \frac{\log_2 x - 3}{6 \log_x 2 - 1} \leq 2; \quad 2) \log_{(x-2)} x \leq \log_{(x-2)} 4.$$

Решите систему уравнений (58–62).

$$58 \text{ (МИРЭА). } \quad 1) \begin{cases} x - 3y^2 = 8, \\ x + 4y^2 = 15; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 5y^2 = 10, \\ x + 3y^2 = 18; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 7y^2 = 9, \\ x + 2y^2 = 18; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - 2y^2 = 12, \\ x + 7y^2 = 21. \end{cases}$$

$$59. \quad 1) \begin{cases} 4^{2y} + 3^{2x} = 82, \\ 3^x - 4^y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3^y + 5^{2x} = 26, \\ 5^x - 3^{0,5y} = 4. \end{cases}$$

$$60. \quad 1) \begin{cases} 3^{x^2 - 2xy} = 1, \\ 2 \log_3 (y+2) = \log_3 (5x-2); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2^{y^2 - 3xy} = 1, \\ 2 \log_2 (x+1) = \log_2 (3y-5). \end{cases}$$

$$61. \quad 1) \begin{cases} 2^{y-3} = 8^{x-2}, \\ 2 \log_3 (y-x) - \log_3 x = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2^y = 4^{x-3}, \\ 2 \log_2 (x-y) - \log_2 y = 1. \end{cases}$$

$$62^* \text{ (МГУ, геол. ф-т). } \quad 1) \begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4+xy; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{y+x} = 3^x \cdot 5^y, \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

Решите задачи с параметрами (63–71).

63 (МИФИ). При каких значениях  $c \in \mathbf{R}$  для действительных корней  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $x^2 + (4c - c^2 - 1)x + 2c^2 - 1 = 0$  выполняется равенство  $x_1 + x_2 = 6$ ?

64. 1) Постройте график квадратного трехчлена  $y = x^2 + 3x + a$ , если известно, что его корни связаны соотношением  $x_1^2 + x_2^2 = 5$ .

2) Постройте график квадратного трехчлена  $y = x^2 - x - a$ , если известно, что его корни связаны соотношением  $x_1^3 + x_2^3 = 4$ .

65\* (ВШЭ). Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение:

- 1)  $2|x+1| - 2|x-2| + |x-6| = x + 3a$  имеет ровно один корень;
- 2)  $2|x+3| - 2|x-2| + |x-4| = x + 2a$  имеет ровно два корня;
- 3)  $|x^2 - 8x - a| = 4x$  имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 11,5;
- 4)  $|x^2 - 4x + a| = x$  имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 4.

66 (ВШЭ). Для каждого значения параметра  $b$  найдите число корней уравнения:

- 1)  $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$ ;
- 2)  $6x^2 + 18x + |12x + 36| = b$ ;
- 3)  $4x^2 + 12x + |8x + 24| = b$ ;
- 4)  $4x^2 + 8x + |24x + 48| = b$ .

67\* (МИФИ). Для каждого значения параметра  $c$  решите уравнение:

- 1)  $\sqrt{\frac{x}{4} + 2} = c + \sqrt{\frac{x}{4} - 3}$ ;
- 2)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = c - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ ;
- 3)  $\sin\left(c\sqrt{x-1} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5$ ;
- 4)  $(2^{-x} + 4 + 3c)(5 - c - 2^{-x}) = 0$ .

68 (МГТУ). Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых уравнение  $8 + 4p(x - 2) = (x - |x|)$  имеет единственное решение. Найдите все решения при каждом  $p$ .

69\*. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $144^{-|2x-1|} - 2 \cdot 12^{-|2x-1|} + 12a = 0$  имеет хотя бы один корень.

70. Для каждого значения параметра  $a$  решите неравенство.

- 1) (МГУ, ВМиК)  $|2x + a| \leq x + 2$ ;
- 2) (МГУ, физ ф-т)  $3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0$ .

71. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|2x + 6| + |2x - 8| = ax + 12$  имеет единственное решение?

Решите задачу (72–93).

72 (МГУ, почв. ф-т). Какое количество воды нужно прибавить к 1 литру 10%-ного водного раствора спирта, чтобы получить 6%-ный раствор?

73 (МГУ, почв. ф-т). Имеется 1 литр 6%-ного раствора спирта. Сколько литров 3%-ного раствора спирта нужно прибавить к первому раствору, чтобы получить 5%-ный раствор?

74. Из пункта А выехал колесный трактор со скоростью 25 км/час. Через час вслед за ним одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость грузовика постоянная и составляет  $\frac{3}{4}$  скорости легкового автомобиля. Найдите скорость грузовика, если известно, что он догнал трактор на 10 минут позже, чем легковой автомобиль.

75. От пристани по водохранилищу со скоростью 10 км/ч отправилась яхта. Через полтора часа от той же пристани за яхтой отправились два катера с постоянными скоростями, причем скорость первого катера составляла  $\frac{4}{3}$  скорости второго. Найдите скорость первого катера, если известно, что он догнал яхту на 15 минут раньше, чем второй.
76. Двое рабочих выполнили определенную работу за 20 дней. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый из них, работая отдельно, если известно, что первому пришлось бы работать на 9 дней больше, чем второму?
77. Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий?
78. Заполнение бассейна водой через первую трубу требует на 3 часа меньше времени, чем его освобождение от воды через вторую. За какое время заполняется бассейн через первую трубу, если известно, что при открытых двух труб бассейн заполняется водой за 18 часов?
79. Товарный поезд был задержан в пути на 12 минут, а затем на расстоянии 60 км наवरстал упущенное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти начальную скорость поезда.
80. На протяжении 7 часов 20 минут судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось назад. Скорость течения равна 4 км/ч. С какой скоростью судно шло по течению?
81. Поезд вышел из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 230 км. Через час навстречу ему вышел из пункта В второй поезд, скорость которого на 15 км/ч больше первого. Определить скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 км от пункта А.
- 82 (СПБГУТиД). Смешали 20%-ный и 40%-ный растворы соляной кислоты и получили 25%-ный раствор. Найти отношение масс начальных растворов.
- 83 (НГУ). Имеется два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом — 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?
84. В смеси пшеничной и ржаной муки содержится 55% ржаной муки. Если к этой смеси прибавить еще 36 кг ржаной муки, то ее содержание в смеси достигнет 75%. Найти массу начальной смеси.
85. Морская вода содержит по весу 5% соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 60 кг морской воды, чтобы содержание соли в ней составляло 3%?
- 86 (СПБУЭФ). Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получим сухих грибов из 22 кг свежих?
87. В траве влага составляет  $\frac{7}{10}$  от общей массы, а в сене —  $\frac{1}{10}$ . Сколько нужно скосить травы, чтобы заготовить 1 тонну сена?

- 88\* (СПбГЭТУ). Задано двузначное натуральное число, у которого число десятков на единицу больше числа единиц, а произведение его цифр на 45 больше утроенного числа его десятков. Найти это число.
- 89\* (МГТА). Тете сейчас 40 лет. Она вчетверо старше, чем была ее племянница тогда, когда тете было столько лет, сколько сейчас племяннице. Какой возраст племянницы?
- 90\* (СПИКиТ). В двух домах более 31 квартиры. Число квартир в первом доме, увеличенное на 21, более чем в три раза превышает число квартир во втором доме. Удвоенное число квартир в первом доме меньше утроенного числа квартир во втором доме, увеличенного на единицу. Сколько квартир в каждом доме?
- 91\* (МТУСИ). Есть три сплава. Первый содержит 30% никеля и 70% марганца, второй — 10% марганца и 90% меди, третий — 15% никеля, 25% марганца и 60% меди. Из них приготовили сплав, масса которого 15 кг, который содержит 40% меди и 42% марганца. Какое количество первого, второго и третьего сплава взяли для этого?
- 92\* (МГУ, эк. ф-т, ВШЭ). Жидкость налита в бутылки емкостью по 40 литров, при этом одна из бутылей оказалась не совсем полной. Если эту жидкость перелить в бутылки вместимостью по 50 литров, то такие бутылки будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если эту же жидкость перелить в бутылки вместимостью по 70 литров, то понадобится еще меньше на 4 бутылки. При этом опять одна бутылка будет не совсем полной. Сколько было литров жидкости?
- 93\* (МГУ, эк. ф-т). Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором —  $6\frac{2}{3}\%$ , на третьем —  $6\frac{1}{4}\%$  и на четвертом —  $14\frac{2}{7}\%$  в месяц. По окончании реконструкции начальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить длительность периода реконструкции.

## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 1

## Разложение алгебраических выражений на множители

1. Формулы сокращенного умножения	
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$	$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
2. Основные приемы разложения многочлена на множители	
Вынесение общего множителя за скобки	$8a^3 + 10a^2b^3 - 6ab = 2a(4a^2 + 5ab^3 - 3b)$
Способ группировки	$\begin{aligned} xy + 3yz - x^2 - 3xz &= \\ = y(x + 3z) - x(x + 3z) &= \\ = (x + 3z)(y - x) \end{aligned}$
Применение формул сокращенного умножения	$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2 - 8)(a^2 + 8)$
3. Разложение на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ )	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного трехчлена, то есть корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Поскольку $2x^2 + 3x - 5 = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$ , то $2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 1)(2x + 5)$
4. Обобщение некоторых формул сокращенного умножения	
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Примеры.	$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
При $b = 1$	$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^2 + a + 1)$
Для нечетных натуральных $n$	
$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Примеры.	$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
При $b = 1$ (и $n = 2k + 1$ )	$a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \dots + a^2 - a + 1)$

Свойства корней  $n$ -й степени

Основные формулы корня $n$ -й степени (только для неотрицательных значений $a$ и $b$ , то есть при $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$ )	Можно ли применять основные формулы для любых $a$ и $b$ из ОДЗ левой части формулы (если нельзя — дается обобщенная формула)	
	корень нечетной степени	корень четной степени
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	можно	только для неотрицательных $a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	можно	$\sqrt[2k]{a^{2k}} =  a $
3. Корень из корня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	можно	можно
4. Корень из произведения $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ и произведение корней $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	можно	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{ a } \sqrt[2k]{ b }$  можно
5. Корень из частного $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$ и частное корней $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	можно	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{ a }}{\sqrt[2k]{ b }}$  можно
6. Основное свойство корня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mk}}$ и наоборот $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	можно, если все корни нечетной степени (то есть переход нечетная $\rightarrow$ нечетная)	Переход четная $\rightarrow$ четная можно  Переход нечетная $\rightarrow$ четная $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m \geq 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m < 0 \end{cases}$  $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{ a^m }$
7. Вынесение множителя из-под знака корня $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$	можно	$\sqrt[n]{a^n b} =  a  \sqrt[n]{b}$
8. Внесение множителя под знак корня $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	можно	$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a < 0, \end{cases}$ где $b \geq 0$



## Свойства логарифмов

1. Логарифм числа	
Определение	Примеры
<p><i>Логарифмом положительного числа <math>b</math> по основанию <math>a</math> (<math>a &gt; 0</math>, <math>a \neq 1</math>) называется показатель степени, в которую необходимо возвести <math>a</math>, чтобы получить <math>b</math>.</i></p>	<p>1) <math>\log_4 16 = 2</math>, поскольку <math>4^2 = 16</math>;            2) <math>\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}</math>, так как <math>7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}</math>;            3) <math>\lg 1000 = 3</math>, поскольку <math>10^3 = 1000</math>.</p>
2. Основное логарифмическое тождество	
$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$	<p>1) <math>3^{\log_3 5} = 5</math>;      2) <math>10^{\lg 2} = 2</math>.</p>
3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования ( $a > 0, a \neq 1$ )	
1) $\log_a 1 = 0$	2) $\log_a a = 1$
При $x > 0, y > 0$	Обобщения
3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	При $xy > 0$ $\log_a (xy) = \log_a  x  + \log_a  y $
4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	При $\frac{x}{y} > 0$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a  x  - \log_a  y $
5) $\log_a x^n = n \log_a x$	При $x \neq 0$ $\log_a x^{2k} = 2k \log_a  x $
4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием	
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0$	
Следствия	
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_a b^k$

## Тригонометрические формулы и уравнения

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента									
<p style="text-align: center;"><math>x^2 + y^2 = 1</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\cos \alpha = x</math> <math>\sin \alpha = y</math></p>			<p>Основное тригонометрическое тождество</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$						
			$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$		$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$				
			$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$		$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$				
			$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$						
2. Тригонометрические функции двойного аргумента									
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$					$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$				
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$									
3. Значение тригонометрических функций некоторых аргументов									
$\alpha$	градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

## 4. Косинус разности и суммы

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

## 5. Синус суммы и разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

## 6. Тангенс суммы и разности

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

## 7. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

## 8. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

9. Формула преобразования выражения  $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ 

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

где аргумент  $\varphi$  определяется из соотношений

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

10. Решение уравнений  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$ 

$\sin x = a$ $ a  > 1$ $ a  \leq 1$ <b>Корней нет</b> $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = a$ $ a  > 1$ $ a  \leq 1$ <b>Корней нет</b> $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$
---	---

## Частные случаи

$\sin x = 0$ $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 1$ $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

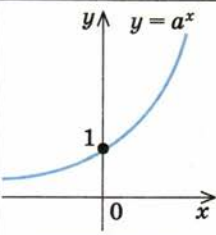
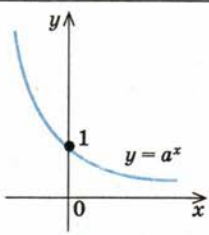
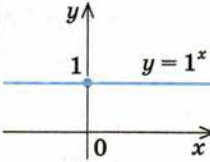
11. Решение уравнений  $\operatorname{tg} x = a$  и  $\operatorname{ctg} x = a$ 

$\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ Частный случай $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ Частный случай $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
--	--

## 12. Схема решения более сложных тригонометрических уравнений

1. Пробуем привести все тригонометрические функции к одному аргументу.
2. Если удалось привести к одному аргументу, то пробуем все тригонометрические выражения привести к одной функции.
3. Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции — нет, тогда пробуем привести уравнение к однородному.
4. В других случаях переносим все члены в одну сторону и пробуем получить произведение или используем специальные приемы решения.

## Простейшие показательные уравнения

1. Основные формулы и соотношения			
$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ $(ab)^u = a^u \cdot b^u$ $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}, \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$ $(a^u)^v = a^{uv}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	График функции $y = a^x$ ( $a > 0$ )		
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
	 <p>возрастает</p>	 <p>убывает</p>	 <p>постоянная</p>
2. Схема равносильных преобразований простейших показательных уравнений			
Ориентир		Пример	
При $a > 0$ и $a \neq 1$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$		$3^{2x+4} = 9.$ $\blacktriangleright 3^{2x+4} = 3^2,$ $2x + 4 = 2,$ $x = -1.$ <b>Ответ:</b> $-1. \triangleleft$	$6^{x+3} = -36.$ $\blacktriangleright$ Корней нет (поскольку $6^t > 0$ для всех $t$ ) <b>Ответ:</b> корней нет. $\triangleleft$
3. Приведение некоторых показательных уравнений к простейшим			
Ориентир		Пример	
1) Если в левой и правой частях показательного уравнения стоят только произведения, частные, корни или степени, то целесообразно с помощью основных формул попробовать записать обе части уравнения как степени с одним основанием.		$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}.$ $\blacktriangleright 2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}, \quad 2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2}-4x},$ $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x, \quad x = \frac{1}{2}.$ <b>Ответ:</b> $\frac{1}{2}. \triangleleft$	
2) Если в одной части показательного уравнения стоит число, а в другой все члены содержат выражение вида $a^{bx}$ (показатели		$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23.$ $\blacktriangleright 5^{x-2}(5^2 - 2) = 23,$ $5^{x-2} \cdot 23 = 23, \quad 5^{x-2} = 1,$	

степеней отличаются только свободными членами), то удобно в этой части уравнения вынести за скобки наименьшую степень а	$5^{x-2} = 5^0, x - 2 = 0,$ $x = 2.$ <p>Ответ: 2. ◀</p>
---	---

Таблица 6

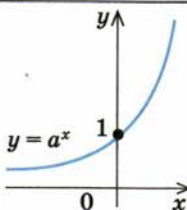
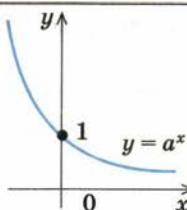
## Решение более сложных показательных уравнений



Схема поиска плана решения показательных уравнений	
Ориентир	Пример
<p>1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней (используя справа налево основные формулы действий над степенями, приведенные в табл. 5).</p>	$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.$ <p>▶ <math>4^x \cdot 4^1 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.</math> Учитывая, что <math>4^x = 2^{2x}</math>, приведем все степени к одному основанию 2: <math>4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.</math></p>
<p>2. Если возможно, приводим все степени (с переменной в показателе) к одному основанию и выполняем замену переменной.</p>	<p>Замена <math>2^x = t</math> дает уравнение <math>4t^2 - 3t - 10 = 0, t_1 = 2, t_2 = -\frac{5}{4}.</math> Обратная замена дает <math>2^x = 2</math>, тогда <math>x = 1</math> или <math>2^x = -\frac{5}{4}</math> — корней нет. Ответ: 1. ◀</p>
<p>3. Если нельзя привести к одному основанию, то пытаемся привести все степени к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение (которое решается делением обеих частей уравнения на наибольшую степень одного из видов переменных).</p>	$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0.$ <p>▶ Приведем все степени к основаниям 2 и 3: <math>2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0.</math> Имеем однородное уравнение (у всех членов одинаковая суммарная степень — <math>2x</math>). Для его решения разделим обе части на <math>3^{2x} \neq 0</math>: <math display="block">\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0.</math> Замена <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = t</math> дает уравнение <math>t^2 + 3t - 4 = 0, t_1 = 1, t_2 = -4.</math> Обратная замена дает <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4</math> — корней нет или <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1</math>, тогда <math>x = 0.</math> Ответ: 0. ◀</p>

<p>4. В других случаях переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем разложить полученное уравнение на множители или применяем специальные приемы решения, в которых используются свойства соответствующих функций.</p>	$6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0.$ <p>► Если попарно сгруппировать члены в левой части уравнения и в каждой паре вынести за скобки общий множитель, то получаем:</p> $2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0.$ <p>Теперь можно вынести за скобки общий множитель <math>3^x - 9</math>:</p> $(3^x - 9) \cdot (2^x - 2) = 0.$ <p>Тогда <math>3^x - 9 = 0</math> или <math>2^x - 2 = 0</math>. Получаем два уравнения: 1) <math>3^x = 9</math>, тогда <math>x = 2</math>; 2) <math>2^x = 2</math>, тогда <math>x = 1</math>. <b>Ответ:</b> 2; 1. ◁</p>
--	---

Таблица 7

## Решение показательных неравенств

1. График показательной функции $y = a^x$ ( $a > 0$ и $a \neq 1$ )	
<p style="text-align: center;"><math>a &gt; 1</math></p>  <p style="text-align: center;">возрастает</p>	<p style="text-align: center;"><math>0 &lt; a &lt; 1</math></p>  <p style="text-align: center;">убывает</p>
2. Схема равносильных преобразований простейших показательных неравенств	
<p style="text-align: center;"><math>a &gt; 1</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a^{f(x)} &gt; a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) &gt; g(x)</math></div> <p style="text-align: center;">знак неравенства сохраняется</p>	<p style="text-align: center;"><math>0 &lt; a &lt; 1</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a^{f(x)} &gt; a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) &lt; g(x)</math></div> <p style="text-align: center;">знак неравенства меняется на противоположный</p>
Примеры	
<p style="text-align: center;"><math>2^{x-3} &gt; 4.</math></p> <p>► <math>2^{x-3} &gt; 2^2</math>. Функция <math>y = 2^t</math> является возрастающей, следовательно: <math>x - 3 &gt; 2, x &gt; 5.</math> <b>Ответ:</b> (5; <math>+\infty</math>). ◁</p>	<p style="text-align: center;"><math>(0,7)^{x-3} &gt; 0,49.</math></p> <p>► <math>(0,7)^{x-3} &gt; (0,7)^2</math>. Функция <math>y = 0,7^t</math> убывающая, следовательно: <math>x - 3 &lt; 2, x &lt; 5.</math> <b>Ответ:</b> (<math>-\infty</math>; 5). ◁</p>

3. Решение более сложных показательных неравенств	
Ориентир	Пример
<p>I. С помощью равносильных преобразований (по схеме решения показательных уравнений, табл. 54) данное неравенство приводится к неравенству известного вида (квадратному, дробному и т. д.). После решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам.</p>	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ $\blacktriangleright 4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ <p>Замена <math>2^x = t</math> дает неравенство <math>4t^2 + 7t - 2 &gt; 0</math>, решения которого <math>t &lt; -2</math> или <math>t &gt; \frac{1}{4}</math> (см. рисунок).</p>  <p>Обратная замена дает <math>2^x &lt; -2</math> (решений нет) или <math>2^x &gt; \frac{1}{4}</math>, откуда <math>2^x &gt; 2^{-2}</math>, то есть <math>x &gt; -2</math>.</p> <p>Ответ: <math>(-2; +\infty)</math>. <math>\triangleleft</math></p>
<p>II. Применяем общий метод интервалов<sup>1</sup>, приводя данное неравенство к виду <math>f(x) \geq 0</math> и используя схему:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Найти ОДЗ.</li> <li>2. Найти нули <math>f(x)</math>.</li> <li>3. Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак <math>f(x)</math> в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.</li> <li>4. Записать ответ, учитывая знак неравенства.</li> </ol>	$3^x + 4^x > 7.$ <p><math>\blacktriangleright</math> Решим неравенство методом интервалов. Данное неравенство равносильно неравенству <math>3^x + 4^x - 7 &gt; 0</math>. Обозначим <math>f(x) = 3^x + 4^x - 7</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ОДЗ: <math>\mathbb{R}</math>.</li> <li>2. Нули функции: <math>f(x) = 0</math>. <math>3^x + 4^x - 7 = 0</math>. Поскольку функция <math>f(x) = 3^x + 4^x - 7</math> является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то значение, равное нулю, она принимает только в одной точке области определения: <math>x = 1</math> (<math>f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0</math>).</li> <li>3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак <math>f(x)</math> в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства <math>f(x) &gt; 0</math>.</li> </ol>  <p>Ответ: <math>(1; +\infty)</math>. <math>\triangleleft</math></p>

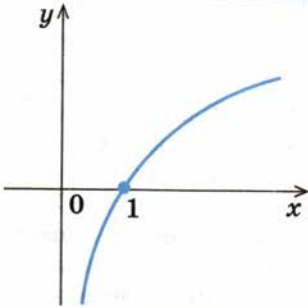
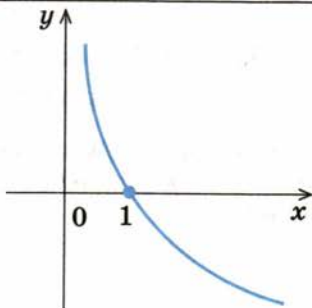




## Решение логарифмических уравнений

1. Решение простейших логарифмических уравнений	
Ориентир	Пример
<p>Если <math>a</math> — число (<math>a &gt; 0</math> и <math>a \neq 1</math>), то</p> $\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$ <p>(используем определение логарифма)</p>	<p>▶ <math>\log_3(x - 1) = 2</math>.</p> $x - 1 = 3^2,$ $x = 10.$ <p>Ответ: 10. ◀</p>
3. Использование уравнений-следствий	
Ориентир	Пример
<p>Если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то гарантируем, что получаем уравнения-следствия. При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.</p>	<p><math>\log_x(x + 2) = 2</math>.</p> <p>▶ По определению логарифма получаем</p> $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = -1, x_2 = 2.$ <p>Проверка. <math>x = -1</math> — посторонний корень (в основании логарифма получаем отрицательное число); <math>x = 2</math> — корень (<math>\log_2(2 + 2) = 2</math>, <math>\log_2 4 = 2</math>, <math>2 = 2</math>).</p> <p>Ответ: 2. ◀</p>
3. Равносильные преобразования логарифмических уравнений	
Замена переменных	
Ориентир	Пример
<p>Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).</p>	<p><math>\lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0</math>.</p> <p>▶ Замена: <math>\lg x = t</math>,</p> $t^2 - 2t - 3 = 0,$ $t_1 = -1, t_2 = 3.$ <p>Следовательно,  <math>\lg x = -1</math> или <math>\lg x = 3</math>.  Тогда <math>x = 10^{-1} = 0,1</math> или  <math>x = 10^3 = 1000</math>.</p> <p>Ответ: 0,1; 1000. ◀</p>

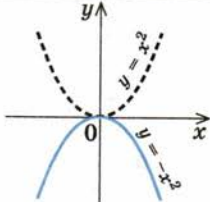
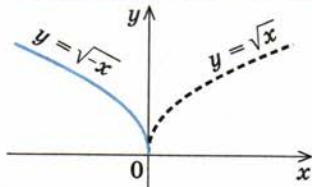
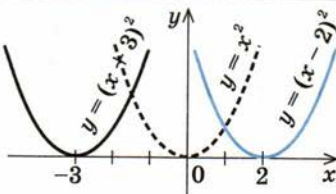
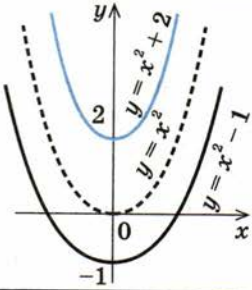
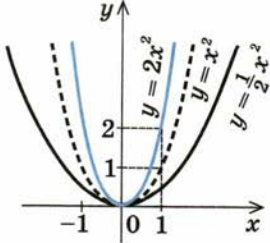
Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ( $a > 0$ и $a \neq 1$ )	
Ориентир	Пример
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ ОДЗ}$ <p>(учитываем ОДЗ и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов)</p>	$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5).$ <p>▶ ОДЗ: <math>\begin{cases} x^2 - 2 &gt; 0, \\ 4x - 5 &gt; 0. \end{cases}</math></p> <p>На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:  <math>x^2 - 2 = 4x - 5, x^2 - 4x + 3 = 0,</math>  <math>x_1 = 1, x_2 = 3,</math>  <math>x = 1</math> — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ);  <math>x = 3</math> — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ).</p> <p>Ответ: 3. ◀</p>
Равносильные преобразования уравнений в других случаях	
Ориентир	Пример
<ol style="list-style-type: none"> <li>Учитываем ОДЗ данного уравнения (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ).</li> <li>Следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлении с сохранением верного равенства.</li> </ol>	$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3).$ <p>▶ ОДЗ: <math>\begin{cases} x + 1 &gt; 0, \\ x + 3 &gt; 0. \end{cases}</math></p> <p>На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:  <math>\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3,</math>  <math>\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3,</math>  <math>(x + 1)(x + 3) = 2^3,</math>  <math>x^2 + 4x - 5 = 0,</math>  <math>x_1 = 1, x_2 = -5.</math>  <math>x = 1</math> — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ);  <math>x = -5</math> — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ).</p> <p>Ответ: 1. ◀</p>

## Решение логарифмических неравенств

1. График функции $y = \log_a x$ ( $a > 0; a \neq 1$ )	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 <p>возрастает</p>	 <p>убывает</p>
2. Равносильные преобразования простейших логарифмических неравенств	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
<i>Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ.</i>	<i>Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ.</i>
Примеры	
$\log_2(x - 5) > 3.$ <p>▶ ОДЗ: <math>x - 5 &gt; 0</math>, то есть <math>x &gt; 5</math>.</p> $\log_2(x - 5) > \log_2 2^3.$ <p>Функция <math>y = \log_2 t</math> — возрастающая, тогда</p> $\begin{aligned} x - 5 &> 2^3, \\ x &> 13. \end{aligned}$ <p>Учитывая ОДЗ, имеем <math>x &gt; 13</math>.  <b>Ответ:</b> <math>(13; +\infty)</math>. ◁</p>	$\log_{\frac{1}{2}}(x - 5) > 3.$ <p>▶ ОДЗ: <math>x - 5 &gt; 0</math>, то есть <math>x &gt; 5</math>.</p> $\log_{\frac{1}{2}}(x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$ <p>Функция <math>y = \log_{\frac{1}{2}} t</math> — убывающая, тогда <math>x - 5 &lt; \left(\frac{1}{2}\right)^3</math>, <math>x &lt; 5\frac{1}{8}</math>.</p> <p>Учитывая ОДЗ, имеем <math>5 &lt; x &lt; 5\frac{1}{8}</math>.  <b>Ответ:</b> <math>\left(5; 5\frac{1}{8}\right)</math>. ◁</p>

3. Решение более сложных логарифмических неравенств	
Ориентир	Пример
<p><b>I. С помощью равносильных преобразований данное неравенство приводится к неравенству известного вида.</b></p> <p><i>Схема равносильных преобразований неравенства:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Учитываем ОДЗ заданного неравенства (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ).</li> <li>2. Следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.</li> </ol>	$\lg^2(10x) - \lg x \geq 3.$ <p>► ОДЗ: <math>x &gt; 0</math>. На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенствам:  <math>(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geq 3</math>, <math>(1 + \lg x)^2 - \lg x \geq 3</math>.          Замена <math>\lg x = t</math>. Тогда <math>(1 + t)^2 - t \geq 3</math>, то есть <math>t^2 + t - 2 \geq 0</math>. Решение этого неравенства</p> $t \leq -2 \text{ или } t \geq 1$ <p>(см. рисунок).</p> <p>Обратная замена дает</p> $\lg x \leq -2 \text{ или } \lg x \geq 1.$ <p>Тогда <math>\lg x \leq \lg 10^{-2}</math> или <math>\lg x \geq \lg 10</math>.          Учитывая, что функция <math>y = \lg x</math> является возрастающей, получаем: <math>x \leq 10^{-2}</math> или <math>x \geq 10</math>.          С учетом ОДЗ имеем:  <math>0 &lt; x \leq 0,01</math> или <math>x \geq 10</math>.  <i>Ответ:</i> <math>(0; 0,01] \cup [10; +\infty)</math>. ◀</p> 
<p><b>II. Применяется общий метод интервалов</b></p> <p>(данное неравенство приводится к неравенству <math>f(x) \geq 0</math>) и используется схема:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Найти ОДЗ.</li> <li>2. Найти нули <math>f(x)</math>.</li> <li>3. Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак <math>f(x)</math> на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.</li> <li>4. Записать ответ, учитывая знак неравенства.</li> </ol>	$\log_x(2x + 3) < 2.$ <p>► Решим неравенство методом интервалов. Оно равносильно неравенству</p> $\log_x(2x + 3) - 2 < 0.$ <p>Обозначим <math>f(x) = \log_x(2x + 3) - 2</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ОДЗ: <math>\begin{cases} 2x + 3 &gt; 0, \\ x &gt; 0, \\ x \neq 1, \end{cases}</math> то есть <math>\begin{cases} x &gt; 0, \\ x \neq 1. \end{cases}</math></li> <li>2. Нули функции: <math>f(x) = 0</math>. <math>\log_x(2x + 3) - 2 = 0</math>. Тогда <math>\log_x(2x + 3) = 2</math>. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнению <math>2x + 3 = x^2</math> (полученному согласно определению логарифма). То есть <math>x^2 - 2x - 3 = 0</math>, <math>x_1 = -1</math>, <math>x_2 = 3</math>. В ОДЗ входит только <math>x = 3</math>. Итак, <math>f(x)</math> имеет единственный нуль функции <math>x = 3</math>.</li> <li>3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак <math>f(x)</math> на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решения неравенства <math>f(x) &lt; 0</math>.</li> </ol>  <p><i>Ответ:</i> <math>x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)</math>. ◀</p>

Преобразование графика функции  $y = f(x)$ 

№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси $Ox$
2	$y = f(-x)$		Симметрия относительно оси $Oy$
3	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $Ox$ на $a$ единиц
4	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $Oy$ на $c$ единиц
5	$y = kf(x)$ ( $k > 0$ )		Растяжение или сжатие вдоль оси $Oy$ (при $k > 1$ — растяжение, при $0 < k < 1$ — сжатие)

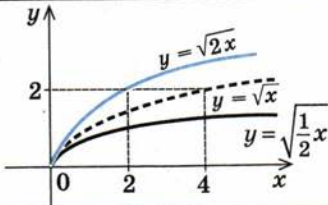
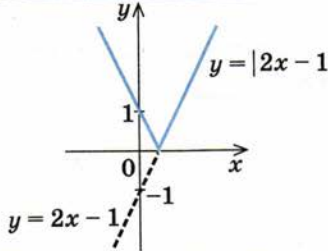
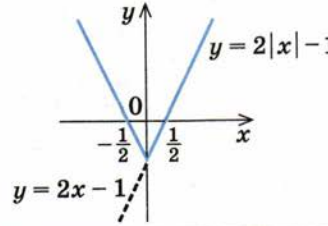
1	2	3	4
6	$y = f(\alpha x)$ ( $\alpha > 0$ )		Растяжение или сжатие вдоль оси $Ox$ (при $\alpha > 1$ — сжатие, при $0 < \alpha < 1$ — растяжение)
7	$y =  f(x) $		Выше оси $Ox$ (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси $Ox$ — симметрия относительно оси $Ox$
8	$y = f( x )$		Справа от оси $Oy$ (и на самой оси) — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси $Oy$

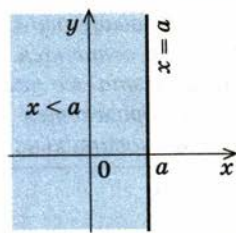
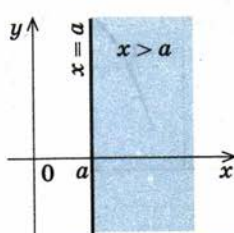
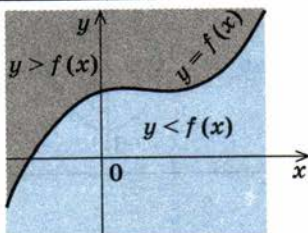
Таблица 11

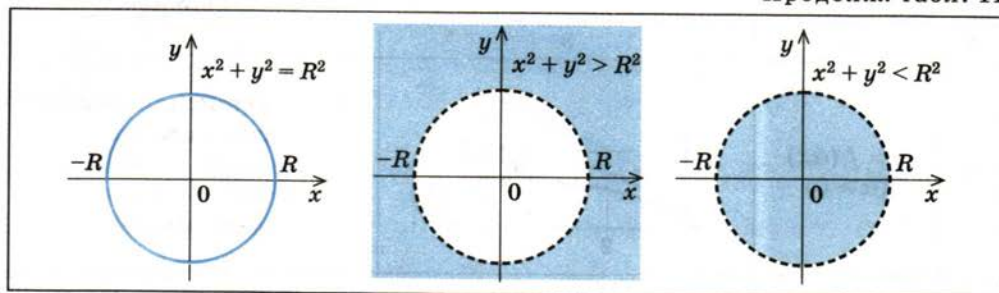
## Графики уравнений и неравенств с двумя переменными

## 1. Определение

**Графиком уравнения (неравенства) с двумя переменными  $x$  и  $y$  называется множество всех точек координатной плоскости с координатами  $(x; y)$ , где пара чисел  $(x; y)$  является решением соответствующего уравнения (неравенства).**

## 1. Графики некоторых уравнений и неравенств





### 3. Геометрические преобразования графика уравнения $F(x; y) = 0$

Преобразование	Пример
<p><b><math>F(x - a; y - b) = 0</math></b></p> <p>Параллельный перенос графика уравнения <math>F(x; y) = 0</math> на вектор <math>\vec{n}(a; b)</math>.</p>	
<p><b><math>F( x ; y) = 0</math></b></p> <p>Часть графика уравнения <math>F(x; y) = 0</math> справа от оси <math>Oy</math> (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси <math>Oy</math>.</p>	
<p><b><math>F(x;  y ) = 0</math></b></p> <p>Часть графика уравнения <math>F(x; y) = 0</math> выше оси <math>Ox</math> (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси <math>Ox</math>.</p>	

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

## Раздел 1

§ 1. 5. 1)  $-1\frac{2}{3}$ ; 1; 2) -1; 2; 3) 0;  $\pm 2$ ; 4) -5,5; -0,5;  $\pm 2,5$ . 6. 1) [3; 4];  
2)  $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ ; 3)  $(-\infty; -0,5] \cup [1,5; +\infty)$ ; 4)  $(-5,5; -3,5) \cup (0; 2)$ .

§ 2. 3. 1) -3; 2) 9; 3) 0; 4) 1. 4. 1) 11; 2) 1; 3)  $\frac{1}{6}$ ; 4) -8. 5. 1)  $(0; 1] \cup [2; +\infty)$ ;  
2)  $(-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$ ; 3) (1; 2); 4)  $[1; 3] \cup (4; +\infty)$ . 6. 1)  $(-1; 0] \cup (1; +\infty)$ ;  
2)  $[0,5; 1) \cup (1; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [-1; 1] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$  или  $x = 1,5$ ; 4) (1; 2)  $\cup$   
 $\cup (2; +\infty)$ .

§ 3. 1. 1) 6; 2) 7; 3) 5. 2. 1)  $3\Delta x$ ; 2)  $3x_0\Delta x(x_0 + \Delta x) + (\Delta x)^3$ ; 3)  $\Delta x(2x_0 + \Delta x - 1)$ ;  
4)  $\Delta x + \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$ . 5. а)  $f'(x_1) = \sqrt{3}$ ;  $f'(x_2) = 1$ ; б)  $f'(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $f'(x_2) = 0$ ;  
в)  $f'(x_1) = 0$ ;  $f'(x_2) = 0$ ; г)  $f'(x_1) = 0$ ;  $f'(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 6. 1) 6; 2) 1; 3) -1; 4) 1.  
7. 1)  $y = 2x - 1$ ; 2)  $y = 0$ ; 3)  $y = x - 0,25$ ; 4)  $y = -6x - 9$ . 8. 1)  $y = 0,5x + 0,5$ ;  
2)  $y = x + 0,25$ ; 3)  $y = 0,25x + 3$ ; 4)  $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$ . 9. 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 4. 1. 1)  $8x^7$ ; 2)  $-5x^{-6}$ ; 3)  $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$ ; 4)  $20x^{19}$ ; 5)  $-20x^{-21}$ ; 6)  $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ . 2. 1) 1;  
2)  $5x^4 - 1$ ; 3)  $-\frac{1}{x^2} - 3x^2$ ; 4)  $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . 3. 1)  $6x^2 + 3$ ; 2)  $2x + 5$ ; 3)  $4x^3 - 4x$ ;  
4)  $\frac{1}{\sqrt{x}} + 12x^2$ . 4. 1)  $6x^2 + 6x^5$ ; 2)  $-6x^2 + 2x + 2$ ; 3)  $-4x^3 + 6x^2 - 3$ ; 4)  $\frac{15x^2 - 3x}{2\sqrt{x}}$ .  
5. 1)  $\frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$ ; 2)  $-\frac{7}{(3x-2)^2}$ ; 3)  $-\frac{11}{(5x+1)^2}$ ; 4)  $\frac{2x^2 - 2x}{x^4}$ . 6. 1)  $f'(-2) = -2$ ;  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ;  
2)  $f'(2) = 28$ ;  $f'(-1) = -8$ ; 3)  $f'(0) = -\frac{5}{9}$ ;  $f'(-3) = -\frac{5}{81}$ ; 4)  $f'(-\sqrt{2}) = 1,5$ ;  
 $f'(0,1) = 101$ . 7. 1) 1; 2) -2; 0; 3)  $\pm 0,5$ ; 4) 0,25. 8. 1) (1;  $+\infty$ ); 2) (-2; 0);  
3)  $(-2; 0) \cup (0; 2)$ ; 4)  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ . 9. 1)  $f(u) = \sqrt{u}$ ;  $u(x) = \sin x$ ; 2)  $f(u) = u^5$ ;  
 $u(x) = 2x + x^2$ ; 3)  $f(u) = \sqrt{u}$ ;  $u(x) = x^3 - x$ ; 4)  $f(u) = \cos u$ ;  $u(x) = 2x - \frac{\pi}{4}$ . 10. 1)  $\mathbf{R}$ ;  
2)  $[-3; +\infty)$ ; 3) (4;  $+\infty$ ); 4)  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ ; 5)  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  
6) (0; 0,5]; 7)  $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; 8) [0,1; 10]. 11. 1)  $3(x^2 - x)^2(2x - 1)$ ;  
2)  $-10(2x - 1)^{-6}$ ; 3)  $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ ; 4)  $\frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$ ; 5)  $\frac{3}{4\sqrt{3x(2 + \sqrt{3x})}} - \frac{4}{(2x - 1)^3}$ .  
12. 1)  $y = 7x - 4$ ; 2)  $y = 26x + 54$ ; 3)  $y = -0,5x + 1,5$ ; 4)  $y = 7x + 6$ .



- § 5. 1. 1)  $-\sin x$ ; 2)  $2 \cos x - 3$ ; 3)  $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ ; 4)  $3x^2 + \frac{1}{\sin^2 x}$ .
2. 1)  $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$ ; 2)  $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$ ; 3)  $\sin x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$ ; 4)  $-\cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$ .
3. 1)  $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ; 2)  $\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$ ; 3)  $\sin 2x$ ; 4)  $-\sin 2x$ . 4. 1)  $\cos x$ ; 2)  $-6 \sin 6x$ ;  
3)  $2 \cos 2x$ ; 4)  $-4 \sin 4x$ . 5. 1)  $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$ ; 2)  $-2x \sin x^2$ ; 3)  $-\sin x \cos(\cos x)$ ;  
4)  $\frac{3}{\cos^2 6x \sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$ . 6. 1)  $3e^x$ ; 2)  $e^x - \frac{1}{x}$ ; 3)  $-e^{-x} + 5x^4$ ; 4)  $\frac{2}{2x-1}$ . 7. 1)  $e^{5x} (5 \cos x - \sin x)$ ;  
2)  $\frac{1-\ln x}{x^2}$ ; 3)  $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x \ln 10}}$ ; 4)  $x^2 \left(3 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)$ . 8. 1) 0; 2) 2; 3) -1;  
4) -8. 9. 1) 4; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0. 10. 1) Нет; 2)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; 3)  $\frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  
4)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 11. 1) -2; 2) 0; 3)  $e$ ; 4)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
12. 1)  $(0,5 \ln 0,5; +\infty)$ ; 2)  $(-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$ ; 3)  $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$ ; 4)  $(1,5; +\infty)$ .
13. 1) а)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ; б)  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ ; в)  $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ; 2) а) 1; б)  $(1; +\infty)$ ; в)  $(0; 1)$ ; 3) а)  $e$ ;  
б)  $(0; e)$ ; в)  $(e; +\infty)$ ; 4) а)  $e^{-2}$ ; б)  $(e^{-2}; +\infty)$ ; в)  $(0; e^{-2})$ . 14. 1)  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$ ;  
2)  $y = 4x + 1 - \frac{\pi}{2}$ ; 3)  $y = 2$ ; 4)  $y = -1$ . 15. 1)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; 2) 1; 3) 0. 16.  $y = 5x + 2$ .  
17.  $y = 3x - 1$ .

- § 6. Пункт 6.1. 1. а) Возрастает на  $[-6; -4]$  и  $[-2; 2]$ ; убывает на  $[-4; -2]$  и  $[2; 6]$ ; б) возрастает на  $[-7; -4]$  и  $[-2; 2]$ ; убывает на  $[-4; -2]$  и  $[2; 7]$ . 2. Возрастает на  $(-\infty; -5]$  и  $[5; +\infty)$ ; убывает на  $[-5; 5]$ . 3. Возрастает на  $[-3; -1]$ ; убывает на  $(-6; -3]$  и  $[-1; 3]$ . 6. 1) Возрастает на  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; 1]$ ;  
2) возрастает на  $(-\infty; -2\sqrt{2}]$  и  $[2\sqrt{2}; +\infty)$ ; убывает на  $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ ; 3) возрастает на  $[-1; 0]$  и  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; -1]$  и  $[0; 1]$ ; 4) возрастает на  $(-\infty; -1]$  и  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $[-1; 0]$  и  $(0; 1]$ . 7. 1) Возрастает на  $[0; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; 0)$ ; 2) возрастает на  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $(0; 1]$ ; 3) возрастает на  $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; убывает на  $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; 4) возрастает на  $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; убывает на  $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 8. 1)  $(-\infty; 0]$ ;  
2)  $[1; +\infty)$ ; 3)  $[0; 9]$ . 9. 1) 1; 2) 0; 3)  $\pi$ ; 4) 1. 12. 1) Возрастает на  $(-\infty; -2]$  и  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $[-2; 1]$ ; 2)  $x = -2$  — точка максимума;  $x = 1$  — точка

минимума. 16. 1) Возрастает на  $[3; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; 3]$ ;  $x = 3$  — точка минимума;  $f(3) = -4$ ; 2) возрастает на  $[-1; 0]$  и  $[1; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; -1]$  и  $[0; 1]$ ;  $x = \pm 1$  — точки минимума;  $f(-1) = f(1) = -1$ ;  $x = 0$  — точка максимума;  $f(0) = 0$ ; 3) возрастает на  $(-\infty; -2]$  и  $[2; +\infty)$ ; убывает на  $[-2; 0]$  и  $(0; 2]$ ;  $x = -2$  — точка максимума;  $f(-2) = -4$ ;  $x = 2$  — точка минимума;  $f(2) = 4$ ; 4) возрастает на  $[1; 2]$ ; убывает на  $[2; 3]$ ;  $x = 2$  — точка максимума;  $f(2) = 2$ .

17. 1) Возрастает на  $[e; +\infty)$ ; убывает на  $(0; 1)$  и  $(1; e]$ ;  $x = e$  — точка минимума;  $f(e) = e$ ; 2) возрастает на  $[-0,5; 0]$  и  $[0,5; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; -0,5]$  и  $[0; 0,5]$ ;  $x = \pm 0,5$  — точки минимума;  $f(-0,5) = f(0,5) = -1,25$ ;  $x = 0$  — точка максимума;  $f(0) = -1$ ; 3) возрастает на  $(-\infty; +\infty)$ ; 4) возрастает на  $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; убывает на  $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , — точки минимума;  $f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , — точки максимума;  $f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Пункт 6.2.** 4. 1) б)  $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ ; в) при  $a < -4$ ,  $a > 4$  — два; при  $a = \pm 4$  — один; при  $-4 < a < 4$  — нет; 2) б)  $[-2; +\infty)$ ; в) при  $a < -2$  — нет; при  $a = -2$ ,  $a > 0$  — один; при  $-2 < a \leq 0$  — два; 3) а) график функции изображен на рис. 180; б)  $\left[-\frac{2}{e}; +\infty\right)$ ; в) при  $a < -\frac{2}{e}$  — нет; при  $a = -\frac{2}{e}$ ,  $a \geq 0$  — один; при  $-\frac{2}{e} < a < 0$  — два; 4) а) график функции изображен на рис. 181; б)  $(-\infty; 0) \cup [e; +\infty)$ ; в) при  $a < 0$ ,  $a = e$  — один; при  $0 \leq a < e$  — нет; при  $a > e$  — два. 5. 1) 2; 2) 2; 3) 1; 4) 1.

6. 3), 4) Графики функций изображены на рис. 182 и 183. 7.  $\left(\frac{e}{6}\right)^6$ .

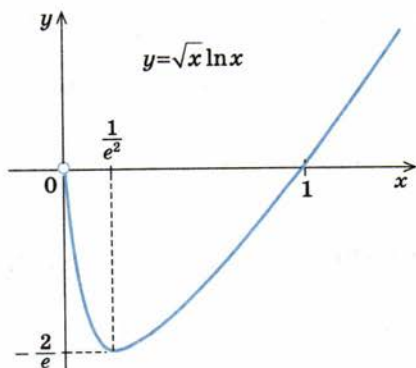


Рис. 180

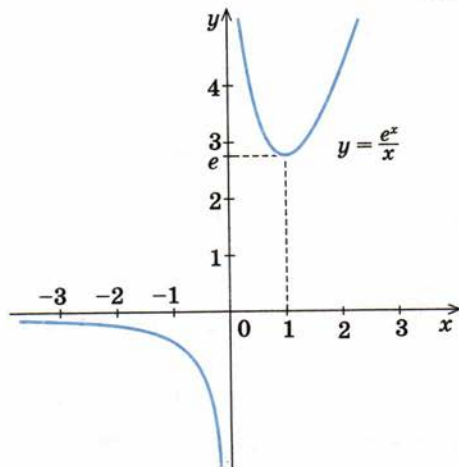


Рис. 181

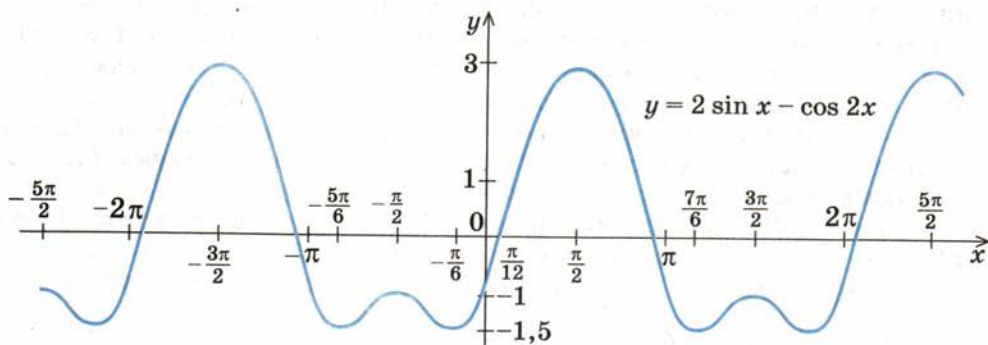


Рис. 182

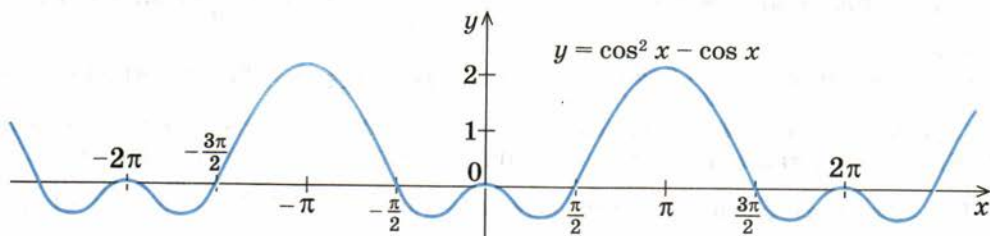


Рис. 183

**Пункт 6.3.** 1. 1)  $f_{\max} = 9$ ,  $f_{\min} = 5$ ; 2)  $f_{\max} = 5$ ,  $f_{\min} = -4$ ; 3)  $f_{\max} = 6$ ,  $f_{\min} = -2$ ;  
 4)  $f_{\max} = 1$ ,  $f_{\min} = -31$ . 2. 1)  $f_{\max} = 4$ ,  $f_{\min} = -4$ ; 3)  $f_{\max} = 0$ ,  $f_{\min} = 1 - \frac{\pi}{2}$ . 3. 2)  $f_{\max} = 1$ ,  
 $f_{\min} = -3$ ; 4)  $f_{\max} = \ln 2 + 5$ ,  $f_{\min} = \ln 4 - 2$ . 4. 1)  $f_{\max} = 5$ ,  $f_{\min} = -52$ ; 4)  $f_{\max} = 78$ ,  
 $f_{\min} = -58$ . 5. 5; 5. 6. 3,5; 0,5. 7. 6; -2. 8. Квадрат со стороной 5 см. 9.  $\frac{a}{6}$ .

12. 4. 13. Равнобедренный треугольник с боковой стороной  $\frac{a}{2}$  и углом  $\alpha$  при

вершине. 14.  $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$ . 16. 13. 17. 367. 18.  $14 + 2\pi$ . 19. К точке отрезка  $AB$ , удаленной от  $B$  на 1 км.

§ 7. 4. 1) -3; 2)  $\pm 2$ ; 3) 2; 4) -3; 1. 5. 1) -3; 2) 25; 3)  $-\frac{5}{6}$ ; 4) 14; 5) 5; 6) -3; 7) 0,25;

8)  $2\sqrt{2}$ ; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12)  $-1\frac{5}{7}$ ; 13)  $\frac{a}{b}$ ; 14) 1; 15) 1,25; 16)  $4\frac{2}{3}$ .

6. 1)  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$  или  $x = 1$ ; 3)  $(-3; -2] \cup [3; 4)$ ; 5)  $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$ ; 8)  $[-2; 3]$ .

§ 10. 1. 1)  $6x - 6$ ; 2)  $12x^2 \ln x + 7x^2$ ; 3)  $-2 \sin x - x \cos x$ ; 4)  $(2 - x^2) \sin x +$

$+4x \cos x$ . 2. 1) Выпуклая вниз на  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ ; выпуклая вверх на  $(-1; 1)$ ;  $x = \pm 1$  — точки перегиба; 2) выпуклая вниз на  $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$  и  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ ; выпуклая вверх на  $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$  и  $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \pm \frac{3\pi}{4}$  — точки перегиба; 3) выпуклая вниз на  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ ; выпуклая вверх на  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $x = 0$  — точка перегиба; 4) выпуклая вниз на  $(e\sqrt{e}; +\infty)$ ; выпуклая вверх на  $(0; e\sqrt{e})$ ;  $x = e\sqrt{e}$  — точка перегиба.

**§ 11. Пункт 11.1.** 1. 1) 3; 2) 5. 2. 1)  $\pm 1$ ; 2) 0. 3. 1) 2; 2) 0; 3) 2. 4. 1) 0; 2) 0; 3) 1. **Указание.** При  $x < 0$  выполнить оценку значений левой и правой частей уравнения. 5. 1) 1; 2) 1; 3) 3) -2; 0. 6. 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0;  $\pm 1$ .

**§ 12.** 1.  $a \leq -3$  или  $a \geq 1$ . 2.  $a = 1$ . 3.  $k = 2$ . 4.  $x = 1$ ,  $a = 3$ . 5. 1. 6.  $a = 3$ ,  $b = 1$ . 7.  $a = -23, 25$ . 8.  $5 - 3\sqrt{3} \leq a \leq 5 + 3\sqrt{3}$ . 9.  $a \leq -32$  или  $a \geq 32$ . 10.  $a < -7$  или  $a > 11$ . 11.  $-7 \leq a < 0$  или  $0 < a \leq 7$ . 12.  $0 < a \leq 9$ . 13.  $a = -\frac{2}{3}$ .

**Дополнительные упражнения.** 2. 1) 8; 2) 6. 3. 1) 8. 9. 1) 0,25. 27. 7) **Указание.** Прологарифмировать равенство  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$  по основанию  $e$  и взять производную от обеих частей полученного равенства (учитывая, что  $\ln y$  — сложная функция), затем из последнего равенства найти  $y'$ .

## Раздел 2

**§ 14.** 4. 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. 5. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. 6. 1)  $2x - \frac{x^5}{5} + C$ ; 2)  $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ ; 3)  $2x^2 + C$ ; 4)  $-8x + C$ ; 5)  $\frac{x^7}{7} + C$ ; 6)  $-\frac{1}{2x^2} - 2x + C$ ; 7)  $x + \frac{1}{3x^3} + C$ ; 8)  $\frac{x^4}{4} + C$ . 7. 1)  $2x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$ ; 2)  $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin x + C$ ; 3)  $-\frac{1}{x} + \cos x + C$ ; 4)  $\frac{5}{3}x^3 - x + C$ ; 5)  $\frac{1}{12}(2x-8)^6 + C$ ; 6)  $-\frac{3}{2}\cos 2x + C$ ; 7)  $-\frac{1}{40}(4-5x)^8 + C$ ; 8)  $-\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$ ; 9)  $\frac{1}{15(4-15x)^3} + C$ ; 10)  $-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$ ; 11)  $-\frac{4}{3(3x-1)} + C$ ; 12)  $\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-1) + C$ . 8. 1)  $x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$ ; 2)  $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x - 2\sqrt{2-x} - x^3 + C$ ; 3)  $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) - 3\cos(4-x) + x^2 + C$ ; 4)  $\frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5}\sqrt{5x-2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$ . 9. 1)  $-\frac{1}{x} - 10$ ; 2)  $\operatorname{tg} x - 1$ ; 3)  $\frac{x^4}{4} + 1\frac{3}{4}$ ; 4)  $-\cos x - 2$ . 10. 1)  $x^2 + x$ ; 2)  $x^3 - x^2 + 4$ ; 3)  $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4\frac{1}{3}$ . 11. 1)  $2 \sin x + 3$ ;

2)  $x - \frac{x^3}{3} + 3$ ; 3)  $-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$ ; 4)  $-\frac{1}{3x^3} + 5\frac{2}{3}$ . 12. 1)  $2x^2 - \frac{1}{x} + 1$ ; 2)  $\frac{x^4}{4} + 2x + 3$ ;  
3)  $x - x^2 + 8$ ; 4)  $-\frac{1}{x} - 2x^5 + 3x + 5$ . 13.  $\frac{t^3}{3} + t^2 - t$ . 14.  $4 \sin \frac{t}{2} + 2$ . 15.  $t^4 + 2t^2 + 2t + 7$ .

§ 15. Пункт 15.1. 1. 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5)  $\frac{1}{15}$ ; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. 3. 1) 3;

2) 2; 3)  $9\sqrt{3}$ ; 4) 4; 5)  $\frac{2\pi}{3} + 1$ ; 6) 78; 7)  $\frac{\pi+3}{12}$ ; 8) 9,5. 4. 1) 0,4; 2) 1,6; 3)  $9\frac{1}{3}$ ;

4)  $10\frac{2}{3}$ . 5. 1) 0,75; 2) 2; 3)  $7\frac{1}{3}$ ; 4)  $5\frac{1}{3}$ . 6. 1) 4,25; 2)  $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ ; 3)  $2\frac{2}{3}$ ; 4)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

Пункт 15.2. 7.  $5\frac{1}{3}$ . 8. 4,5. 9. 2)  $\frac{15\pi}{2}$ ; 3)  $\frac{\pi}{2}$ ; 4)  $\frac{16\pi}{15}$ . 10. 1)  $\frac{2\pi}{5}$ ; 2)  $11\pi$ ; 3)  $\frac{50\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{\pi}{6}$ .

§ 16. 1. 1) 68 м; 2)  $21\frac{1}{3}$ . 2. 1)  $y = 3x - 2x^2 + C$ ; 2)  $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$ ;

3)  $y = 1,5e^{2x} + C$ ; 4)  $y = 2 \sin 2x + C$ . 3. 1)  $y = 1 - \cos x$ ; 2)  $y = 2 \sin x + 1$ ;  
3)  $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$ ; 4)  $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$ ; 5)  $y = e^x + 1 - e$ ; 6)  $y = -e^{-x} + 3$ .

### Раздел 3

§ 17. Пункт 17.1.1. 1. 12. 2. 1) 16; 2) 60. 3. 1) 2052; 2) яблоко. 4. 1680.

Указание. Целесообразно в качестве мест выбрать экзамены и размещать по ним заданные дни. 5. 24. 6. 870. 7. 336. 8. 210. 9. 2730. 10.  $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$ . 11. 120. 12. 96. 13. 544 320. 14. 1) 24; 2) 12. 15. 1) 5; 2) 6. Пункт 17.1.2. 1. 24. 2. 5040. 3. 120. 4. 6. 5. 1) 720; 2) 600. 6. 1) 6; 2) 6. 7. 384. 8. 240. 9.  $5! \cdot 8!$ . 10.  $10!$ ;  $(5!)^2$ . Пункт 17.1.3. 1. 21. 2. 56. 3. 210. 4. 1) 55; 2) 165. 5. 400 400.

§ 18. Пункт 18.1. 1. 1) Случайное; 2) невозможное; 3) случайное; 4) невозможное; 5) случайное; 6) невозможное; 7) случайное; 8) невозможное; 9) достоверное; 10) случайное; 11) случайное. 3. 0,03. 4. 0,002. 5. 0,998. 6. 0.

7. 1. 8. 1) 1; 2) 0. 9.  $\frac{1}{24}$ . 10.  $\frac{1}{1250}$ . 11. 0,04. 12. 0,75. 13.  $\frac{1}{12}$ . 14. 0,95.

15. 1) 0,5; 2) 0,5; 3)  $\frac{2}{3}$ . 16. Выигрыши равновозможные. 17. Нет. 18. 1) Красное; 2. а) 1; б) 0; в) 0,4; г) 0,52. 19. Любую. 20. 1 красная, 5 желтых.

21. Зеленая,  $p = \frac{1}{6}$ . 22. 1)  $\frac{4}{15}$ ; 2) 0; 3)  $\frac{1}{3}$ ; 4) 11. 23.  $\frac{1}{36}$ . 24.  $\frac{2}{3}$ . 25.  $\frac{1}{120}$ .

Пункт 18.2. 4. 1)  $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ ; 2)  $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ ; 3)  $A_1 + A_2 + A_3$ ; 4)  $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ ;  
5)  $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$ . 5. А и В; А и С; В и М; С и D; С и М; С и Т; D и К; D и М; D и Т.

6. А и В; С и D; С и М; D и М; К и М. 7.  $\frac{7}{16}$ . 8.  $\frac{4}{13}$ . Пункт 18.3. 2. 1) 0,42;

2) 0,51; 3) 0,49. 3. 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. 6. 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1. 7. 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76. **Пункт 18.4.** 1. Шансы одинаковы.

2. В кино. 3. Шансы одинаковы. 4.  $\frac{2}{\pi}$ . 5.  $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ . 6. 0,5. 7. 0,4375.

**Пункт 18.5.** 1. 1)  $\frac{1}{3}$ ; 2)  $\frac{4}{9}$ ; 3)  $\frac{4}{30}$ ; 4)  $\frac{1}{3}$ . 2. 1) 0,5; 2) 0,625. 3. 0,2375. 4. 0,2.

5.  $\frac{8}{203}$ . **Пункт 18.6.** 1. 0,64. 2.  $\frac{1}{12}$ . 3. 0,0012. 5. 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14;

4) 0,425. 6. 0,714. 7. 0,126. 8. 0,5. 9.  $n \geq 4$ . **Пункт 18.7.** 4. 1) Три из четырех; 2) не меньше пяти из восьми. **Пункт 18.8.**

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

6. 3,5. 8. Игра несправедливая. 10. Игра несправедливая. 11. 2 : 1. 12. Первый игрок должен получить 157,5 ливров, второй — 52,5. 13. 11 : 5.

**Пункт 18.9.** 2. 240.

3.

Цвет	черный	красный	синий	серый	белый	желтый	зеленый
Количество кепок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

4.

Жирность	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Количество литров	400	240	160	200	480	280	240

**Пункт 18.10.** 5. 1)  $R = 4$ ;  $M_o = 2$ ;  $M_e = 2$ ;  $\bar{X} = 2\frac{2}{3}$ ; 2)  $R = 8$ ;  $M_o = 2$ ;  $M_e = 1$ ;

$\bar{X} = 0,6$ . 6. 1)  $R = 3$ ;  $M_o = 3$ ;  $M_e = 3$ ;  $\bar{X} = 3\frac{4}{11}$ ; 2)  $R = 8$ ;  $M_{o1} = 4$ ;  $M_{o2} = 5$ ;

$M_e = 4$ ;  $\bar{X} = 3\frac{4}{7}$ . 7.  $M_{o1} = 135$ ;  $M_{o2} = 140$ ;  $M_e = 135$ ;  $\bar{X} = 129\frac{6}{11}$ .

§ 19. **Пункт 19.2.** 1. 1) 28 560; 2) 180 000. 2. 2 980 000. 3. 140 625. 4. 1) 504; 2) 16 848; 3) 34 992; 4) 6561. 5. 1) 40; 2) 60. Указание. Учтеть остатки от деления заданных цифр на 3. 6. 2520. 7.  $16^{100}$ . 8. 91. 9. 1)  $C_{19}^5$ ; 2)  $C_{25}^5$ . 10.  $C_{n-1}^{n-1}$ .

**Дополнительные упражнения.** 1. 729. 2. 2916. 3. 24. 4. 48. 5. 210. 6. 816. 7. 72. **Указание.** Учесть остатки от деления заданных цифр на 3. 8. 126. **Указание.** Можно сначала расположить в ряд 8 белых шаров и пронумеровать 9 мест, которые могут занимать черные шары (чтобы выполнялось условие задачи), а затем выбрать 4 из полученных номеров, которые и укажут места расположения 4 черных шаров. 9.  $C_{12}^5 + C_{10}^1 \cdot C_{12}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{12}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{12}^2 = 23562$ . 10. 480. 11. 900. 12. 54. 13. 45. 14. 11. 29. **Нет.** 30. С Наташей. 31. г). 32. Вероятность выздороветь у этого больного меньше, чем 0,01, поскольку, судя по предыдущим результатам, этот врач хуже среднего. 33. **Нет.** а)–г) возможны.

#### Раздел 4

- § 20. **Пункт 20.1.** 2. 1)  $x = 3; y = -4$ ; 2)  $x = 3; y = 8$ ; 3)  $x = -3; y = -2$ ; 4)  $x = 1; y = 0$ . 3. 1)  $8 - 2i$ ; 2)  $-2 + i$ ; 3)  $3 - 4i$ ; 4) 4. 4. 1)  $4 - 5i$ ; 2)  $2 + 19i$ ; 3)  $-11 - 5i$ ; 4)  $6 + 4i$ . 5. 1)  $18 + 16i$ ; 2)  $-16 - 28i$ ; 3)  $-18 + 14i$ ; 4) 65. 6. 1)  $3 - 4i$ ; 2)  $5 + i$ ; 3)  $2,96 - 0,28i$ ; 4)  $0,5 - 0,5i$ . 7. 1)  $i$ ; 2)  $i$ ; 3) 1; 4) 0. 8. 1)  $-5 - 12i$ ; 2)  $-2 - 2i$ ; 3)  $-7 + 24i$ ; 4)  $2 + 11i$ . 10. 1)  $2 \pm i\sqrt{5}$ ; 2)  $0,5 \pm 0,5i$ ; 3)  $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ ; 4)  $\frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}$ . **Пункт 20.2.** 2. 1)  $2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ ; 2)  $2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ; 3)  $3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ ; 4)  $3\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ ; 5)  $4 (\cos \pi + i \sin \pi)$ ; 6)  $2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ ; 7)  $4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ . 3. 1)  $2\sqrt{3} + 2i$ ; 2)  $-3 + 3\sqrt{3}i$ ; 3)  $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ . 5. 1)  $z_1 z_2 = 48 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -24\sqrt{3} - 24i$ ;  $\frac{z_1}{z_2} = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3i$ ; 2)  $z_1 z_2 = 18 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 18i$ ;  $\frac{z_1}{z_2} = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2$ . 6. 1)  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ ; 2)  $\sqrt{\frac{3}{2}} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} - \frac{\sqrt{3}+3}{4}i$ ; 3)  $\cos \pi + i \sin \pi = -1$ ; 4)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ . 7. 1) 256; 2) 32 768i; 3) 4096; 4) -1024. 8. 1)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ;  $-i$ ; 2)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$ ; 3)  $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ ; 4)  $\pm i$ ;  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ . 9. 1) 3;  $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ ; 2)  $3 \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$ . 3)  $\pm 2i$ ;  $\pm\sqrt{3} \pm i$ ; 4)  $\pm 5$ ;  $\pm 5i$ .

## Раздел 5

- § 21.** 1. 1) 8; 2) 12; 3) 9; 4) 7. 2. 1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 5; 6) 6; 7) 2; 8) -2,5; 2; 9)  $\sqrt[3]{9}$ ; 10)  $\sqrt[3]{36}$ . 3. 1)  $\frac{15+\sqrt{129}}{8}$ ; 2)  $\frac{19+\sqrt{137}}{8}$ ; 3) 1; 4) 2. 4. 1) 12; 2) 8.
5. 1) корней нет; 2) -3; 2; 3) -1; 0; 4) 4. 6. 1)  $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$ ; 2)  $\frac{9-\sqrt{21}}{2}$ ; 3)  $2+\sqrt{3}$ ; 4)  $2+\sqrt{2}$ . 7. 1) 3; 2) 2. 8. 1)  $\frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; 2) \pi m, m \in \mathbf{Z}; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ . 9. 1) 0;  $\pm \pi$ ;  $\pm \frac{3\pi}{4}$ ;  $\pm \frac{5\pi}{4}$ ; 2)  $\pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{3\pi}{2}$ ;  $-\frac{2\pi}{3}$ ;  $-\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{4\pi}{3}$ ;  $\frac{5\pi}{3}$ .
10. 1)  $\frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; 2) \pi m, m \in \mathbf{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
11. 1)  $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 2) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$ .
15. 1)  $\pm \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; 2) \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ . 21. 1) 1; 2) -1. 23. 1) 0;  $\frac{15}{4}$ ; 4; 2) -1; 3. 24. 1)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; 2) \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; 3) \pm \arccos \frac{-1}{\sqrt{3+1}} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ . 28. 1)  $-\frac{7\pi}{4}$ ; -6; -5; 2) -4;  $\frac{5\pi}{4}$ ; -3.
29. 1)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; \pi n, n \in \mathbf{Z}$ . 30. 1) 1,5; 2) 0. 32. 1) 3; 2) 1. 38. 1)  $\left[\frac{11}{12}; 1\right)$ ; 2)  $\left[\frac{9}{11}; 1\right)$ . 41. 1)  $\left(\frac{4}{7}; \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$ ; 2)  $\left(\frac{2}{5}; \frac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$ ; 3)  $(-\infty; 2] \cup [6,5; +\infty)$ .
43. 1) (0,68; 0,7); 2) (0,44; 0,5). 46. 1)  $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$ . 50. 2)  $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$ . 62. 1) (1; 5); 2) (2; 1). 63.  $c = -1$ . 69.  $\left(0; \frac{1}{12}\right]$ . 72.  $\frac{2}{3}$  л. 73. 0,5 л. 74. 75 км/ч. 75. 40 км/ч. 76. 45 и 36 дней. 77. 10 дней. 78. 6 часов. 79. 60 км/ч. 80. 15 км/ч. 81. 40 км/ч и 55 км/ч. 82. 3:1. 83. 3 кг и 7 кг. 84. 45 кг. 85. 40 кг. 86. 2,5 кг. 87. 3 тонны. 88. 98. 89. 25 лет. 90. 19 и 13 квартир. 91. 7 кг; 4 кг; 4 кг. 92. 850 л. 93. 6 месяцев.



## Обозначения, встречающиеся в учебнике

$N$ — множество всех натуральных чисел	$E(f)$ — область значений функции $f$
$Z$ — множество всех целых чисел	$\Delta x$ — приращение аргумента $x$
$Z_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел	$\Delta f(x_0), \Delta f$ — приращение функции $f$ в точке $x_0$
$Q$ — множество всех рациональных чисел	$f'(x_0)$ — производная функции $f$ в точке $x_0$
$R$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая	$\sin$ — функция синус
$R_+$ — множество всех положительных действительных чисел	$\cos$ — функция косинус
$[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с концами $a$ и $b, a < b$	$\operatorname{tg}$ — функция тангенс
$(a; b)$ — интервал (открытый промежуток) с концами $a$ и $b, a < b$	$\operatorname{ctg}$ — функция котангенс
$(a; b],$	$\arcsin$ — функция арксинус
$[a; b)$ — полуоткрытые промежутки с концами $a$ и $b, a < b$	$\arccos$ — функция аркосинус
$(a; +\infty),$	$\operatorname{arctg}$ — функция арктангенс
$[a; +\infty),$	$\operatorname{arcctg}$ — функция арккотангенс
$(-\infty; b],$	$\sqrt{a}$ — арифметический корень из числа $a$
$(-\infty; b)$ — бесконечные промежутки	$\sqrt[k]{a}$ — арифметический корень $2k$ -й степени из числа $a$ ( $k \in N$ )
$(-\infty; +\infty)$ — бесконечный промежуток, числовая прямая	$\sqrt[2k+1]{a}$ — корень $(2k+1)$ -й степени из числа $a$ ( $k \in N$ )
$(a - \delta, a + \delta)$ — $\delta$ -окрестность точки $a$	$\log_a$ — логарифм по основанию $a$
$ x $ — модуль (абсолютная величина) числа $x$	$\lg$ — десятичный логарифм (логарифм по основанию 10)
$[x]$ — целая часть числа $x$	$\ln$ — натуральный логарифм (логарифм по основанию $e$ )
$\{x\}$ — дробная часть числа $x$	$\max_{[a; b]} f$ — наибольшее значение функции $f$ на отрезке $[a; b]$
$f(x)$ — значение функции $f$ в точке $x$	$\min_{[a; b]} f$ — наименьшее значение функции $f$ на отрезке $[a; b]$
$D(f)$ — область определения функции $f$	$\int f(x) dx$ — неопределенный интеграл функции $f$
	$\int_a^b f(x) dx$ — определенный интеграл функции $f$ в пределах от $a$ до $b$

## Список использованных сокращений

- ВГУ — Воронежский государственный университет  
 ВолГУ — Волгоградский государственный университет  
 ВШЭ — Государственный университет Высшая школа экономики  
 ГАСБУ — Государственная академия сферы быта и услуг  
 ГФА — Государственная финансовая академия при Правительстве Российской Федерации  
 ГУУ — Государственный университет управления  
 ДВГУ — Дальневосточный государственный университет  
 ЕГЭ С — Единый государственный экзамен (по математике) часть С (задания с развернутым ответом)  
 ЛТА — Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия  
 МАИ — Московский авиационный институт (государственный технический университет)  
 МАМИ — Московский государственный технический университет (Московский АвтоМеханический Институт)  
 МАТИ — Российский Государственный Технологический Университет им. К. Э. Циолковского  
 МГАТХТ — Московская государственная академия тонкой химической технологии  
 МГСУ — Московский государственный строительный университет  
 МГТУ — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
 МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова:  
 ВМК — факультет вычислительной математики и кибернетики  
 биол. ф-т — биологический факультет  
 геогр. ф-т — географический факультет  
 геолог. ф-т — геологический факультет  
 ИСАА — институт стран Азии и Африки  
 мехмат — механико-математический факультет  
 физ. ф-т — физический факультет  
 хим. ф-т — химический факультет  
 эк. ф-т — экономический факультет  
 МГУИЭ — Московский государственный университет инженерной экологии  
 МГУЛ — Московский государственный университет леса  
 МГУПБ — Московский государственный университет прикладной биотехнологии  
 МИИТ — Московский государственный университет путей сообщения  
 МИРЭА — Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)  
 МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет  
 МИСиС — Московский институт стали и сплавов  
 МИЭМ — Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)  
 МПГУ — Московский педагогический государственный университет  
 МТУСИ — Московский технический университет связи и информатики  
 МФТИ — Московский физико-технический институт (государственный университет)  
 МЭСИ — Московский государственный университет экономики, статистики и информатики  
 ННГУ — Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 ОмГУ — Омский государственный университет  
 ПГУ — Пермский государственный университет  
 РЭА — Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова  
 СПбГИЭУ — Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет  
 СПбГУ — Санкт-Петербургский государственный университет  
 СПбГУКиТ — Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения  
 СПбГУНИИПТ — Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий  
 СПбГУТ — Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций  
 СПбУЭФ — Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов  
 СПбГУАП — Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения  
 СТАНКИН — Московский государственный технологический университет  
 УрГУ — Уральский государственный университет

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиомы вероятности** 277  
**Асимптота** 88, 136, 137  
 — вертикальная 83, 88, 136, 138  
 — горизонтальная 89, 137, 140  
 — наклонная 84, 89, 137, 140
- Биномиальные коэффициенты** 251–253  
**Бином Ньютона** 250–252
- Варианта** 310  
**Вариационный ряд** 310  
**Вероятность произведения событий** 290–291  
 — события 257, 258, 261, 275–277, 280, 283  
 — — достоверного 258, 262  
 — — невозможного 258, 262  
 — — противоположного 268, 270  
 — суммы несовместных событий 269, 272  
 — — событий 273  
 — того, что произойдет хотя бы одно из независимых событий 291, 294  
 — условная 286, 287
- Выборка** 310, 311  
 — репрезентативная 311  
**Выборочный метод** 314
- Гармонические колебания** 227  
 — —, амплитуда 227  
 — —, начальная фаза 227  
 — —, угловая частота 227
- Генеральная совокупность** 310, 311  
**Геометрическое изображение комплексных чисел** 349, 355  
**Геометрический смысл дифференциала** 184  
 — — модуля 7, 11  
 — — определенного интеграла 208  
 — — производной 31, 38
- Действия над комплексными числами** 348, 351–355  
**Дифференциал** 184  
**Дифференцирование** 30, 36  
**Дополнение множества** 271
- Достаточное условие возрастания функции** 62, 67, 74  
 — — существования точки перегиба функции 148, 155  
 — — убывания 62, 67, 74  
 — — экстремума 63, 73, 74
- Закон больших чисел** 296, 298, 299  
 — распределения случайной величины 301, 302
- Интеграл определенный** 206, 208, 211, 214  
 — —, вычисление объемов 219, 221, 222  
 — —, площадей 217–220  
 — —, свойства 207, 212  
 — неопределенный 196, 199
- Интегральная сумма** 208, 214  
**Исследование функции** 64, 69, 75, 82–84, 149–152, 156
- Касательная к графику** 30, 31, 34, 37  
**Комбинаторика** 233, 235  
 —, схема решения задач 235  
**Комплексная плоскость** 349, 355  
**Комплексное число, алгебраическая форма** 347, 351  
 — —, аргумент 358, 361  
 — —, возведение в натуральную степень 352, 359, 364  
 — —, действительная часть 347, 351  
 — —, извлечение корня 359, 364  
 — —, мнимая часть 347, 351  
 — —, модуль 358, 361  
 — —, тригонометрическая форма 358, 360
- Криволинейная трапеция** 207, 209  
**Критические точки** 63, 69
- Максимум функции** 63, 70  
**Математическое ожидание** 304  
**Мгновенная скорость** 30, 31, 33, 39  
**Медиана** 317, 323  
**Меры центральной тенденции** 324

- Метод интервалов 21, 24  
 Механический смысл производной 31, 39  
 Минимум функции 63, 70  
 Мнимая единица 347, 350  
 Многочлен 23, 90, 91  
 Множество  
 — упорядоченное 233, 236, 237  
 Мода 317, 322  
 Модуль действительного числа 7, 11
- Наибольшее и наименьшее значения функции** 100, 102–105  
**Необходимое и достаточное условие постоянства функции** 62, 68  
**Необходимое условие существования точки перегиба** 148, 155  
 — — экстремума 63, 72  
**Неравенство Чебышева** 296, 299
- Область определения функции** 85–86  
**Определение вероятности геометрическое** 280, 281, 283  
 — — классическое 257, 258, 261  
 — — статистическое 275, 276  
**Оценка значений левой и правой частей уравнения** 158
- Первообразная** 195, 197  
 —, основное свойство 195, 198  
**Перестановки без повторов** 233, 241  
 — с повторениями 327, 332  
**Первый замечательный предел** 130  
**Полигон относительных частот** 318  
 — частот 318  
**Последовательность** 128  
**Правила дифференцирования** 45–49  
 — интегрирования 196, 199, 200  
 — нахождения дифференциалов 185  
**Правило произведения** 234, 236  
 — суммы 234, 235  
**Предел последовательности** 128  
**Предел функции** 19, 22, 112, 114  
 — — бесконечный 127  
 — —, критерий существования 122  
 — — левосторонний 122  
 — — на бесконечности 126  
 — — односторонний 121  
 — — правосторонний 122
- Признак максимума функции** 73  
 — минимума 74  
**Применение производной к доказательству неравенств** 172  
 — — — тождеств 143, 145  
 — — — исследованию функций 82  
 — — — решению задач с параметрами 177  
 — — — уравнений и неравенств 158  
**Приращение аргумента** 29, 32  
 — функции 29, 32  
**Произведение событий** 269, 271  
**Производная** 30, 35  
 — вторая 147, 152  
 — произведения 45, 46  
 —  $n$ -го порядка 152  
 — сложной функции 45, 49  
 — суммы 45, 46  
 — частного 45, 47  
**Производные обратных тригонометрических функций** 143–145  
 — элементарных функций 45, 46, 48, 54  
**Пространство элементарных событий** 257, 261
- Работа силы при перемещении тела** 229  
**Равенство комплексных чисел** 347, 351, 359, 363  
**Размах выборки** 316, 322  
**Размещение без повторов** 233, 237, 242  
 — с повторениями 327, 329  
**Ранжирование ряда данных** 316, 318  
**Распределение вероятностей дискретное** 303
- Случайная величина** 302  
 — — дискретная 303  
 — — закон распределения 302  
**Событие достоверное** 257, 260  
 — невозможное 257, 260  
 —, относительная частота 275, 276  
 — противоположное 268, 270  
 — случайное 256, 258  
 —, частота 275, 276  
 — элементарное 257, 261  
**События независимые** 290, 291  
 — —, свойство 291, 292  
 — несовместные 256, 257, 260  
 — равновозможные 256, 260

- Соединения 233, 235  
Сочетания без повторов 234, 245  
— с повторениями 327, 334  
Среднее значение выборки 323  
Статистика 308  
— математическая 309  
Степени числа  $i$  348, 352  
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 130  
Сумма событий 269, 270  
Схема Бернулли 295, 297
- Таблица неопределенных интегралов 196, 200  
— распределения значений случайной величины по их вероятностям 301  
Теорема Вейерштрасса 103  
— о единственности предела 120  
— умножения вероятностей 286, 287  
Теоремы о пределах функции 112, 115–119  
— о корнях уравнения 159  
Теория вероятностей 258  
Точка максимума 62, 70  
— минимума 62, 70  
— перегиба графика функции 147, 154  
— — функции 147, 155  
— разрыва непрерывной функции 23, 124  
Треугольник Паскаля 246, 251
- Угловой коэффициент касательной 31, 38  
Уравнение дифференциальное 225  
— —, решение 225  
— касательной 31, 38  
Ускорение прямолинейного движения 31, 39
- Формула Бернулли 295, 297  
— Лагранжа 67  
— Ньютона–Лейбница 206, 211  
Функция бесконечно большая 128  
— малая 113, 116  
— — —, свойства 113, 117  
— возрастающая 62, 65  
— выпуклая вверх 147, 148, 153, 154  
— — вниз 147, 148, 153, 154  
— дифференцируемая 31, 35, 39  
— интегрируемая на отрезке 211  
— монотонная 62, 65  
— непрерывная 20, 23, 123  
— —, свойства 20, 24, 125  
— нечетная 86, 94  
— периодическая 86  
— постоянная 23, 62, 67, 143, 145  
— разрывная 23, 124  
— убывающая 62, 65  
— четная 86, 94
- Числа действительные 6, 10, 193, 194, 350, 351, 354  
— дробные 6, 8  
— иррациональные 6, 10, 350  
— комплексные 347, 351, 358, 360  
— — сопряженные 347, 348, 352  
— натуральные 6, 8, 349  
— рациональные 6, 8, 350  
— целые 6, 8, 349  
Число нуль 6, 8  
— чисто мнимое 351
- Эксперименты случайные 256, 258  
— независимые 295, 296  
Экстремум функции 63, 70  
— — локальный 71

## СОДЕРЖАНИЕ

## РАЗДЕЛ 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1	Действительные числа и их свойства .....	6
§ 2	Понятия предела функции в точке и непрерывности функции .....	18
§ 3	Понятие производной, ее механический и геометрический смысл.....	29
§ 4	Правила вычисления производных. Производная сложной функции .....	45
§ 5	Производные элементарных функций .....	54
§ 6	Применение производной к исследованию функций .....	62
	6.1. Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функции и экстремумов функции .....	62
	6.2. Общая схема исследования функции для построения ее графика .....	82
	6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции .....	100
§ 7	Понятия и основные свойства предела функции и предела последовательности.....	112
	7.1. Доказательство основных теорем о пределах .....	112
	7.2. Односторонние пределы .....	121
	7.3. Непрерывные функции .....	123
	7.4. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел функции. Предел последовательности .....	126
	7.5. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ .....	130
	7.6. Практическое вычисление предела функции .....	132
§ 8	Асимптоты графика функции .....	136
§ 9	Производные обратных тригонометрических функций. Доказательство тождеств с помощью производной .....	143
§ 10	Вторая производная, производные высших порядков. Понятие выпуклости функции .....	147
§ 11	Применение производной к решению уравнений и неравенств .....	158
	11.1. Применение производной к решению уравнений и неравенств.....	158
	11.2. Применение производной к доказательству неравенств.....	172

<b>§ 12</b>	Применение производной к решению задач с параметрами .....	177
<b>§ 13</b>	Дифференциал функции.....	184
	<i>Дополнительные упражнения к разделу 1.....</i>	<i>187</i>
	<i>Сведения из истории.....</i>	<i>192</i>

## РАЗДЕЛ 2. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

§ 14	Первообразная и ее свойства.....	195
§ 15	Определенный интеграл и его применение .....	206
	15.1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла.....	206
	15.2. Вычисление площадей и объемов с помощью определенных интегралов .....	217
<b>§ 16</b>	Простейшие дифференциальные уравнения.....	225
	<i>Дополнительные упражнения к разделу 2.....</i>	<i>230</i>
	<i>Сведения из истории.....</i>	<i>232</i>

## РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

§ 17	Элементы комбинаторики и бином Ньютона.....	233
	17.1. Элементы комбинаторики.....	233
	17.1.1. Правила суммы и произведения. Упорядоченные множества. Размещения.....	235
	17.1.2. Перестановки .....	241
	17.1.3. Сочетания .....	245
	17.2. Бином Ньютона.....	250
§ 18	Основные понятия теории вероятностей.....	256
	18.1. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности .....	256
	18.2. Операции над событиями. Свойства вероятностей событий .....	268
	18.3. Относительная частота случайного события. Статистическое определение вероятности .....	275
	<b>18.4.</b> Геометрическое определение вероятности .....	280
	<b>18.5.</b> Условные вероятности .....	286
	18.6. Независимые события .....	290

18.7.	Схема Бернулли. Закон больших чисел .....	295
18.8.	Понятия случайной величины и ее распределения. Математическое ожидание случайной величины .....	301
18.9.	Понятие о статистике. Генеральная совокупность и выборка .....	308
18.10.	Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных. ....	316
§ 19	Соединения с повторениями. Решение более сложных комбинаторных задач .....	327
19.1.	Соединения с повторениями .....	327
19.1.1.	Размещения с повторениями .....	328
19.1.2.	Перестановки с повторениями .....	332
19.1.3.	Сочетания с повторениями .....	334
19.2.	Решение более сложных комбинаторных задач .....	336
	<i>Дополнительные упражнения к разделу 3.</i> .....	340
	<i>Сведения из истории.</i> .....	343

#### РАЗДЕЛ 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 20	Комплексные числа .....	347
20.1.	Алгебраическая форма комплексного числа .....	347
20.2.	Тригонометрическая форма комплексного числа .....	358

#### РАЗДЕЛ 5. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ

§ 21.	Уравнения, неравенства и их системы .....	368
	<i>Справочный материал</i> .....	398
	Таблица 1. Разложение алгебраических выражений на множители .....	398
	Таблица 2. Свойства корней $n$ -й степени .....	399
	Таблица 3. Свойства логарифмов .....	400
	Таблица 4. Тригонометрические формулы и уравнения .....	401
	Таблица 5. Простейшие показательные уравнения .....	404
	Таблица 6. Решение более сложных показательных уравнений. ....	405
	Таблица 7. Решение показательных неравенств .....	406



Таблица 8. Решение логарифмических уравнений.....	408
Таблица 9. Решение логарифмических неравенств.....	410
Таблица 10. Преобразование графика функции $y = f(x)$ .....	412
Таблица 11. Графики уравнений и неравенств с двумя переменными .....	413
<i>Ответы и указания к упражнениям .....</i>	<i>415</i>
<i>Обозначения, встречающиеся в учебнике .....</i>	<i>424</i>
<i>Список использованных сокращений .....</i>	<i>425</i>
<i>Предметный указатель.....</i>	<i>426</i>

*Нелин Евгений Петрович  
Лазарев Виктор Андреевич*

## **Алгебра и начала математического анализа**

**11 класс**

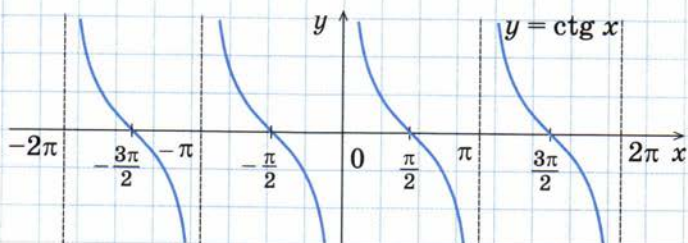
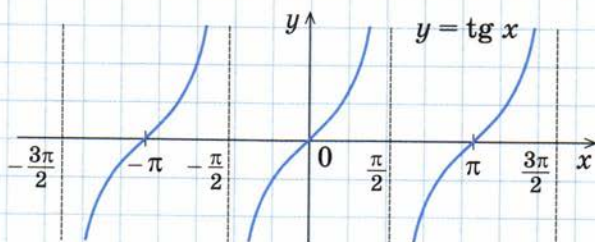
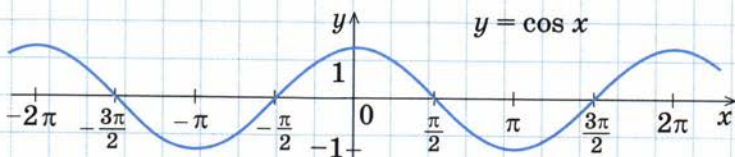
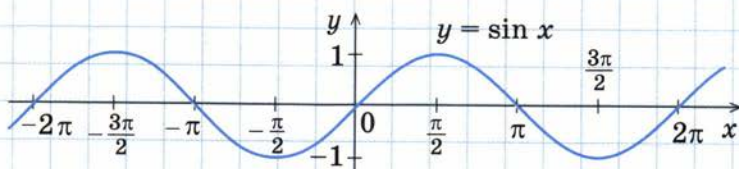
Подписано в печать 03.02.2012. Формат 70×90/16.  
Усл.-печ. л. 31,59. Тираж 5000 экз. Заказ 4875.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,  
сайт: [www.ilexa.ru](http://www.ilexa.ru), E-mail: [real@ilexa.ru](mailto:real@ilexa.ru),  
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных  
издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного  
Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».  
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.



## ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



## ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

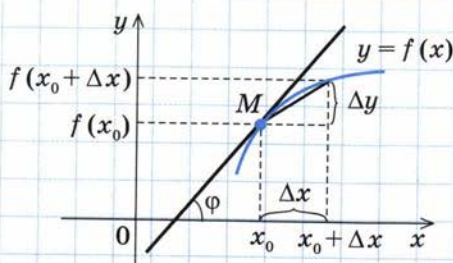
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ



$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = k$$

( $k$  — угловой коэффициент касательной)

Уравнение касательной  

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

## ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$c' = 0 \quad (c \text{ — постоянная})$$

$$x' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

## ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$(cu)' = cu'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

### Производная сложной функции

Если  $y = f(u)$  и  $u = u(x)$ , то есть  $y = f(u(x))$ , то

$$(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$