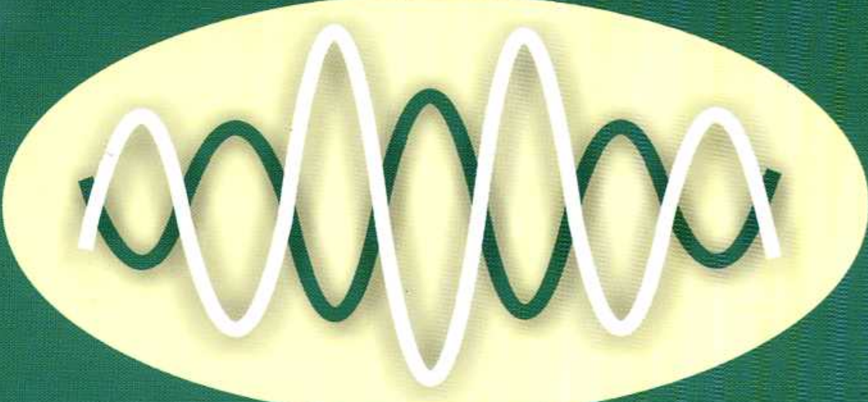
Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА



10 класс

ИЛЕКСА

Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений
Базовый и профильный уровни

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
ИЛЕКСА
2011

УДК 373.167.1: [512 + 517]
ББК 22.14я72
Н49

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106-5215/29 от 29.10.2010)
и Российской академии образования (№ 01-5/7д-76 от 20.10.2010)

Условные обозначения в учебнике

▮	**главное в учебном материале**
▶	начало решения задачи
◁	окончание решения задачи
●	начало обоснования утверждения
○	окончание обоснования утверждения

Нелин Е.П., Лазарев В.А.
Н49 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Илекса, 2011, — 480 с.: ил.
ISBN 978-5-89237-336-4

Содержание учебника соответствует федеральным компонентам государственного стандарта общего образования по математике и содержит материал как базового, так и профильного уровня. По нему можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы.

Учебник ориентирован на подготовку учащихся к успешной сдаче Единого государственного экзамена и вступительных экзаменов в ВУЗы.

УДК 373.167.1: [512 + 517]
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-89237-336-4

Предисловие для учащихся

Вы начинаете изучать новый предмет «*Алгебра и начала математического анализа*», который объединяет материал нескольких отраслей математической науки. Как и в курсе алгебры, значительное внимание будет уделено преобразованию выражений, решению уравнений, неравенств и их систем и изучению свойств функций. Наряду с решением знакомых задач, связанных с многочленами, рациональными дробями, степенями и корнями, в 10 классе будут рассмотрены новые виды функций: тригонометрические, показательные и логарифмические и соответствующие уравнения и неравенства.

Принципиально новая часть курса — начала математического анализа — будет рассматриваться в 11 классе. *Математический анализ* — отрасль математики, сформированная в XVIII столетии, которая сыграла значительную роль в развитии природоведения: появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, которые возникают во время решения разнообразных прикладных задач.

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником.

Система учебного материала учебника по каждой теме представлена на двух уровнях. *Основной материал* приведен в параграфах, номера которых в содержании напечатаны на белом фоне. *Дополнительный материал* (номера параграфов напечатаны на синем фоне) предназначен для овладения темой на более глубоком уровне и может осваиваться учеником самостоятельно или под руководством учителя при изучении математики на базовом уровне, а может использоваться для систематического изучения курса алгебры и начал анализа на профильном уровне.

В начале многих параграфов приводятся *справочные таблицы*, которые содержат основные определения, свойства и *ориентиры* по поиску плана решения задач по теме. Для ознакомления с основными идеями решения задач приводятся примеры, в которых, кроме самого решения, содержится также *комментарий*, который поможет составить план решения аналогичного задания.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предлагается система вопросов и упражнений. Ответы на эти вопросы и примеры решения аналогичных упражнений можно найти в тексте параграфа. Система упражнений к основному материалу дана на трех уровнях. *Задачи обязательного уровня* обозначены символом «°», более сложные *задачи достаточного уровня* даны без обозначений, а *задачи высокого уровня* сложности обозначены символом «*». Заметим, что в учебнике и для многих задач углубленного уровня предлагаются специальные ориентиры, которые позволяют освоить методы их решения (Многие из приведенных задач предлагались в заданиях ЕГЭ по математике и на вступительных экзаменах в различные вузы страны. Список принятых сокращений приведен на с. 474). *Ответы и указания* для подавляющего большинства упражнений приведены в соответствующем разделе. О происхождении понятий, терминов и символов вы сможете узнать, прочитав «Сведения из истории».

Предисловие для учителя

Предлагаемый учебник направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения в старшей школе, на организацию личностно-ориентированного обучения математике, на создание условий для дифференциации содержания обучения старшеклассников, для построения индивидуальных образовательных программ. Учебник подготовлен в соответствии со стандартом среднего (полного) общего образования по математике (базового и профильного уровней).

Как известно, в обучении учебник выполняет две основные функции: 1) является источником учебной информации, которая раскрывает в доступной для учащихся форме предусмотренное образовательным стандартом содержание; 2) выступает средством обучения, с помощью которого осуществляется организация учебного процесса, в том числе и самообразование учащихся.

Укажем основные отличия предложенного учебника от других учебников по алгебре и началам математического анализа в выполнении этих функций.

Это *двухуровневый учебник*, содержащий общий материал для классов, в которых учащиеся изучают математику на базовом или профильном уровне, и дополнительный материал для классов, которые изучают математику на профильном уровне. В каждом разделе наряду с параграфами, которые предназначены для овладения учениками стандартом математического образования на базовом уровне, есть систематический материал, предназначенный для организации индивидуальной работы с учениками, которые интересуются математикой. Предложенный дополнительный материал может использоваться и для организации обучения алгебре и началам математического анализа в классах физико-математического (или другого) профиля, учебные планы которых предусматривают повышенный уровень овладения материалом курса.

Основной материал, который должны усвоить учащиеся, структурирован в форме *справочных таблиц* в начале параграфа, которые содержат систематизацию теоретического материала и *способы деятельности* с этим материалом в форме специальных *ориентиров по решению задач*. ***В первую очередь ученики должны усвоить материал, который содержится в таблицах.*** Поэтому при объяснении нового материала целесообразно применить работу с учебником по соответствующим таблицам и рисункам. Все необходимые объяснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать свой собственный уровень ознакомления с этими обоснованиями.

Подчеркнем, что любой учебник алгебры и начал математического анализа должен обеспечить не только ознакомление учащихся с основными алгебраическими понятиями и их свойствами, но и формирование способов деятельности с этими понятиями. Систему условий, на которую реально опирается учащийся при выполнении действия, психологи называют ориентировочной основой деятельности. Если учащимся предлагают достаточно общие ориентировочные основы для выполнения соответствующих заданий в виде специальных правил и алгоритмов, то говорят, что им предлагаются ориентировочные основы второго и третьего типов. Как правило, в учебниках алгебры и начал математического анализа для 10–11 классов учащимся предлагаются только образцы выполнения заданий, а затем учащиеся приступают к самостоятельной деятельности, ориентируясь на эти образцы (в этом случае говорят, что учащимся предлагаются ориентировочные основы первого типа). Такое обучение предполагает, что учащийся самостоятельно выполнит систематизацию и обобщение способов деятельности, ориентируясь на предложенные образцы, и выделит для себя ориентировочную основу выполнения рассмотренных заданий. Как правило, в этом случае ориентировочная основа, которая образуется у учащегося, неполная и, кроме того, часто не осознана, так как учащийся не может объяснить, почему при выполнении задания он выполнил именно такие преобразования, а не другие.

По этой причине одним из принципов построения данного учебника было выделение для учащихся ориентировочных основ соответствующей деятельности по выполнению алгебраических заданий непосредственно в учебнике.

В каждом разделе решению упражнений предшествует выделение общих ориентиров по решению таких задач. Поэтому важной составляющей работы с предложенным учебником является обсуждение выбора соответствующих ориентиров и планов решения задач. Объяснение методов решения ведется по схеме:

Решение	Комментарий
Как можно записать решение задачи	Как можно рассуждать при решении такой задачи

При такой подаче учебного материала комментарий, в котором объясняется решение, не мешает восприятию основной идеи и плана решения задач определенного вида. Это позволяет ученику, который уже усвоил способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задания, а ученику, которому необходима консультация по решению, — получить такую детальную консультацию, которая содержится в комментарии.

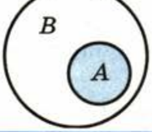
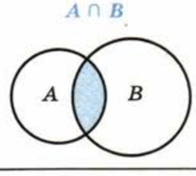
За счет четкого выделения общих ориентиров работы с практическими заданиями курса удается часть «нестандартных» (с точки зрения традиционных учебников) задач перевести в разряд «стандартных» (например, уравнения, для решения которых приходится применить свойства функций). Это позволяет уменьшить разрыв между уровнем требований традиционной государственной аттестации по алгебре и началам математического анализа и уровнем требований по этому курсу на вступительных экзаменах в вузы и в заданиях Единого государственного экзамена (ЕГЭ), а также ознакомить учеников с методами решения задач, которые предлагаются на вступительных экзаменах в вузы и в заданиях ЕГЭ. В частности, даже если ученик изучает математику на базовом уровне, ему предоставляется возможность познакомиться с методами и идеями решения заданий вступительных экзаменов по математике, а также с методами решения и оформлением заданий второй части (С) ЕГЭ по математике.

Раздел

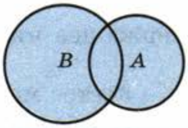
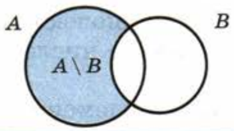
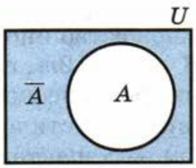
1 ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

§ 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Таблица 1

Понятие множества и его элементов	
Элемент a принадлежит множеству A $\Leftrightarrow$ $a \in A$ Элемент b не принадлежит множеству A $\Leftrightarrow$ $b \notin A$ В множестве нет элементов $\Leftrightarrow$ $\varnothing$	Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по определенному признаку. В математике множество — одно из основных неопределяемых понятий. **Каждый объект, принадлежащий множеству A, называется *элементом* этого *множества*.** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$
Подмножество ($\subset$)	
 $A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$	**Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B,** и записывают так: $A \subset B$. Используется также запись $A \subseteq B$
Равенство множеств	
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	**Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества**
Пересечение множеств ($\cap$)	
 $C = A \cap B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$	***Пересечением множеств* A и B называют их общую часть, то есть множество C всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B**

Продолж. табл. 1

Объединение множеств (∪)	
 $C = A \cup B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$	***Объединением множеств A и B*** **называют множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (A или B)**
Разность множеств (\\)	
 $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$	***Разностью множеств A и B*** **называется множество C, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B**
Дополнение множества	
 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$	Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального* множества U, то разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A. Другими словами, ***дополнением множества A*** **называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A** (но принадлежащих универсальному множеству)

Объяснение и обоснование

1. Понятие множества. Одним из основных понятий, которые используются в математике, является понятие множества. Для него не дается определения. Можно пояснить, что *множеством* называют произвольную совокупность объектов, а сами объекты — *элементами* данного *множества*. Так, можно говорить о множестве учеников в классе (элементы — ученики), множестве дней недели (элементы — дни недели), множестве натуральных делителей числа 6 (элементы — числа 1, 2, 3, 6) и т. д.

В курсах алгебры и алгебры и начал математического анализа чаще всего рассматривают множества, элементами которых являются числа, и поэтому их называют *числовыми множествами*.

Как правило, множества обозначают прописными буквами латинского алфавита. Например, если множество M состоит из чисел 1; 2; 3, то его обозначают так: $M = \{1; 2; 3\}$. Тот факт, что число 2 входит в это множество (является элементом данного множества M), записывается с помощью специального значка $\in$ следующим образом: $2 \in M$; а то, что число 5 не входит в это множество (не является элементом данного множества), записывается так: $5 \notin M$.

Можно рассматривать также множество, не содержащее ни одного элемента, — *пустое множество*.

Например: множество простых делителей числа 1 — пустое множество.

Для некоторых множеств существуют специальные обозначения. Так, пустое множество обозначается символом $\varnothing$, множество всех натуральных чисел — буквой $\boldsymbol{N}$, множество всех целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, множество всех рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$, а множество всех действительных чисел — буквой $\boldsymbol{R}$.

Множества бывают конечными и бесконечными в зависимости от того, какое количество элементов они содержат. Так, множества $A = \{7\}$ и $M = \{1;\ 2;\ 3\}$ — конечные, потому что содержат конечное число элементов, а множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — бесконечные.

Множества задают или с помощью перечисления их элементов (это можно сделать только для конечных множеств), или с помощью описания, когда задается правило (*характеристическое свойство*), которое позволяет определить, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому множеству. Например, $A = \{-1;\ 0;\ 1\}$ (множество задано перечислением элементов), B — множество всех четных целых чисел (множество задано характеристическим свойством всех элементов множества). Последнее множество иногда записывают так: $B = \{b \mid b$ — четное целое число$\}$ или так: $B = \{b \mid b = 2m$, где $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — здесь после вертикальной черточки записано характеристическое свойство*.

В общем виде запись множества с помощью характеристического свойства можно обозначить так: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ — характеристическое свойство. Например, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1,\ 1\}$, $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ и $x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

2. Равенство множеств. Пусть A — множество всех цифр трехзначного числа 312, то есть $A = \{3;\ 1;\ 2\}$, а B — множество всех натуральных чисел, меньших четырех, то есть $B = \{1;\ 2;\ 3\}$. Поскольку эти множества состоят из одних и тех же элементов, то они считаются равными. Это записывают так: $A = B$. Для бесконечных множеств таким способом (сравнивая все элементы) установить их равенство невозможно. Поэтому в общем случае равенство множеств определяется следующим образом.

Два множества называются ***равными***, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.

Из приведенного определения равенства множеств следует, что в множестве одинаковые элементы не различаются. Действительно, например, $\{1;\ 2;\ 2\} = \{1;\ 2\}$, поскольку каждый элемент первого множества (1 или 2) является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множе-

* В этом случае и в записи решений тригонометрических уравнений и неравенств в разделе 3 запись $m \in \boldsymbol{Z}$ означает, что m принимает любое целое значение, что также можно записать как $m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \dots$.

ства (1 или 2) является элементом первого. Поэтому, записывая множество, чаще всего каждый его элемент записывают только один раз.

3. Подмножество

Если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ является элементом множества $\boldsymbol{B}$, то говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{B}$.

Это записывают следующим образом: $A \subset B$.

Например, $\{1;\ 2\} \subset \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (поскольку любое натуральное число — целое), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (поскольку любое целое число — рациональное), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (поскольку любое рациональное число — действительное).

Полагают, что всегда $\varnothing \subseteq A$, *то есть пустое множество является подмножеством любого множества.*

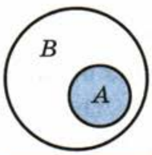
Иногда вместо записи $A \subset B$ используется также запись $A \subseteq B$.

Сопоставим определение равенства множеств с определением подмножества. Если множества A и B равны, то: 1) каждый элемент множества A является элементом множества B, следовательно, A — подмножество B ($A \subseteq B$); 2) каждый элемент множества B является элементом множества A, следовательно, B — подмножество A ($B \subseteq A$). Таким образом,

два множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого.

$$\boxed{A = B \text{ означает то же, что } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A}$$

Иногда соотношения между множествами удобно иллюстрировать с помощью кругов (которые часто называют кругами Эйлера–Венна). Например, рисунок 1 иллюстрирует определение подмножества, а рисунок 2 — отношения между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.



$$\boxed{A \subset B} \Leftrightarrow \boxed{\text{Если } x \in A\text{, то } x \in B}$$

Рис. 1

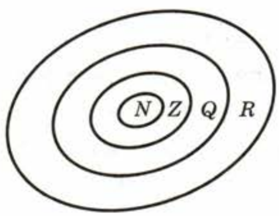


Рис. 2

4. Операции над множествами. Над множествами можно выполнять определенные действия: находить их пересечение, объединение, разность. Дадим определение этих операций и проиллюстрируем их с помощью кругов.

Пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называют их общую часть, то есть множество $\boldsymbol{C}$ всех элементов, принадлежащих как множеству $\boldsymbol{A}$, так и множеству $\boldsymbol{B}$.

Пересечение множеств обозначают знаком $\cap$ (на рисунке 3 приведена иллюстрация и символическая запись определения пересечения множеств).

Например, если $A = \{2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$, то $A \cap B = \{2;\ 4\}$.

Объединением множеств A и B называют множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (*A или B*).

Объединение множеств обозначают знаком $\cup$ (на рисунке 4 приведена иллюстрация и символическая запись определения объединения множеств).

Например, для множеств A и B из предыдущего примера

$$A \cup B = \{0;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\}.$$

Если обозначить множество иррациональных чисел через M, то $M \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Разность множеств обозначают знаком $\setminus$. На рисунке 5 приведена иллюстрация и символическая запись определения разности множеств.

Например, если $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4;\ 5\}$.

Если B — подмножество A, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A* (рис. 6).

Например, если обозначить множество всех иррациональных чисел через M, то $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: множество M всех иррациональных чисел дополняет множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел до множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

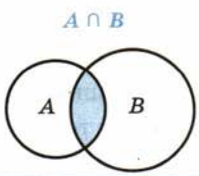
Все множества, которые мы рассматриваем, являются подмножествами некоторого так называемого *универсального* множества U. Его обычно изображают в виде прямоугольника, а все остальные множества — в виде кругов внутри этого прямоугольника (рис. 7). Разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A.

Дополнением множества A называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A

(но принадлежащих универсальному множеству U).

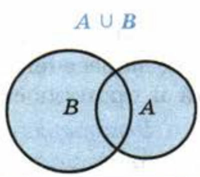
Дополнение множества A обозначается $\overline{A}$ (можно читать: «A с чертой»).

Например, если $U = \boldsymbol{R}$ и $A = [0;\ 1]$, то $\overline{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Для этого примера удобно использовать традиционную иллюстрацию множества действительных чисел на числовой прямой (рис. 8).



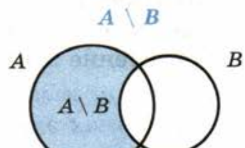
$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$

Рис. 3



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$

Рис. 4



$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$

Рис. 5

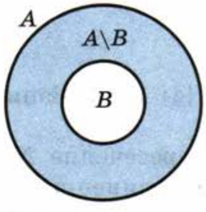


Рис. 6

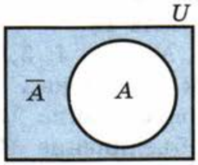


Рис. 7

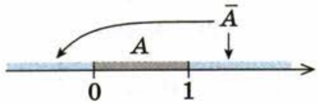


Рис. 8

Вопросы для контроля

1. Приведите примеры множеств, укажите несколько элементов каждого множества.
2. Как обозначаются пустое множество, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел?
3. Дайте определение равенства множеств. Приведите примеры двух равных множеств.
4. Дайте определение подмножества. Приведите примеры. Проиллюстрируйте это понятие с помощью кругов.
5. Дайте определение пересечения, объединения, разности двух множеств. Приведите примеры. Проиллюстрируйте с помощью кругов.
6. Объясните, что называется дополнением одного множества до другого; дополнением множества. Приведите примеры. Проиллюстрируйте эти понятия с помощью соответствующих рисунков.

Упражнения

1°. Запишите с помощью фигурных скобок множество:
1) всех букв в слове «алгебра»; 2) всех четных однозначных натуральных чисел; 3) всех нечетных однозначных натуральных чисел; 4) всех однозначных простых чисел.

2°. По какому характеристическому свойству записаны такие множества:
1) {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};
2) {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь};
3) {Австралия, Азия, Америка, Антарктида, Африка, Европа};
4) {до, ре, ми, фа, соль, ля, си};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

3°. Приведите несколько примеров описаний пустого множества.

4°. A — множество всех четных натуральных чисел, расположенных между числами 25 и 35. Запишите множество A с помощью фигурных скобок. Какие из чисел 18, 28, 30, 40 принадлежат множеству A? Ответ запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$.

5°. Запишите с помощью фигурных скобок и обозначьте множество:
1) всех натуральных делителей числа 12;

2) всех натуральных делителей числа 30;
3) всех целых делителей числа 6;
4) всех простых делителей числа 12.

6°. Известно, что $M = \{1;\ 2;\ 5\}$, $N = \{1;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9\}$, $K = \{4;\ 7;\ 9\}$. Запишите с помощью фигурных скобок или знака $\varnothing$:
1) пересечение M и N; 2) пересечение M и K; 3) пересечение N и K; 4) объединение M и N; 5) объединение M и K; 6) объединение N и K; 7) разность M и N; 8) разность M и K; 9) разность N и K; 10) дополнение K до N.

7°. Объясните, почему выполняется равенство:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

8°. Запишите множество всех двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 0, 1, 3.

9°. Известно, что A — множество всех натуральных делителей числа 12, а B — множество всех целых делителей числа 6. Запишите множество:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10*. Пусть A и B — некоторые множества. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $A \cup B = B \cup A$ — *переместительный закон для объединения;*
2) $A \cap B = B \cap A$ — *переместительный закон для пересечения.*

11. В одном множестве 40 разных элементов, а во втором — 30. Сколько элементов может быть у их: 1) пересечения; 2) объединения?

12*. Пусть A, B, C — некоторые множества. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сочетательный закон для объединения;*
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сочетательный закон для пересечения;*
$$\left.\begin{array}{l} 3)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ 4)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right| \text{— \textit{распределительные законы};}$$
$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 6)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right| \text{— \textit{законы де Моргана}.}$$

13. Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают 25 учащихся, французский — 27 учащихся, а два языка — 18 учащихся. Сколько учащихся в классе?

14*. Часть жителей города на Украине говорит только по-украински, часть — только по-русски, а часть — на двух языках. По-украински говорит 95 % жителей, а по-русски — 85 %. Сколько процентов жителей города говорит на двух языках?

15*. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

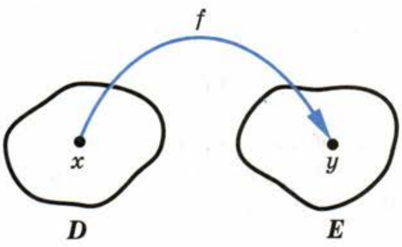
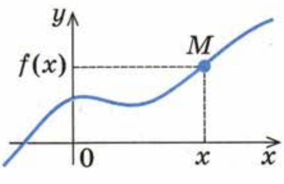
16*. Запишите множество всех правильных дробей $\frac{a}{b}$, где $a \in A$, $b \in B$ и $A = \{2;\ 3;\ 4;\ 6\}$, $B = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

17*. Какие трехзначные числа можно записать, если:
$A = \{3;\ 1;\ 2\}$ — множество цифр для обозначения сотен;
$B = \{2;\ 8\}$ — множество цифр для обозначения десятков;
$C = \{5;\ 7\}$ — множество цифр для обозначения единиц.
Сколько таких чисел получим? Попытайтесь сформулировать общее правило подсчета количества всех таких чисел, если множество A содержит m элементов ($0 \notin A$), множество B — n элементов, множество C — k элементов.

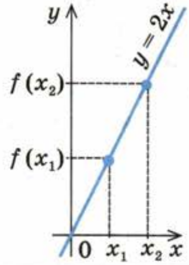
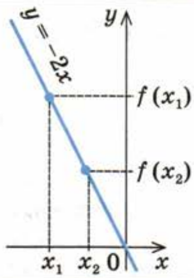
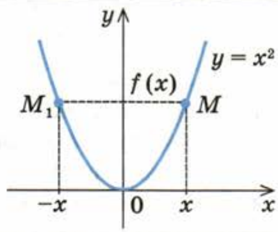
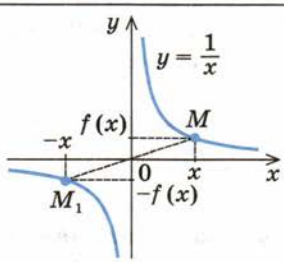
§ 2. ПОВТОРЕНИЕ И РАСШИРЕНИЕ СВЕДЕНИЙ О ФУНКЦИИ

2.1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица 2

1. Понятие числовой функции	
	***Числовой функцией с областью определения D*** **называется зависимость, при которой каждому числу x из множества D (области определения) ставится в соответствие единственное число y.** Записывают это соответствие так: $y = f(x)$ *Обозначения и термины* $D(f)$ — область определения $E(f)$ — область значений x — аргумент (независимая переменная) y — функция (зависимая переменная) f — функция $f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0
2. График функции	
	***Графиком функции f*** **называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$,** где первая координата x «пробегает» всю область определения функции, а вторая координата равна соответствующему значению функции f в точке x

Продолж. табл. 2

3. Возрастающие и убывающие функции	
	**Функция $f(x)$ возрастающая на множестве P:** $\boxed{\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1)}$ для любых $x_1,\ x_2 \in P$ (при увеличении аргумента соответствующие точки графика поднимаются)
	**Функция $f(x)$ убывающая на множестве P:** $\boxed{\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1)}$ для любых $x_1,\ x_2 \in P$ (при увеличении аргумента соответствующие точки графика опускаются)
4. Четные и нечетные функции	
	**Функция $f(x)$ четная:** $\boxed{f(-x) = f(x)}$ для всех x из области определения. **График четной функции симметричен относительно оси Oy**
	**Функция $f(x)$ нечетная:** $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ для всех x из области определения. **График нечетной функции симметричен относительно начала координат (точки O)**

Объяснение и обоснование

1. Понятие функции. С понятием функции вы ознакомились в курсе алгебры. Напомним, что зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y.

В курсе алгебры и начал математического анализа мы будем пользоваться таким определением числовой функции.

Числовой функцией с областью определения D называется зависимость, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное число y.

Функции обозначают латинскими (иногда греческими) буквами. Рассмотрим произвольную функцию f. Число y, соответствующее числу x (на рисунке 9 это показано стрелкой), называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$.

Область определения функции f — это множество тех значений, которые может принимать аргумент x. Она обозначается $D(f)$.

Область значений функции f — это множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где x принадлежит области определения. Ее обозначают $E(f)$.

Чаще всего функцию задают с помощью какой-либо формулы. Если нет дополнительных ограничений, то *областью определения функции, заданной формулой, считается множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл.*

Например, если функция задана формулой $y=\sqrt{x}+1$, то ее область определения: $x \geqslant 0$, то есть $D(y)=[0;\ +\infty)$, а область значений: $y \geqslant 1$, то есть $E(y)=[1;\ +\infty)$.

Иногда функция может задаваться разными формулами на разных множествах значений аргумента. Например, $y=|x|=\begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x<0. \end{cases}$

Функция может задаваться не только с помощью формулы, но и с помощью таблицы, графика или словесного описания. Например, на рисунке 10 графически задана функция $y=f(x)$ с областью определения $D(f)=[-1;\ 3]$ и множеством значений $E(f)=[1;\ 4]$.

2. График функции. Напомним, что

графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ f(x))$, где первая координата x «пробегает» всю область определения функции, а вторая координата — это соответствующее значение функции f в точке x.

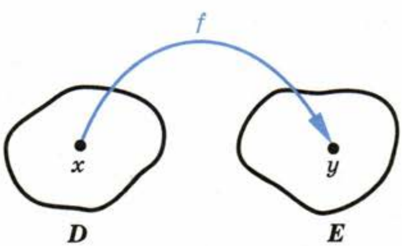


Рис. 9

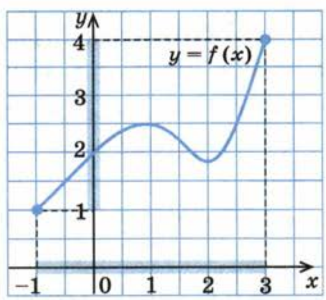


Рис. 10

На рисунках к пункту 4 таблицы 2 приведены графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$, а на рисунке 11 — график функции $y = |x|$.

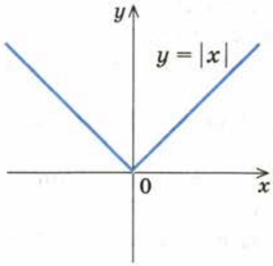


Рис. 11

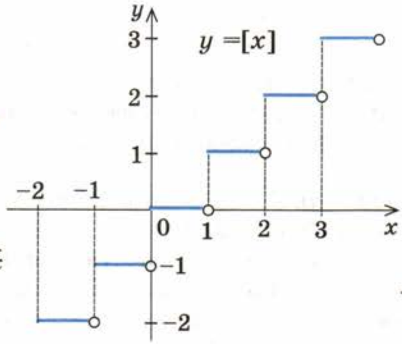


Рис. 12

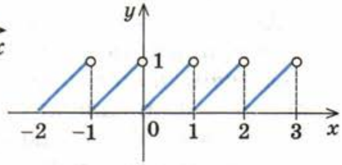


Рис. 13

Приведем также график функции $y = [x]$, где $[x]$ — обозначение *целой части* числа x, то есть наибольшего целого числа, не превосходящего x (рис. 12). Область определения этой функции $D(y) = \boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел, а область значений $E(y) = \boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел.

На рисунке 13 приведен график еще одной числовой функции $y = \{x\}$, где $\{x\}$ — обозначение *дробной части* числа x (по определению $\{x\} = x - [x]$).

3. Возрастающие и убывающие функции. Важными характеристиками функций являются их возрастание и убывание.

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей на множестве P***, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции.

То есть для любых двух значений x_1 и x_2 из множества P, если $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Например, функция $f(x) = 2x$ возрастающая (на всей области определения — на множестве $\boldsymbol{R}$), поскольку при $x_2 > x_1$ имеем $2x_2 > 2x_1$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$. У возрастающей функции при увеличении аргумента соответствующие точки графика поднимаются (рис. 14).

На рисунке 15 приведен график еще одной возрастающей функции $y = x^3$. Действительно, при $x_2 > x_1$ имеем $x_2^3 > x_1^3$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется ***убывающей на множестве P***, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

То есть для любых двух значений x_1 и x_2 из множества P, если $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Например, функция $f(x) = -2x$ убывающая (на всей области определения — на множестве $\boldsymbol{R}$), поскольку при $x_2 > x_1$ имеем $-2x_2 < -2x_1$, то есть

$f(x_2) < f(x_1)$. У убывающей функции при увеличении аргумента соответствующие точки графика опускаются (рис. 16).

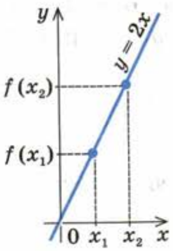


Рис. 14

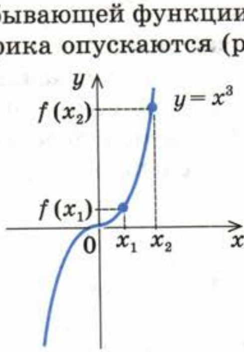


Рис. 15

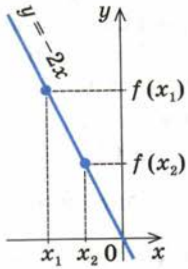


Рис. 16

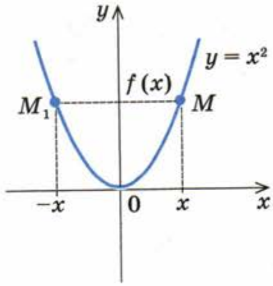


Рис. 17

Рассматривая график функции $y = x^2$ (рис. 17), видим, что на всей области определения эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. Однако можно выделить промежутки области определения, где эта функция возрастает и где убывает. Так, на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^2$ возрастает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ — убывает. (Докажите самостоятельно.)

Отметим, что для возрастающих и убывающих функций выполняются свойства, обратные утверждениям, содержащимся в определениях.

Если функция возрастает, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента.
Если функция убывает, то большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

● Обоснуем первое из этих свойств методом от противного. Пусть функция $f(x)$ возрастает и $f(x_2) > f(x_1)$. Допустим, что аргумент x_2 не больше аргумента x_1, то есть $x_2 \leqslant x_1$. Из этого предположения получаем: если $x_2 \leqslant x_1$ и $f(x)$ возрастает, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, что противоречит условию $f(x_2) > f(x_1)$. Таким образом, наше предположение неверно, и если $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, что и требовалось доказать.

Аналогично обосновывается и второе свойство. ○

Например, если $x^3 > 8$, то есть $x^3 > 2^3$, то, учитывая возрастание функции $f(x) = x^3$, получаем $x > 2$.

4. Четные и нечетные функции. Рассмотрим функции, области определения которых симметричны относительно начала координат, то есть содержат вместе с каждым числом x и число $(-x)$. Для таких функций вводятся понятия четности и нечетности.

Функция f называется *четной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$.

Например, функция $y = x^2$ (то есть функция $f(x) = x^2$) — четная, поскольку

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

● Если функция $f(x)$ четная, то ее графику вместе с каждой точкой M с координатами $(x; y) = (x; f(x))$ принадлежит также и точка M_1 с ко-

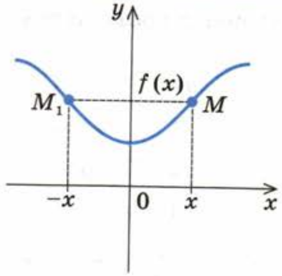


Рис. 18

ординатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M и M_1 расположены симметрично относительно оси Oy (рис. 18), поэтому и весь **график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy.** ○

Например, график четной функции $y = x^2$ (рис. 17) симметричен относительно оси Oy.

Функция f называется *нечетной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ (то есть функция $f(x) = \frac{1}{x}$) — нечетная, поскольку

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

● Если функция $f(x)$ нечетная, то ее графику вместе с каждой точкой M с координатами $(x; y) = (x; f(x))$ принадлежит также и точка M_1 с координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$. Точки M и M_1 расположены симметрично относительно начала координат (рис. 19), поэтому и весь **график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.** ○

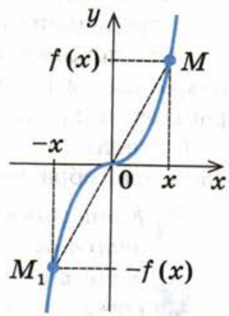


Рис. 19

Например, график нечетной функции $y = \frac{1}{x}$ (см. пункт 4 табл. 2) симметричен относительно начала координат, то есть точки O.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Решение

1) ▶ Ограничений для нахождения значений выражения $x^2 + x$ нет, таким образом, $D(y) = \mathbf{R}$. ◁

2) ▶ Область определения функции $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задается ограничением $x^2 + x \neq 0$, поскольку знаменатель дроби не может быть равным нулю. Выясним, когда $x^2 + x = 0$. Имеем $x(x + 1) = 0$, $x = 0$ или $x = -1$.

Комментарий

Поскольку все функции заданы формулами, то их области определения — это множество всех значений переменной x, при которых формула имеет смысл, то есть имеет смысл выражение, которое стоит в правой части формулы $y = f(x)$.

В курсе алгебры встречались только два *ограничения*, которые необходимо учитывать *при нахождении области определения*:

Тогда область определения можно задать ограничениями $x \neq 0$, $x \neq -1$ или записать так:
$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ◁

3) ▶ Область определения функции $y = \sqrt{x+5}$ задается ограничением $x + 5 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -5$, поскольку под знаком квадратного корня должно стоят неотрицательное выражение. Таким образом, $D(y) = [-5; +\infty)$. ◁

1) *если выражение записано в виде дроби $\frac{A}{B}$, то знаменатель $B \neq 0$;*

2) *если запись выражения содержит квадратный корень $\sqrt{A}$, то подкоренное выражение $A \geqslant 0$.*

В других случаях, которые вам приходилось рассматривать, областью определения выражения были все действительные числа*.

Задача 2* Найдите область значений функции $y = x^2 - 3$.

Решение

▶ Составим уравнение $x^2 - 3 = a$. Оно равносильно уравнению $x^2 = a + 3$, которое имеет решения, если $a + 3 \geqslant 0$, то есть при $a \geqslant -3$. Все эти числа и составят область значений функции.

Таким образом, область значений заданной функции

$E(f) = [-3; +\infty)$, то есть $y \geqslant -3$. ◁

Комментарий

Обозначим значение заданной функции $f(x)$ (то есть $x^2 - 3$) через a и выясним, для каких a можно найти соответствующее значение x (при этом значении x значение $f(x) = a$).

Тогда все числа a, для которых существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = a$, войдут в область значений функции $f(x)$. Множество всех таких a и составит область значений функции.

Полезно помнить, что

область значений функции $y = f(x)$ совпадает с множеством тех значений a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.

Задача 3* Докажите, что **при $k \neq 0$ областью значений линейной функции $y = kx + b$ является множество всех действительных чисел.**

Доказательство

▶ Если $kx + b = a$ (где $k \neq 0$), то решение этого уравнения $x = \frac{a-b}{k}$ существует для любого $a \in \boldsymbol{R}$ ($k \neq 0$ по условию). Таким образом, значением

Комментарий

Обозначим значение заданной функции $f(x)$, то есть $kx + b$, через a и выясним, для каких a можно найти соответствующее значение x, такое, что $f(x) = a$.

* В дальнейшем курсе алгебры и начал анализа 10 класса появятся новые выражения с ограничениями: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\log_A B$, $\sqrt[n]{a}$, a^α, где α — нецелое число.

заданной функции может быть любое действительное число. Итак, ее область значений $E(f) = \mathbf{R}$. ◁

Множество всех таких значений a и будет составлять область значений функции $f(x)$.

Задача 4* Докажите, что **линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ является возрастающей, а при $k < 0$ — убывающей.**

Доказательство

▶ Пусть $x_2 > x_1$ (тогда $x_2 - x_1 > 0$). Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$.

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, то при $k > 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) > 0$, таким образом, $f(x_2) > f(x_1)$ и, значит, функция возрастает.

При $k < 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) < 0$, таким образом, $f(x_2) < f(x_1)$, значит, функция убывает. ◁

Комментарий

Для обоснования возрастания или убывания функции полезно помнить, что *для доказательства неравенства $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$ достаточно найти знак разности $f(x_2) - f(x_1)$*.

Функция $f(x) = kx + b$ будет возрастающей, если из неравенства $x_2 > x_1$ будет следовать неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, а для доказательства последнего неравенства достаточно найти знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ (аналогично рассуждаем и для доказательства убывания функции).

Задача 5* Докажите, что:

1) сумма двух возрастающих на множестве P функций всегда является возрастающей функцией на этом множестве;

2) сумма двух убывающих на множестве P функций всегда является убывающей функцией на этом множестве.

Доказательство

1) ▶ Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются возрастающими на одном и том же множестве P. Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и $g(x_2) > g(x_1)$. Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Это и означает, что сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ является возрастающей функцией на множестве P. ◁

2) ▶ Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются убывающими на множестве P.

Комментарий

Для доказательства того, что сумма двух возрастающих функций $f(x)$ и $g(x)$ является возрастающей функцией, достаточно доказать, что на множестве P из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Аналогично для доказательства того, что сумма двух убывающих функций является убывающей функцией, достаточно доказать, что

если $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$$

Тогда из неравенства $x_2 > x_1$ имеем $f(x_2) < f(x_1)$ и $g(x_2) < g(x_1)$. После почленного сложения этих неравенств получаем:

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1),$$

а это и означает, что сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ является убывающей функцией на множестве P. ◁

Задача 6* Докажите, что **возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.**

Доказательство

▶ Пусть функция $f(x)$ является возрастающей и

$$f(x_1) = f(x_2). \qquad (1)$$

Допустим, что $x_1 \neq x_2$.

Если $x_1 \neq x_2$, то $x_1 > x_2$ или $x_1 < x_2$. Учитывая возрастание $f(x)$, в случае $x_1 > x_2$ имеем $f(x_1) > f(x_2)$, что противоречит равенству (1). В случае $x_1 < x_2$ имеем $f(x_1) < f(x_2)$, что также противоречит равенству (1).

Таким образом, наше предположение неверно, и равенство $f(x_1) = f(x_2)$ возможно только при $x_1 = x_2$. То есть возрастающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.

Аналогично доказывается утверждение и для убывающей функции. ◁

Комментарий

Докажем это утверждение методом от противного. Для этого достаточно допустить, что выполняется противоположное утверждение (функция может принимать одно и то же значение хотя бы в двух точках), и получить противоречие. Это будет означать, что наше предположение неверно, а верно данное утверждение.

Задача 7 Исследуйте, какие из данных функций являются четными, какие нечетными, а какие — ни четными, ни нечетными:

1) $y = \frac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Решение

1) ▶ Область определения функции $y = \frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, то есть она не симметрична относительно точки O

Комментарий

Для исследования функции $y = f(x)$ на четность или нечетность достаточно, во-первых, убедиться, что область определения этой функ-

(точка $x = 1$ принадлежит области определения, а $x = -1$ — нет).

Таким образом, заданная функция не является ни четной, ни нечетной. ◁

2) ▶ Область определения функции $y = x^4$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, то есть она симметрична относительно точки O. $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, следовательно, функция четная. ◁

3) ▶ Область определения функции $y = x^3 + x$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, то есть она симметрична относительно точки O. $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, значит, функция нечетная. ◁

ции симметрична относительно точки O (вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$), и, во-вторых, сравнить значения $f(-x)$ и $f(x)$.

Вопросы для контроля

1. Что называется числовой функцией? Приведите примеры таких функций.
2. На примерах объясните, что такое область определения функции и область значений функции. Какие ограничения необходимо учесть при нахождении области определения функции $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$? Найдите ее область определения.
3. Что называется графиком функции $y = f(x)$? Приведите примеры.
4. Какая функция называется возрастающей? Приведите примеры.
5. Какая функция называется убывающей? Приведите примеры.
6. Какая функция называется четной? Приведите примеры. Как расположен график четной функции на координатной плоскости? Приведите примеры.
7. Какая функция называется нечетной? Приведите примеры. Как расположен график нечетной функции на координатной плоскости? Приведите примеры.

Упражнения

1°. Найдите значение функции в указанных точках:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ в точках 2; −1; 3; a $(a \neq 0)$;

2) $g(x) = x^2 - 3$ в точках 0; 1; −2; b;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ в точках 0; 3; −1; m $(m > 0)$.

2. Найдите область определения функции, заданной формулой:

1°) $y = 2x + 3$; 2°) $y=\sqrt{x+3}$; 3°) $y=\frac{1}{x+1}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+1}$;

5) $y=\sqrt{x^2-1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+1}$; 7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; 10*) $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; 11*) $y=\frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$; 12*) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

3. Найдите область значений функции, заданной формулой:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$;

5*) $y = -3x + 1$; 6*) $y = x^2 - 5$; 7*) $y = |x| + 3$.

4°. Для функций, заданных своими графиками на рисунке 20, укажите область определения, область значений, промежутки возрастания и убывания и значение каждой функции при $x = 1$.

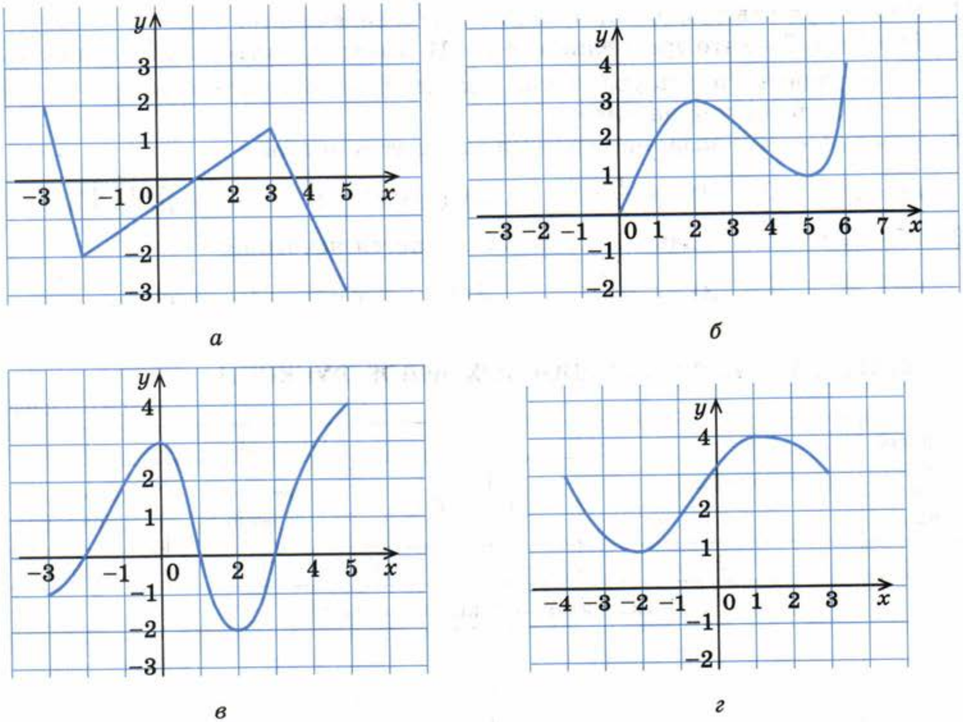


Рис. 20

5. Обоснуйте, что заданная функция является возрастающей (на ее области определения):

1) $y = 3x$; 2) $y = x + 5$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^5$; 5*) $y=\sqrt{x}$.

6*. Докажите, что на заданном промежутке функция возрастает:

1) $y=-\frac{2}{x}$, где $x>0$; 2) $y=-\frac{1}{x}$, где $x<0$.

7. Обоснуйте, что заданная функция является убывающей (на ее области определения):

1) $y = -3x$; 2) $y = -x - 1$; 3*) $y = -x^3$; 4*) $y = -x^5$.

8*. Докажите, что на заданном промежутке функция убывает:

1) $y=\frac{3}{x}$, где $x<0$; 2) $y=\frac{5}{x}$, где $x>0$.

9*. Докажите, что функция $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ — убывает.

10*. Используя утверждения, приведенные в задаче 5 (с. 20), укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = -x - x^5$; 3) $y=x+\sqrt{x}$; 4) $y = -x^3 - x^5$.

11*. Используя утверждения, приведенные в задаче 6 (с. 21):

1) обоснуйте, что уравнение $x^3+x=10$ имеет единственный корень $x=2$;

2) подберите корень уравнения $\sqrt{x}+x=6$ и докажите, что других корней это уравнение не имеет.

12. Обоснуйте, что заданная функция является четной:

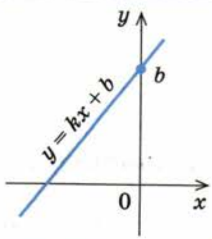
1) $y = x^6$; 2) $y=\frac{1}{x^2}+1$; 3) $y=\sqrt{x^2+1}$; 4) $y=\sqrt{|x|+x^4}$.

13. Обоснуйте, что заданная функция является нечетной:

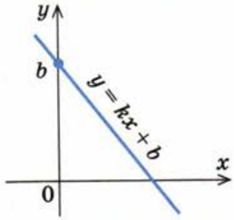
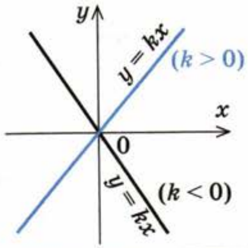
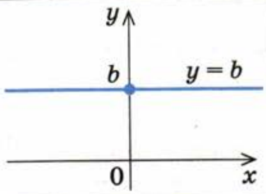
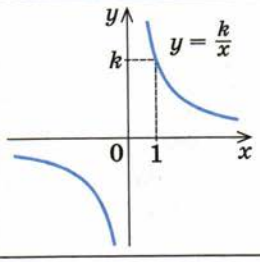
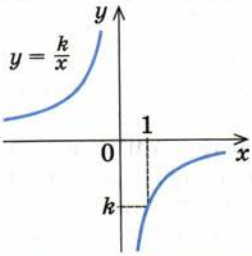
1) $y = x^5$; 2) $y=-\frac{1}{x^3}$; 3) $y = x\,|\,x\,|$; 4) $y = x^3 - x$.

2.2. СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

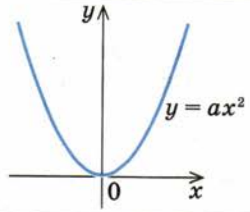
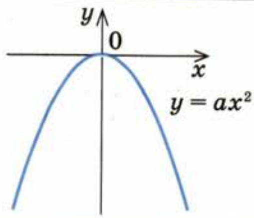
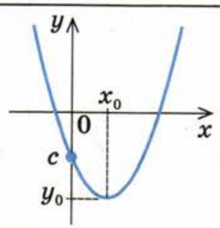
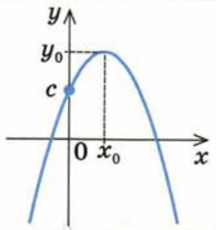
Таблица 3

Условия для коэффициентов	График	Свойства			
		$D(y)$	$E(y)$	четность и нечетность	возрастание и убывание
1	2	3	4	5	6
1. Линейная функция $y = kx + b$					
$k>0$ $b \neq 0$		***R***	***R***	ни четная, ни нечетная	возрастает

Продолж. табл. 3

1	2	3	4	5	6
$k < 0$ $b \neq 0$		$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	ни четная, ни нечетная	убывает
$b = 0$ $y = kx$				нечетная	при $k > 0$ возрастает при $k < 0$ убывает
$k = 0$ $y = b$			b	четная	постоянная
2. Обратная пропорциональность, функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечетная	убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
$k < 0$					возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

Продолж. табл. 3

1	2	3	4	5	6
		3. Функция $y = ax^2$ $(a \neq 0)$			
$a > 0$		R	$[0; +\infty)$	четная	убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; 0]$		возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, убывает на промежутке $[0; +\infty)$
		4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $\left(a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$			
$a > 0$		R	$[y_0; +\infty)$	в общем виде — ни четная, ни нечетная	убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$, возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$	при $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ четная	возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$, убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$

Объяснение и обоснование

1. Линейная функция $y = kx + b$. *Линейной функцией* называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Обоснуем основные характеристики этой функции: область определения, область значений, четность или нечетность, возрастание и убывание.

Область определения — множество всех действительных чисел: $D(y) = R$, поскольку формула $kx + b$ имеет смысл при всех действительных значениях x, то есть для любого действительного x мы можем вычислить значение $kx + b$ (из свойств действительных чисел, которые строго доказываются в курсах математического анализа, следует, что для любых действительных чисел x, k и b однозначно определены произведение kx и сумма $kx + b = y$).

Область значений линейной функции будет разной в зависимости от значения коэффициента k.

Если $k = 0$, то функция имеет вид $y = b$, то есть ее область значений состоит из одного числа b. В таком случае **графиком линейной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox, которая пересекает ось Oy в точке b** (рис. 19).

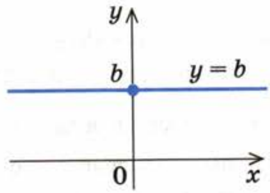


Рис. 21

Если $k \neq 0$, то $E(y) = \mathbf{R}$ (обоснование приведено в примере 3 на с. 19).

Четность и нечетность линейной функции существенно зависит от значений коэффициентов b и k.

При $b = 0$ и $k \neq 0$ функция $y = kx + b$ превращается в функцию $y = kx$, которая является нечетной, поскольку для всех x из ее области определения

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

Таким образом, график функции $y = kx$ (рис. 22) симметричен относительно точки O.

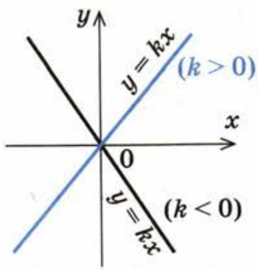


Рис. 22

При $k = 0$ получаем функцию $y = b$, которая является четной, поскольку для всех x из ее области определения $f(-x) = b = f(x)$. То есть график функции $y = b$ симметричен относительно оси Oy (рис. 21).

В общем случае при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция $y = kx + b$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$ и также

$$f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x).$$

Возрастание и убывание линейной функции зависит от значения коэффициента k.

При $k = 0$ получаем функцию $y = b$ — постоянную.

При $k > 0$ функция $y = kx + b$ возрастает, а при $k < 0$ — убывает (обоснование приведено в примере 4 на с. 20).

В курсе геометрии было показано, что **графиком линейной функции $y = kx + b$ всегда является прямая линия.**

Поскольку при $x = 0$ функция принимает значение $y = b$, то *эта прямая всегда пересекает ось Oy в точке b*. Графики линейных функций приведены в таблице 3.

2. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$). Эта функция выражает обратно пропорциональную зависимость.

Область определения: $x \neq 0$. Это можно записать также так:

$$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Область значений: $y \neq 0$. Это можно записать также так:

$$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Для обоснования области значений функции $y=\frac{k}{x}$ обозначим $\frac{k}{x}=a$. Тогда из этого равенства получим $x=\frac{k}{a}$ для всех $a \neq 0$. То есть для всех $a \neq 0$ существует значение $x=\frac{k}{a}$, при котором $y=\frac{k}{x}=\frac{k}{\frac{k}{a}}=a$. Таким образом, y принимает все действительные значения, не равные нулю.

Функция нечетная, поскольку ее областью определения является множество, симметричное относительно точки O, и $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$. Таким образом, ее график симметричен относительно начала координат (рис. 23).

Возрастание и убывание функции зависит от знака коэффициента k.

Если $x_2 > x_1$ (то есть $x_2 - x_1 > 0$), то для сравнения значений $f(x_2)$ и $f(x_1)$ рассмотрим их разность:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{-k(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \qquad (1)$$

На промежутке $(0; +\infty)$ значение $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, следовательно, $x_1x_2 > 0$. На промежутке $(-\infty; 0)$ значение $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, значит, $x_1x_2 > 0$.

Учитывая, что $x_2 - x_1 > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$, при $k > 0$ из равенства (1) получаем $f(x_2) - f(x_1) < 0$, а при $k < 0$ получаем $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

При $k > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$, таким образом, функция убывает на каждом из этих промежутков.

При $k < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$, следовательно, функция возрастает на каждом из этих промежутков.

Из курса алгебры известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ называется *гиперболой* (она состоит из двух ветвей). При $k > 0$ ветви гиперболы находятся в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях (рис. 23).

Замечание. Характеризируя возрастание или убывание функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, следует помнить, что, например, функция $y=\frac{1}{x}$ (рис. 24) убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но на всей области определения $(x \neq 0)$ эта функция не является убывающей (и не является возрастающей). Действительно, если взять $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, то $x_2 > x_1$, но $f(x_2) = f(1) = 1$, а $f(x_1) = f(-1) = -1$, то есть большему значению аргумента не соответствует меньшее значение функции, и на всей ее области определения функция $f(x)=\frac{1}{x}$ не является убывающей.

Поэтому же нельзя сказать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ убывает на объединении интервалов $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

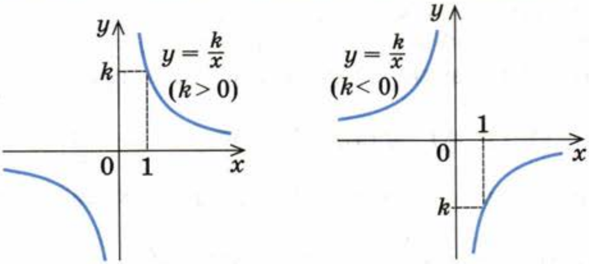


Рис. 23

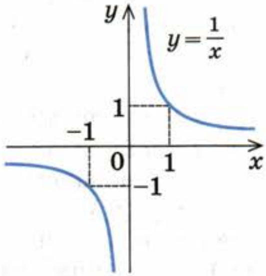


Рис. 24

3. Функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Как известно из курса алгебры, графиком этой функции является *парабола*, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ (рис. 25, *а*) и вниз при $a < 0$ (рис. 25, *б*). Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то график всегда проходит через начало координат.

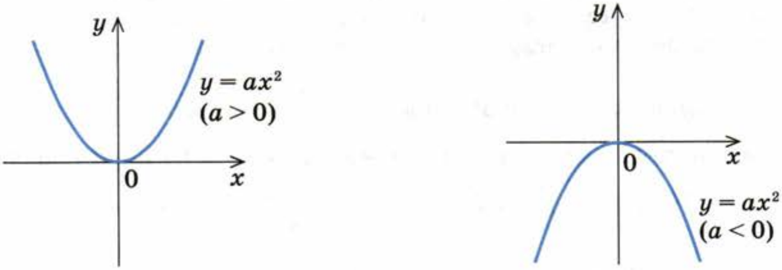


Рис. 25

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$, поскольку значение $y = ax^2$ можно вычислить при любых значениях x (из свойств действительных чисел, которые строго доказываются в курсах математического анализа, следует, что для любых действительных чисел x и a однозначно определены произведения $x \cdot x = x^2$ *и* $ax^2 = y$).

Функция четная, поскольку $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Таким образом, ее график симметричен относительно оси Oy.

Область значений. Для нахождения области значений функции $y = ax^2$ обозначим $ax^2 = u$. Поскольку $a \neq 0$, то из этого равенства $x^2 = \dfrac{u}{a}$ (*). При $a > 0$ уравнение (*) имеет решение для любого $u \geqslant 0$, а при $a < 0$ уравнение (*) имеет решение для любого $u \leqslant 0$. Следовательно, при $a > 0$ $E(y) = [0; +\infty)$, а при $a < 0$ $E(y) = (-\infty; 0]$.

Возрастание и убывание.

Если $x_2 > x_1$ (то есть $x_2 - x_1 > 0$), то для сравнения значений $y(x_2)$ и $y(x_1)$ рассмотрим их разность:

$$y(x_2) - y(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1). \quad (2)$$

На промежутке $[0; +\infty)$ значение $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 > 0$, следовательно, $x_2 + x_1 > 0$. На промежутке $(-\infty; 0]$ значение $x_1 < 0$ и $x_2 \leqslant 0$, значит, $x_2 + x_1 < 0$. Учитывая, что $x_2 - x_1 > 0$ на каждом из указанных промежутков, из равенства (2) получаем:

— при $a > 0$ на промежутке $[0; +\infty)$ $y(x_2) - y(x_1) > 0$, а на промежутке $(-\infty; 0]$ $y(x_2) - y(x_1) < 0$;
— при $a < 0$ на промежутке $[0; +\infty)$ $y(x_2) - y(x_1) < 0$, а на промежутке $(-\infty; 0]$ $y(x_2) - y(x_1) > 0$.

Следовательно, при $x_2 > x_1$, если $a > 0$, то на промежутке $[0; +\infty)$ $y(x_2) > y(x_1)$ — функция возрастает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ $y(x_2) < y(x_1)$ — функция убывает; если же $a < 0$, то на промежутке $[0; +\infty)$ $y(x_2) < y(x_1)$ — функция убывает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ $y(x_2) > y(x_1)$ — функция возрастает.

Соответствующие графики приведены также в таблице 3.

4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Из курса алгебры 9 класса известно, что функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной*. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Абсцисса вершины этой параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Для обоснования этого достаточно в заданном квадратном трехчлене выделить полный квадрат:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ то есть}$$

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ где } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a} \qquad (3)$$

($D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$).

Напомним, что в зависимости от знака дискриминанта D парабола или пересекает ось Ox $(D > 0)$, или не пересекает $(D < 0)$, или касается ее $(D = 0)$.

Основные варианты расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ представлены в таблице 4.

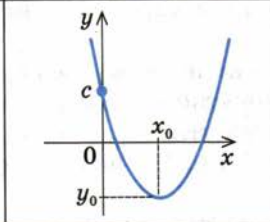
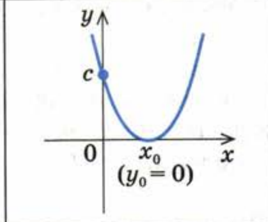
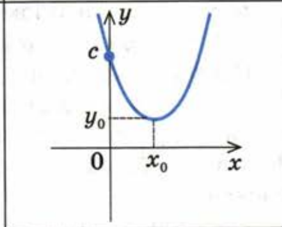
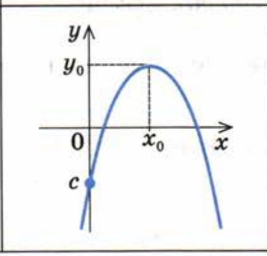
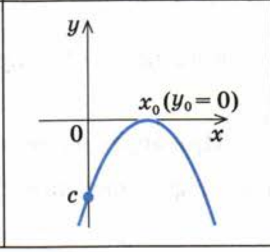
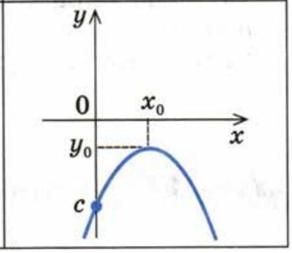
Охарактеризуем свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Область определения: $D(y) = \mathbf{R}$, поскольку значение $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ можно вычислить при любых значениях x (из свойств действительных чисел, которые строго доказываются в курсах математического анализа, следует, что для любых действительных чисел x, a, b и c однозначно определены произведения $x \cdot x = x^2$, ax^2 и bx и суммы $ax^2 + bx$, $(ax^2 + bx) + c = ax^2 + bx + c = y$).

Область значений. Для нахождения области значений функции $y = ax^2 + bx + c$ используем формулу (3) и обозначим $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0 = u$. Поскольку $a \neq 0$, то из этого равенства

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{u - y_0}{a}. \qquad (4)$$

Таблица 4

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

При $a > 0$ уравнение (4) имеет решение для любого $u \geqslant y_0$, а при $a < 0$ уравнение (4) имеет решение для любого $u \leqslant y_0$. Следовательно, при $a > 0$ функция принимает все значения $y \geqslant y_0$, то есть $E(y) = [y_0; +\infty)$, при $a < 0$ функция принимает все значения $y \leqslant y_0$, то есть $E(y) = (-\infty; y_0]$.

Четность и нечетность. При $b = 0$ получаем четную квадратичную функцию $y = \varphi(x) = ax^2 + c$. Действительно, $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$.

В общем случае (если $b \neq 0$) функция $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку

$f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$ (и не равно $-f(x)$).

Возрастание и убывание. Если $x_2 > x_1$ (то есть $x_2 - x_1 > 0$), то для сравнения значений $y(x_2)$ и $y(x_1)$ рассмотрим их разность (и снова используем формулу (3)):

$$y(x_2) - y(x_1) = a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0 - \left(a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0\right) = a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 =$$

$$= a\left(\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(x_2 + \frac{b}{2a} + x_1 + \frac{b}{2a}\right)(x_2 - x_1).$$

Учитывая, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$, последнее равенство можно записать так

$$y(x_2) - y(x_1) = a(x_2 - x_0 + x_1 - x_0)(x_2 - x_1). \qquad (5)$$

На промежутке $[x_0; +\infty)$ значение $x_1 \geqslant x_0$ и $x_2 > x_0$, следовательно, $(x_2 - x_0) + (x_1 - x_0) > 0$.

На промежутке $(-\infty; x_0]$ значение $x_1 < x_0$ и $x_2 \leqslant x_0$, значит, $(x_2 - x_0) + (x_1 - x_0) < 0$. Учитывая, что $x_2 - x_1 > 0$ на каждом из указанных промежутков, из равенства (5) получаем:

— при $a > 0$ на промежутке $[x_0; +\infty)$ $y(x_2) - y(x_1) > 0$, а на промежутке $(-\infty; x_0]$ $y(x_2) - y(x_1) < 0$;

— при $a < 0$ на промежутке $[x_0; +\infty)$ $y(x_2) - y(x_1) < 0$, а на промежутке $(-\infty; x_0]$ $y(x_2) - y(x_1) > 0$.

Следовательно, при $x_2 > x_1$, если $a > 0$, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ $y(x_2) > y(x_1)$ — функция возрастает, а на промежутке $(-\infty; x_0]$ $y(x_2) < y(x_1)$ — функция убывает; если же $a < 0$, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ $y(x_2) < y(x_1)$ — функция убывает, а на промежутке $(-\infty; x_0]$ $y(x_2) > y(x_1)$ — функция возрастает.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = c$, то *график всегда пересекает ось Oy в точке c.*

Соответствующие графики при $D > 0$ приведены также в таблице 3.

Примеры решения задач

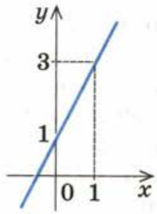
Задача 1 Постройте график функции:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = 4$.

Решение

1) ▶График функции $y = 2x + 1$ — прямая.

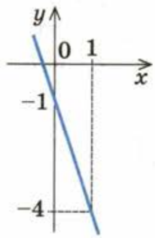
x	0	1
y	1	3



◁

2) ▶График функции $y = -3x - 1$ — прямая.

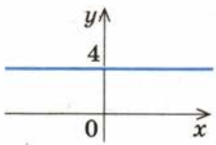
x	0	1
y	−1	−4



◁

3) ▶График функции $y = 4$ — прямая, параллельная оси Ox, которая проходит через точку 4 на оси Oy.

x	0	1
y	4	4



◁

Комментарий

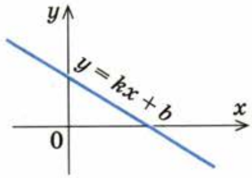
Все данные функции линейные, поэтому их графиками являются прямые.

Чтобы построить прямые в заданиях 1 и 2, достаточно построить две точки этих прямых. Например, можно взять $x = 0$ и $x = 1$ и найти соответствующие значения y. Оформлять эти вычисления удобно в виде таблички:

x	0	1
y		

В задании 3 рассматривается частный случай линейной функции ($y = b$). Для построения этого графика полезно помнить, что прямая $y = 4$ — это прямая, параллельная оси Ox (при любом значении x значение y равно 4).

Задача 2* По приведенному графику функции $y = kx + b$ укажите знаки k и b.



Решение

▶ При $x = 0$ значение $y = b$. По приведенному графику определяем, что $b > 0$. Поскольку изображен график убывающей линейной функции, то $k < 0$.

Ответ: $b > 0$, $k < 0$. ◁

Комментарий

График функции $y = kx + b$ — прямая, пересекающая ось Oy в точке b. На рисунке эта точка лежит выше нуля, таким образом, $b > 0$.

Линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ возрастающая, а при $k < 0$ — убывающая. На рисунке изображен график убывающей функции, следовательно, $k < 0$.

Задача 3 Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$*.

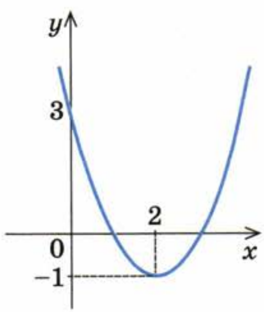
Решение

▶ График заданной функции — парабола (вида $y = x^2$), ветви которой направлены вверх.

Абсцисса вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Тогда $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$, и график имеет вид:



◁

Комментарий

Функция $y = x^2 - 4x + 3$ — квадратичная (имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$). Таким образом, ее графиком будет парабола (вида $y = ax^2$), ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$).

Абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 — это соответствующее значение заданной функции при $x = x_0$, то есть $y_0 = y(x_0)$.

Если необходимо уточнить, как проходит график, то можно найти координаты нескольких дополнительных точек, например, при $x = 0$ получаем $y = c = 3$.

---

* Построение таких графиков с помощью геометрических преобразований графика функции $y = x^2$ будет рассмотрено в пункте 2.3.

Вопросы для контроля

1. Какая функция называется линейной? Назовите свойства линейной функции. Какая линия является графиком линейной функции? Приведите примеры линейных функций и их графиков.
2. Какая линия является графиком функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$? Приведите примеры графиков функций $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ и при $k<0$. По графикам укажите свойства этой функции при $k>0$ и при $k<0$. Докажите нечетность функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.
3. Какая линия является графиком функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Как расположен этот график при $a > 0$ и при $a < 0$? Приведите примеры графиков функций $y = ax^2$ при $a > 0$ и при $a < 0$. По графикам укажите свойства этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$. Докажите четность функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.
4. Какая линия является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Как расположен график при $a > 0$ и при $a < 0$? Как найти абсциссу вершины графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Приведите примеры графиков этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$. По графикам укажите свойства этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$.

Упражнения

1°. Постройте график функции:
1) $y = 3x - 2$; 2) $y = -x + 4$; 3) $y = -2$; 4) $y = -5x$; 5) $y = 0$; 6) $y = 4x$.
Есть ли среди этих функций четные или нечетные? Ответ обоснуйте.

2*. По приведенным графикам функций $y = kx + b$ (рис. 26) укажите знаки k и b в каждом случае.

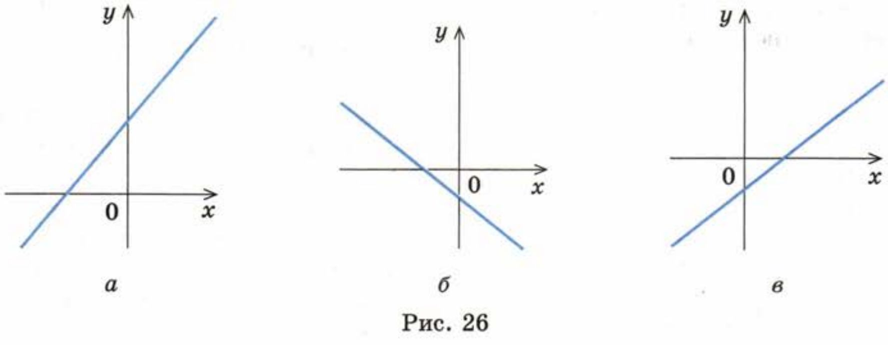


Рис. 26

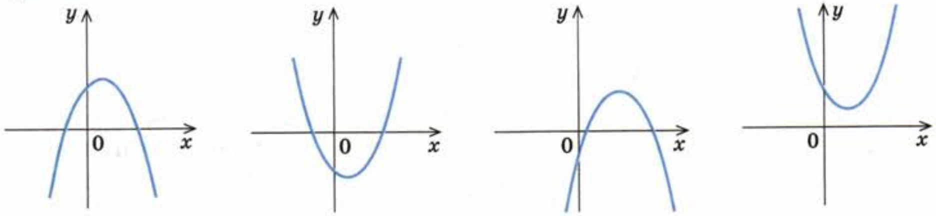
Постройте график функции (3–5).

3°. 1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x}$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{5}{x}$.

4°. 1) $y = -2x^2$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = -3x^2$; 4) $y = 5x^2$.

5. 1) $y = x^2 - 6x + 7$; 2) $y = -x^2 + 4x + 2$; 3) $y = 2x^2 - 2x + 1$; 4) $y = -3x^2 + 6x$.

6*. По приведенным графикам функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (рис. 27) укажите знаки a, b и c в каждом случае.

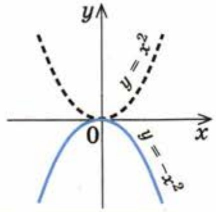
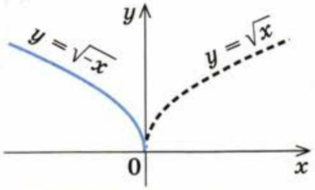
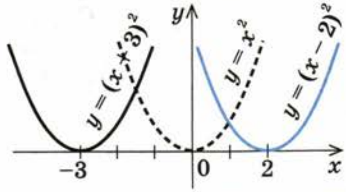


а *б* *в* *г*

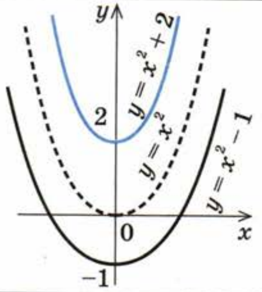
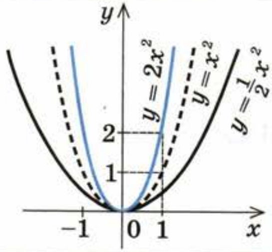
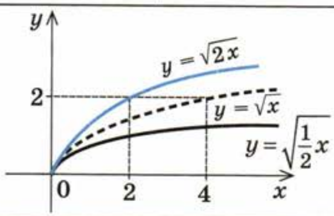
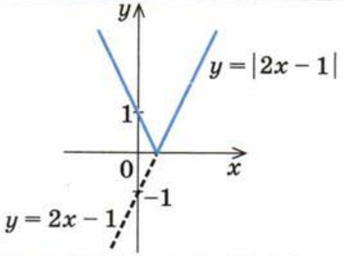
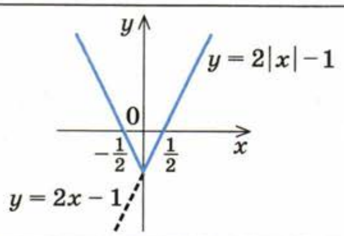
Рис. 27

2.3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИЗВЕСТНЫХ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Таблица 5

Преобразование графика функции $y = f(x)$			
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси Ox
2	$y = f(-x)$		Симметрия относительно оси Oy
3	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц

Продолж. табл. 5

1	2	3	4
4	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на c единиц
5	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Растяжение или сжатие вдоль оси Oy (при $k > 1$ — растяжение, при $0 < k < 1$ — сжатие)
6	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Растяжение или сжатие вдоль оси Ox (при $\alpha > 1$ — сжатие, при $0 < \alpha < 1$ — растяжение)
7	$y = \lvert f(x) \rvert$		Выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox
8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Справа от оси Oy (и на самой оси) — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси Oy

Объяснение и обоснование

Рассмотрим способы построения графиков функций с помощью геометрических преобразований известных графиков функций.

1. Построение графика функции $y = -f(x)$. Сравним графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ (см. первую строку табл. 5). Очевидно, что график функции $y = -x^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ симметричным отображением его относительно оси Ox. Покажем, что всегда график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ox.

Действительно, по определению график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек M координатной плоскости, которые имеют координаты $(x; y) = (x; f(x))$. Тогда график функции $y = -f(x)$ состоит из всех точек K координатной плоскости, имеющих координаты $(x; y) = (x; -f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ и $K(x; -f(x))$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно оси Ox (рис. 28). Таким образом, каждая точка K графика функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением относительно оси Ox некоторой точки M графика $y = f(x)$. Поэтому

график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ его симметричным отображением относительно оси Ox.

Это свойство позволяет легко обосновать построение графика функции $y = |f(x)|$. Имеем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geqslant 0 \text{ (график не меняется);} \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0 \text{ (симметрия относительно оси } Ox\text{).} \end{cases}$$

Следовательно,

график функции $y = |f(x)|$ может быть построен так: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox (и на самой оси), остается без изменений, а часть, лежащая ниже оси Ox, отображается симметрично относительно этой оси.

Например, на рисунке 29 и в таблице 5 (строка седьмая) с использованием этого правила изображен график функции $y = |2x - 1|$.

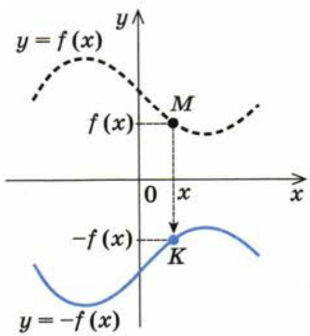


Рис. 28

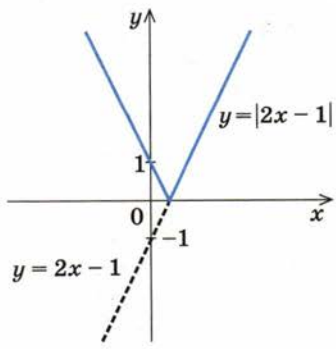


Рис. 29

2. Построение графика функции $y = f(-x)$

Для построения графика функции $y = f(-x)$ учтем, что в определении графика функции первая координата для точек графика выбирается произвольно из области определения функции. Если выбрать как первую координату значение $(-x)$, то график функции $y = f(-x)$ будет состоять из всех точек T координатной плоскости с координатами $(-x;\ y) = (-x;\ f(x))$. Напомним, что график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x;\ f(x))$.

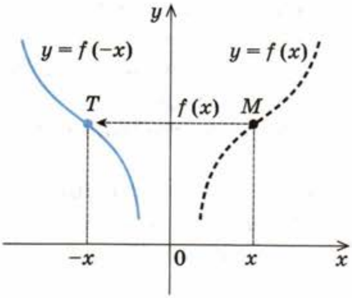


Рис. 30

Точки $M(x;\ f(x))$ и $T(-x;\ f(x))$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно оси Oy (рис. 30). Таким образом, каждая точка T графика функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением относительно оси Oy некоторой точки M графика функции $y = f(x)$. Поэтому

график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ его симметричным отображением относительно оси Oy.

Это свойство позволяет легко обосновать построение графика функции $y = f(|x|)$. Имеем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0 \text{ (график не меняется);} \\ f(-x) \text{ при } x < 0 \text{ (симметрия относительно оси } Oy\text{).} \end{cases}$$

Следовательно, для того чтобы получить график функции $y = f(|x|)$ при $x < 0$ (то есть слева от оси Oy), необходимо отобразить симметрично относительно оси Oy ту часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит справа от оси Oy. То есть часть графика функции $y = f(x)$, лежащая слева от оси Oy, вообще не используется в построении графика функции $y = f(|x|)$. Таким образом,

график функции $y = f(|x|)$ строится так: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая справа от оси Oy (и на самой оси), остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно Oy.

Например, на рисунке 31 и в таблице 5 (строка восьмая) с использованием этого правила изображен график функции $y = 2|x| - 1$.

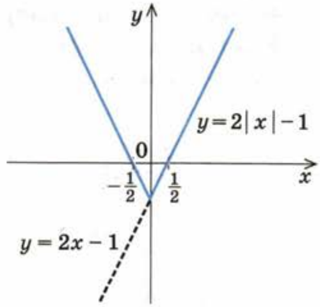


Рис. 31

3. Построение графика функции $y = f(x - a)$

Из курса геометрии известно, что параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор $\overline{(a;0)}$ задается формулами $x' = x + a$, $y' = y$. При выполнении этого параллельного переноса каждая точка $M(x;\ f(x))$ графика функции $y = f(x)$ переходит в точку $N(x + a; f(x))$. С помощью переменных x', y' можно записать, что график функции f переходит в фигуру G, состоящую из точек $(x'; f(x' - a))$, где x' принимает все значения вида $x + a$ (x «пробегает» $D(f)$). При этих значениях x' число $x' - a$ принадлежит $D(f)$ и $f(x' - a)$ определено. Следовательно, фигура G есть график функции $y = f(x - a)$ (рис. 32). Тогда можно сделать вывод:

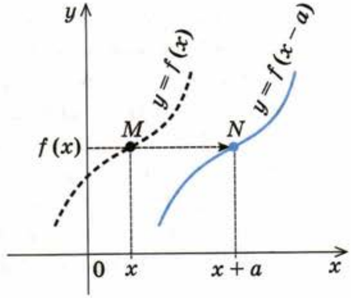


Рис. 32

график функции $y = f(x - a)$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц. ○

Замечание. Если $a > 0$, то вектор $\left(\overline{a; 0}\right)$ направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при $a < 0$ — в отрицательном.

Например, в третьей строке таблицы 5 изображен график функции $y = (x - 2)^2$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на $+2$ единицы вдоль оси Ox) и график функции $y = (x + 3)^2$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на (-3) единицы вдоль оси Ox)

4. Построение графика функции $y = f(x) + b$.

● График функции $y = f(x) + b$ состоит из всех точек A координатной плоскости с координатами $(x; y) = (x; f(x) + b)$, а график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x; f(x))$.

Но если точка M имеет координаты $(x; y)$, а точка A — координаты $(x; y + b)$, то преобразование точек $(x; y) \to (x; y + b)$ — это параллельный перенос точки M вдоль оси Oy на b единиц (то есть на вектор $\left(\overline{0; b}\right)$).

Поскольку каждая точка A графика функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом некоторой точки M графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b единиц (рис. 33), то

график функции $y = f(x) + b$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b единиц. ○

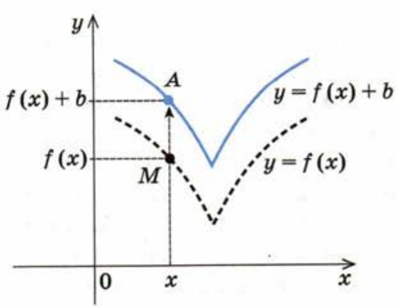


Рис. 33

Например, в четвертой строке таблицы 4 изображен график функции $y = x^2 + 2$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на $+2$ единицы вдоль оси Oy) и график функции $y = x^2 - 1$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на (-1) вдоль оси Oy).

5. Построение графика функции $y = kf(x)$

● График функции $y = kf(x)$ ($k > 0$) состоит из всех точек $B(x; kf(x))$, а график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x; f(x))$ (рис. 34).

Назовем *преобразованием растяжения вдоль оси Oy с коэффициентом k* (где $k > 0$) такое преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; ky)$.

Преобразование растяжения вдоль оси Oy задается формулами: $x' = x$; $y' = ky$. Эти формулы выражают координаты $(x'; y')$ точки M', в которую переходит точка $M\ (x; y)$ при преобразовании растяжения вдоль оси Oy (рис. 35). При этом преобразовании происходит растяжение отрезка AM в k раз, и в результате точка M переходит в точку M'. (Заметим, что иногда указанное преобразование называют растяжением только при $k > 1$, а при $0 < k < 1$ его называют *сжатием вдоль оси Oy* в $\frac{1}{k}$ раз.)

Как видим, каждая точка B графика функции $y = kf(x)$ получается из точки M преобразованием растяжения вдоль оси Oy. При этом общая форма графика не изменяется: он растягивается или сжимается вдоль оси Oy. Например, если графиком функции $y = f(x)$ была парабола, то после растяжения или сжатия график остается параболой. Поэтому

график функции $y = kf(x)$ $(k > 0)$ получается из графика функции $y = f(x)$ его растяжением (при $k > 1$ растяжение в k раз) или сжатием (при $0 < k < 1$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз) вдоль оси Oy.

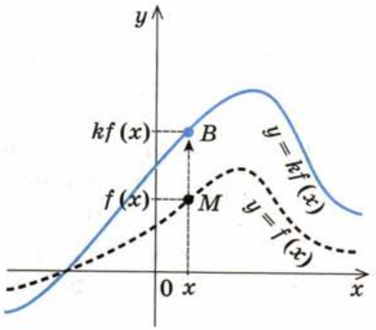


Рис. 34

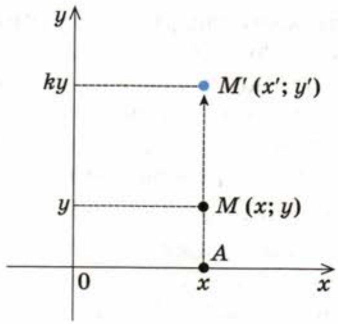


Рис. 35

6. Построение графика функции $y = f(\alpha x)$

Назовем *преобразованием растяжения вдоль оси Ox с коэффициентом k* (где $k > 0$) такое преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(kx; y)$. Преобразование растяжения вдоль оси Ox задается формулами: $x' = kx$; $y' = y$. Эти формулы выражают координаты $(x'; y')$ точки M', в которую переходит точка $M(x; y)$ при преобразовании растяжения вдоль оси Ox (рис. 36). При этом преобразовании происходит растягивание отрезка BM в k раз, и в результате точка M переходит в точку M'. (Заметим, что иногда указанное преобразование называют растяжением (в k раз) только при $k > 1$, а при $0 < k < 1$ его называют *сжатием вдоль оси* Ox (в $\frac{1}{k}$ раз)). Рассмотрим преобразование растяжения вдоль оси Ox с коэффициентом $k=\frac{1}{\alpha}$ (где $\alpha > 0$). Оно задается формулами: $x'=\frac{1}{\alpha}x=\frac{x}{\alpha}$; $y' = y$. При выполнении этого преобразования каждая точка M $(x;\ f\ (x))$ графика функции $y = f\ (x)$ переходит в точку $C\left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$. С помощью переменных x', y' можно записать, что график функции f переходит в фигуру G, состоящую из точек $(x';\ f\ (\alpha x'))$, где x' принимает все значения вида $x'=\frac{x}{\alpha}$ (x «пробегает» $D\ (f)$). При этих значениях x' число $\alpha x'$ принадлежит $D\ (f)$ и $f\ (\alpha x')$ определено. Следовательно, фигура G есть график функции $y = f\ (\alpha x)$ (рис. 37). Тогда можно сделать вывод:

график функции $y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ его растяжением (при $0 < \alpha < 1$ растяжение в $\frac{1}{\alpha}$ раз) или сжатием (при $\alpha > 1$ сжатие в α раз) вдоль оси Ox.

Замечание. Как и при растяжении вдоль оси Oy, при растяжении вдоль оси Ox общая форма графика не изменяется.

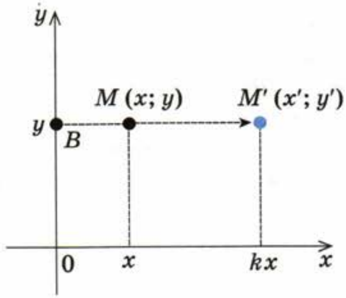


Рис. 36

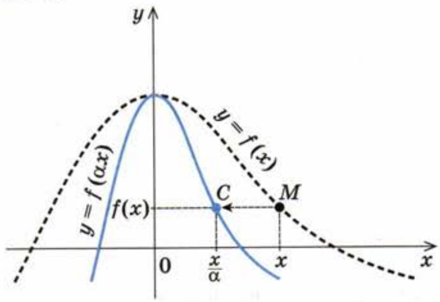


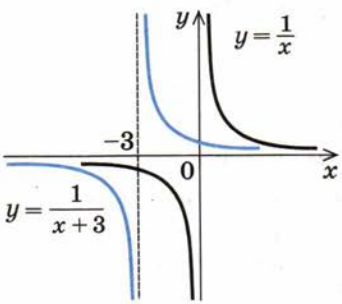
Рис. 37

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции $y=\frac{1}{x+3}$.

Решение

▶



◁

Комментарий

Мы можем построить график функции $y=f(x)=\frac{1}{x}$. Тогда график функции

$$y=\frac{1}{x+3}=f(x+3)=f(x-(-3))$$

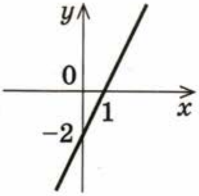
можно получить параллельным переносом графика функции $y = f\ (x)$ вдоль оси Ox на (-3) единицы (то есть влево).

Задача 2 Постройте график функции $y = -|2x - 2|$.

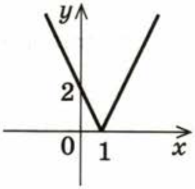
Решение

► Последовательно строим графики:

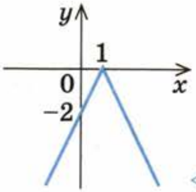
1. $y = 2x - 2$;



2. $y = |2x - 2|$;



3. $y = -|2x - 2|$.



◁

Комментарий

Составим план последовательного построения графика заданной функции.

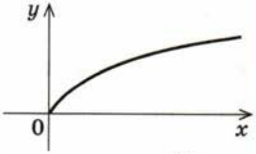
1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = 2x - 2$ (прямая).
2. Затем можно построить график функции $y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$ (выше оси Ox график $y = 2x - 2$ остается без изменений, а часть графика ниже оси Ox отображается симметрично относительно оси Ox).
3. После этого можно построить график функции
$$y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$$
(симметрия графика функции $y = \varphi(x)$ относительно оси Ox).

Задача 3* Постройте график функции $y = \sqrt{4 - |x|}$.

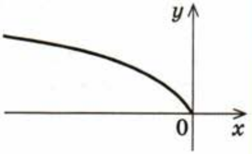
Решение

► Запишем уравнение заданной функции так:
$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$
Последовательно строим графики:

1. $y = \sqrt{x}$;



2. $y = \sqrt{-x}$;

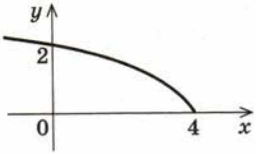


Комментарий

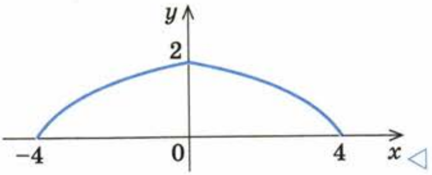
Составим план последовательного построения графика заданной функции. Для этого ее подкоренное выражение запишем так, чтобы можно было использовать преобразования графиков, представленные в таблице 4:
$$y = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = \sqrt{x}$.
2. Затем можно построить график функции $y = g(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ (симметрия графика функции $f(x)$ относительно оси Oy).

3. $y=\sqrt{-(x-4)}$;



4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$.



◁

3. После этого можно построить график функции

$$y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$$

(параллельный перенос графика функции $g(x)$ вдоль оси Ox на 4 единицы).

4. Затем уже можно построить график заданной функции

$$y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$$

(справа от оси Oy соответствующая часть графика функции $y=\varphi(x)$ остается без изменений, и эта же часть отображается симметрично относительно оси Oy).

Вопросы для контроля

1. На примерах объясните, как из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции:
   1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = f(x-a)$;
   4) $y = f(x)+c$; 5) $y = kf(x)$, где $k > 0$; 6) $y = f(\alpha x)$, где $\alpha > 0$;
   7) $y = |f(x)|$; 8) $y = f(|x|)$.

2*. Обоснуйте геометрические преобразования, с помощью которых из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики указанных выше функций.

Упражнения

Постройте графики функций и соответствий **(1–7)**:

1. 1) $y = |x-5|$; 2) $y = |x|-5$; 3) $y = ||x|-5|$; 4*) $|y| = x-5$.

2. 1°) $y = x^2-9$; 2) $y = |x^2-9|$; 3) $y = |x^2|-9$; 4*) $|y| = x^2-9$.

3. 1°) $y = (x+1)^2$; 2) $y = (|x|+1)^2$; 3) $y = (x+1)^2-3$; 4) $y = |(x+1)^2-3|$.

4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.

5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 2°) $y=\sqrt{x}-3$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$;
5*) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.

7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

8. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[0; 12]$ и имеет график, изображенный на рисунке 38, *а*. Постройте графики функций (и соответствий 9^* и 10^*):

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = |f(x)|$; 4) $y = f(|x|)$;

5*) $y = 2f(x)$; 6*) $y = f(2x)$; 7*) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 8*) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

9*) $|y| = f(x)$; 10*) $|y| = f(|x|)$.

9. Выполните задания упражнения 8 для функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-14; 0]$, график которой изображен на рисунке 38, *б*.

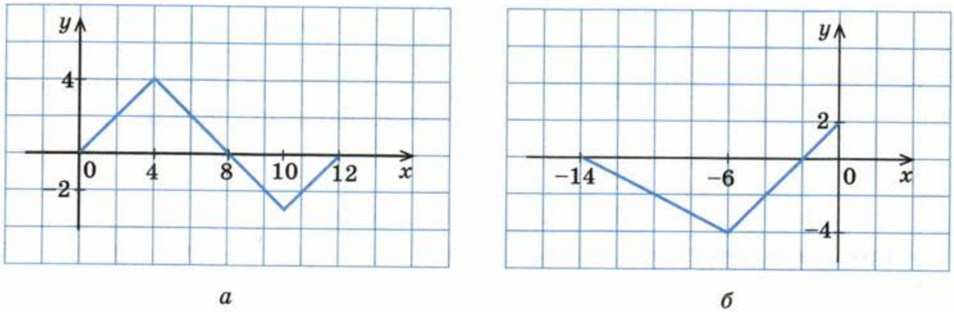


Рис. 38

§ 3. УРАВНЕНИЯ

3.1. Уравнения–следствия и равносильные преобразования уравнений

Таблица 6

1. Понятие уравнения и его корней	
Определение	Пример
Равенство с переменной называется уравнением. В общем виде уравнение с одной переменной x записывают так: $f(x) = g(x)$. Под этой краткой записью понимают математическую запись задачи о нахождении значений аргумента, при которых значения двух данных функций равны.	$2x = -1$ — линейное уравнение; $x^2 - 3x + 2 = 0$ — квадратное уравнение; $\sqrt{x+2} = x$ — иррациональное уравнение (содержит переменную под знаком корня).

Продолж. табл. 6

Корнем (или решением) *уравнения с одной переменной* называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство. **Решить уравнение — значит найти все его корни (и обосновать, что других корней нет) или доказать, что корней нет.**	$x = 2$ — корень уравнения $\sqrt{x+2} = x$, так как при $x = 2$ получаем верное равенство: $\sqrt{4} = 2$, то есть $2 = 2$.
2. Область допустимых значений (ОДЗ)	
Областью допустимых значений (или областью определения) ***уравнения*** **называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения.**	Для уравнения $\sqrt{x+2} = x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется условием: $x + 2 \geqslant 0$, а область определения функции $g(x) = x$ — множество всех действительных чисел.
3. Уравнения-следствия	
Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. **Если из правильности первого равенства следует правильность каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.** *При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней.* Поэтому **при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения** (см. пункт 5 этой таблицы).	$\sqrt{x+2} = x.$ ▶ Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2,\ x_2 = -1.$ Проверка. $x = 2$ — корень (см. выше); $x = -1$ — посторонний корень (при $x = -1$ получаем неверное равенство $1 = -1$). *Ответ*: 2. ◁

Продолж. табл. 6

4. Равносильные уравнения	
Определение	Простейшие теоремы
Два уравнения называются *равносильными* на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни. *То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.* (Схема решения уравнений с помощью равносильных преобразований приведена в пункте 5 этой таблицы.)	**1. Если из одной части уравнения перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное заданному** (на любом множестве). **2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю** (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), **то получим уравнение, равносильное заданному** (на ОДЗ заданного уравнения).

5. Схема поиска плана решения уравнений

Решение уравнений

с помощью уравнений-следствий	**с помощью равносильных преобразований**
1 ↓ 2 Преобразования, гарантирующие сохранение верного равенства	**Учесть ОДЗ исходного уравнения**
Проверка корней подстановкой в исходное уравнение	1 ↑↓ 2 Сохранять на ОДЗ верное равенство при прямых и обратных преобразованиях

применением свойств функций*

1 — исходное уравнение;

2 — уравнение, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение направления выполненных преобразований

Объяснение и обоснование

1. Понятие уравнения и его корней. Уравнение в математике чаще всего понимают как аналитическую запись задачи о нахождении значений аргумента, при которых значения двух данных функций равны. Поэтому в общем виде уравнения с одной переменной x записывают так: $f(x) = g(x)$.

Часто уравнения определяют короче — как равенство с переменной.

Напомним, что *корнем (или решением) уравнения с одной переменной называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни (и обосновать, что других корней нет) или доказать, что корней нет.*

Например, уравнение $2x = -1$ имеет единственный корень $x = -\frac{1}{2}$, а уравнение $|x| = -1$ не имеет корней, поскольку значение $|x|$ не может быть отрицательным числом.

2. Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Если задано уравнение $f(x) = g(x)$, то общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$ называется *областью допустимых значений* этого *уравнения.* (Иногда используются также термины «область определения уравнения» или «множество допустимых значений уравнения».) Например, для уравнения $x^2 = x$ областью допустимых значений являются все действительные числа. Это можно записать, например, так. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$, поскольку функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$ имеют области определения $\boldsymbol{R}$.

Понятно, что каждый корень данного уравнения принадлежит как области определения функции $f(x)$, так и области определения функции $g(x)$ (иначе мы не сможем получить верное числовое равенство). Поэтому *каждый корень уравнения обязательно принадлежит ОДЗ этого уравнения.* Это позволяет в некоторых случаях применить анализ ОДЗ уравнения при его решении.

Например, в уравнении $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = x$ функция $g(x) = x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ только при условии, что под знаком квадратного корня будут стоять неотрицательные выражения. Следовательно, ОДЗ этого уравнения задается системой $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \end{cases}$ из которой получаем систему $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1, \end{cases}$ не имеющую решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

Нахождение ОДЗ данного уравнения может быть полезным для его решения, но не всегда является обязательным элементом решения уравнения.

3. Методы решения уравнений. Для решения уравнений используют методы *точного и приближенного решений.* А именно, для точного решения уравнений в курсе математики 5–6 классов использовались зависимости между компонентами и результатами действий и свойства числовых равенств;

в курсе алгебры 7–9 классов — равносильные преобразования уравнений, а для приближенного решения уравнений — графический метод.

Графический метод решения уравнений не дает высокой точности нахождения корней уравнения, и с его помощью чаще всего можно получить только грубые приближения корней. Иногда удобно графически определить количество корней уравнения или найти границы, в которых находятся эти корни. В некоторых случаях можно графически доказать, что уравнение не имеет корней. По указанным причинам в школьном курсе алгебры и начал математического анализа под требованием «решить уравнение» понимается требование «используя методы точного решения, найти корни данного уравнения». Приближенными методами решения уравнений можно пользоваться только тогда, когда об этом говорится в условии задачи (например, если ставится задача решить уравнение графически).

В основном при решении уравнений разных видов нам придется применять один из двух методов решения. Первый из них состоит в том, что данное уравнение заменяется более простым уравнением, имеющим те же корни,— равносильным уравнением. В свою очередь, полученное уравнение заменяется еще более простым, равносильным ему, и т. д. В результате получаем простейшее уравнение, которое равносильно заданному и корни которого легко находятся. Эти корни и только они являются корнями данного уравнения.

Второй метод решения уравнений состоит в том, что данное уравнение заменяется более простым уравнением, среди корней которого находятся все корни данного, то есть так называемым уравнением-следствием. В свою очередь, полученное уравнение заменяется еще более простым уравнением-следствием, и так далее до тех пор, пока не получим простейшее уравнение, корни которого легко находятся. Тогда все корни данного уравнения находятся среди корней последнего уравнения. Поэтому, чтобы найти корни данного уравнения, достаточно корни последнего уравнения подставить в данное и с помощью такой проверки получить корни данного уравнения (и исключить так называемые *посторонние корни* — те корни последнего уравнения, которые не удовлетворяют заданному).

В следующем пункте будет также показано применение свойств функций к решению уравнений определенного вида.

Уравнения-следствия

Рассмотрим более детально, как можно решать уравнения с помощью уравнений-следствий. При решении уравнений главное — не потерять корни данного уравнения, и поэтому в первую очередь мы должны следить за тем, чтобы каждый корень исходного уравнения оставался корнем следующего. Фактически это и является определением уравнения-следствия:

в том случае, когда каждый корень первого уравнения является корнем второго, второе уравнение называется следствием первого.

Это определение позволяет обосновать такой ориентир: **для получения уравнения-следствия достаточно рассмотреть данное уравнение как верное числовое равенство и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство.**

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то каждый корень первого уравнения обращает это уравнение в верное числовое равенство, но тогда и второе уравнение будет верным числовым равенством, то есть рассматриваемое значение переменной является корнем и второго уравнения, а это и означает, что второе уравнение является следствием первого.

Применим приведенный ориентир к уравнению $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (пока что не используя известное условие равенства дроби нулю).

Если правильно то, что дробь равна нулю, то обязательно ее числитель равен нулю. Таким образом, из заданного уравнения получаем уравнение-следствие $x^2-1=0$. Но тогда верно, что $(x-1)(x+1)=0$. Последнее уравнение имеет два корня: $x=1$ и $x=-1$. Подставляя их в заданное уравнение, видим, что только корень $x=1$ удовлетворяет исходному уравнению. Почему это случилось?

Это происходит поэтому, что, используя уравнения-следствия, мы гарантируем только то, что корни заданного уравнения не теряются (каждый корень первого уравнения является корнем второго). Но второе уравнение, кроме корней первого уравнения, имеет еще и другой корень, который не является корнем первого уравнения. Для первого уравнения этот корень является *посторонним*, и, чтобы его отсеять, выполняется проверка подстановкой корней в исходное уравнение. (Более полно причины появления посторонних корней рассмотрены в таблице 7 на с. 54.) Таким образом, чтобы правильно применять уравнения-следствия для решения уравнений, необходимо помнить еще один ориентир: **при использовании уравнений-следствий возможно появление посторонних корней, и поэтому проверка подстановкой корней в исходное уравнение является составной частью решения.**

Схема применения этих ориентиров дана в таблице 6. В пункте 3 этой таблицы приведено решение уравнения

$$\sqrt{x+2}=x. \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения с помощью уравнений-следствий достаточно данное уравнение рассмотреть как верное числовое равенство и учесть, что в случае, когда два числа равны, их квадраты также будут равны:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2. \qquad (2)$$

То есть мы гарантируем, что если равенство (1) верно, то и равенство (2) также будет верным, а это и означает (как было показано выше), что уравнение (2) является следствием уравнения (1). Если мы хотя бы один раз использовали уравнения-следствия (а не равносильные преобразования), то можем получить посторонние корни, и тогда в решение обязательно входит проверка полученных корней подстановкой их в заданное уравнение.

Замечание. Переход от данного уравнения к уравнению-следствию можно обозначить специальным значком $\Rightarrow$, но его использование для записи решения не является обязательным. Вместе с тем, если этот значок записан, то это свидетельствует о том, что мы воспользовались уравнениями-следствиями, и поэтому обязательно в запись решения необходимо включить проверку полученных корней.

Равносильные уравнения

С понятием равносильности вы знакомы еще из курса алгебры 7 класса, где равносильными назывались те уравнения, которые имели одни и те же корни. Заметим, что равносильными считались и такие два уравнения, которые не имели корней. Формально будем считать, что и в этом случае уравнения имеют одни и те же корни, поскольку ответы к таким уравнениям одинаковы: «уравнения не имеют корней» (точнее: одинаковыми являются множества корней таких уравнений — они оба пустые, что обозначается символом $\varnothing$).

В курсе алгебры и начал математического анализа мы будем рассматривать более общее понятие равносильности, а именно: равносильность на определенном множестве.

Два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни, то есть каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.

Для уравнений, заданных на множестве всех действительных чисел (например, для линейных), мы можем однозначно дать ответ на вопрос: «Равносильны ли данные уравнения?» Например, уравнения $x + 3 = 0$ и $2x + 6 = 0$ — равносильные, поскольку оба имеют одинаковый корень $x = -3$ и других корней не имеют, таким образом, каждое из них имеет те же решения, что и второе.

При рассмотрении равносильности уравнений на множестве, которое отличается от множества всех действительных чисел, ответ на вопрос «Равносильны ли данные уравнения?» может существенно зависеть от того, на каком множестве мы рассматриваем эти уравнения. Например, если рассмотреть уравнения:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0, \tag{3}$$

$$x^2 - 1 = 0, \tag{4}$$

то, как было показано выше, уравнение (3) имеет единственный корень $x = 1$, а уравнение (4) — два корня: $x = 1$ и $x = -1$. Таким образом, на множестве всех действительных чисел эти уравнения не являются равносильными, поскольку у уравнения (4) есть корень $x = -1$, которого нет у уравнения (3). Но на множестве положительных действительных чисел эти уравнения равносильны, поскольку на этом множестве уравнение (3) имеет единственный положительный корень $x = 1$ и уравнение (4) также имеет единственный положительный корень $x = 1$. Следовательно, на множестве положительных чисел каждое из этих уравнений имеет те же решения, что и второе.

Укажем, что множество, на котором рассматривается равносильность уравнений, как правило, не задается искусственно (как в последнем случае), а чаще всего таким множеством является ОДЗ исходного уравнения. Договоримся, что далее

все равносильные преобразования уравнений (а также неравенств и систем уравнений и неравенств) мы будем выполнять на ОДЗ исходного уравнения (неравенства или системы). Отметим, что в том случае, когда ОДЗ заданного уравнения является множество всех действительных чисел, мы не всегда будем ее записывать (как не записывали ОДЗ при решении линейных или квадратных уравнений). И в других случаях главное — не записать ОДЗ в решение уравнения, а реально учесть ее при выполнении равносильных преобразований данного уравнения.

Например, для уравнения $\sqrt{x+2} = x$ ОДЗ задается неравенством $x + 2 \geqslant 0$. Когда мы переходим к уравнению $x + 2 = x^2$, то для всех его корней это уравнение является верным равенством. Тогда выражение x^2, стоящее в правой части этого равенства, всегда неотрицательно ($x^2 \geqslant 0$), таким образом, и равное ему выражение $x + 2$ также будет неотрицательным: $x + 2 \geqslant 0$. Но это и означает, что ОДЗ данного уравнения ($x + 2 \geqslant 0$) учтено автоматически для всех корней второго уравнения и поэтому при переходе от уравнения $\sqrt{x+2} = x$ к уравнению $x + 2 = x^2$ ОДЗ заданного уравнения можно не записывать в решение.

Для выполнения равносильных преобразований попробуем выделить общие ориентиры, аналогичные соответствующим ориентирам получения уравнений-следствий.

Как указывалось выше, выполняя *равносильные преобразования уравнений*, необходимо **учесть ОДЗ данного уравнения** — это и есть первый ориентир для выполнения равносильных преобразований уравнений.

По определению равносильности уравнений необходимо гарантировать, чтобы каждый корень первого уравнения был корнем второго и наоборот — каждый корень второго уравнения был корнем первого. Для первой части этого требования мы уже выделили общий ориентир: достаточно гарантировать сохранение правильности равенства при переходе от первого уравнения ко второму (с. 49).

Но тогда, чтобы выполнить вторую часть этого требования, достаточно второе уравнение рассмотреть как верное равенство (то есть взять такое значение переменной, которое является корнем второго уравнения) и гарантировать, что при переходе к первому верное равенство сохраняется (этот корень остается и корнем первого уравнения). Фактически из определения равносильности уравнений получаем, что *каждое из равносильных уравнений является следствием другого уравнения*). Таким образом, **при**

выполнении равносильных преобразований мы должны гарантировать сохранение правильности равенства на каждом шаге решения не только при прямых, но и при обратных преобразованиях — это и является вторым ориентиром для решения уравнений с помощью равносильных преобразований. (Соответствующие ориентиры схематически представлены в пункте 5 табл. 6.)

Например, чтобы решить с помощью равносильных преобразований уравнение $\frac{x^2-1}{x+1}=0$, достаточно учесть его ОДЗ: $x+1 \neq 0$ и условие равенства дроби нулю (дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю). Также следует обратить внимание на то, что на ОДЗ все необходимые преобразования можно выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением правильности равенства.

Запись решения в этом случае может быть такой:

$\frac{x^2-1}{x+1}=0$. ▶ ОДЗ: $x+1 \neq 0$. Тогда $x^2-1=0$. Отсюда $x=1$ (удовлетворяет условию ОДЗ) или $x=-1$ (не удовлетворяет условию ОДЗ). *Ответ:* 1. ◁

Для выполнения равносильных преобразований уравнений можно также пользоваться специальными теоремами о равносильности. В связи с уточнением определения равносильности уравнений обобщим также формулировки простейших теорем о равносильности, известных из курса алгебры 7 класса.

Теорема 1. ***Если из одной части уравнения перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное заданному (на любом множестве).***

Теорема 2. ***Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), то получаем уравнение, равносильное заданному (на ОДЗ исходного).***

Обоснование этих теорем полностью аналогично обоснованию ориентиров для равносильных преобразований данного уравнения.

Замечание. Для обозначения перехода от данного уравнения к равносильному ему уравнению можно применять специальный значок $\Leftrightarrow$, но его использование при записи решений не является обязательным. (Хотя иногда мы будем им пользоваться, чтобы подчеркнуть, что были выполнены именно равносильные преобразования.)

Задача 1 Решите уравнение $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$.

Решение

▶ ОДЗ: $x-2\neq 0$ и $x-1\neq 0$.

На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (3)$$

$$2x+1=0, \qquad (4)$$

то есть $x=-\frac{1}{2}$.

Учтем ОДЗ. При $x=-\frac{1}{2}$:

$$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0,$$

$$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$

Таким образом, $x=-\frac{1}{2}$ — корень.

Ответ: $-\frac{1}{2}$. ◁

Комментарий

Используем равносильные преобразования для решения данного уравнения. Для этого необходимо учесть ОДЗ, поэтому зафиксируем ее ограничения в начале решения.

Укажем, что *в уравнениях ограничения ОДЗ можно только зафиксировать, но не решать, а в конце проверить, выполняются ли эти ограничения для найденных корней.*

При переносе члена данного уравнения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком получаем уравнение (1), равносильное заданному.

Приводя к общему знаменателю, раскрывая скобки и приводя подобные члены, снова получаем верное равенство и можем обосновать, что при выполнении обратных действий равенство также не нарушается, таким образом, полученные уравнения (1)–(3) равносильны заданному (на его ОДЗ).

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Но второе условие уже учтено в ограничениях ОДЗ, таким образом, получаем уравнение (4), равносильное заданному уравнению на его ОДЗ. Поскольку все преобразования были равносильными только с учетом ОДЗ, то мы должны проверить, удовлетворяет ли полученное число ограничениям ОДЗ.

4. Причины появления посторонних корней и потери корней при решении уравнений. Наиболее типичные случаи появления посторонних корней и потери корней приведены в таблице 7. Там же указано, как в каждом из этих случаев получить правильное (или полное) решение.

Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения
		1. Появление посторонних корней
Получение уравнений-следствий: **а) переход к уравнению, ОДЗ которого шире, чем ОДЗ заданного уравнения;**	**1. Приведение подобных членов**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Перенесем из правой части уравнения в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ с противоположным знаком и приведем подобные члены. Получим $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$
	2. Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю (при сокращении знаменателя)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22$, $x=-2$
	3. Возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. $2x+1=x$, $x=-1$
б) выполнение преобразований, при которых происходит неявное умножение на нуль;	**Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2+x+1=0$. Умножим обе части уравнения на $x-1$. $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Получим $x^3-1=0$, $x=1$

Таблица 7

<table>
<tr><th>Где ошибка</th><th>Как получить правильное (или полное) решение</th><th>Пример правильного (или полного) решения</th></tr>
<tr><td colspan="3">при решении уравнения</td></tr>
<tr><td>$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения</td><td rowspan="4">Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение</td><td>$$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$$ ▶ $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.
Проверка показывает, что $x_1 = 0$ — посторонний корень, $x_2 = 6$ — корень.
Ответ: 6. ◁</td></tr>
<tr><td>$x = -2$ не является корнем заданного уравнения</td><td>$$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$$ ▶ $4(x + 3) + 7(x + 2) = 4;$
$11x = -22$, $x = -2$.
Проверка показывает, что $x = -2$ — посторонний корень.
Ответ: корней нет. ◁</td></tr>
<tr><td>$x = -1$ не является корнем заданного уравнения</td><td>$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$$ ▶ $2x + 1 = x$, $x = -1$.
Проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень.
Ответ: корней нет. ◁</td></tr>
<tr><td>$x = 1$ не является корнем заданного уравнения</td><td>В данном уравнении не было необходимости умножать на $x - 1$.
$$x^2 + x + 1 = 0.$$ ▶ $D = -3 < 0$.
Ответ: корней нет. ◁
Если применить умножение обеих частей уравнения на $x - 1$, то проверка показывает, что $x = 1$ — посторонний корень, то есть уравнение не имеет корней.</td></tr>
</table>

Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения
		1. Появление посторонних корней
в) применение к обеим частям уравнения функции, которая не является возрастающей или убывающей.	**Возведение обеих частей уравнения в четную степень или применение к обеим частям уравнения тригонометрических функций** (см. с. 272)	$x - 1 = 2x + 1.$ Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ Получим $3x^2 + 6x = 0,$ $x_1 = 0,\ x_2 = -2$
		2. Потеря корней
Явное или неявное *сужение ОДЗ заданного уравнения*, в частности выполнение преобразований, в ходе которых происходит неявное деление на нуль	**1. Деление обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2 = x.$ Поделив обе части уравнения на x, получим $x = 1$
	2. Сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, ОДЗ которого у́же, чем ОДЗ заданного уравнения	$x^2 = 1.$ Если к обеим частям уравнения прибавить $\sqrt{x}$, то получим уравнение $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ у которого только один корень $x = 1$

Продолж. табл. 7

	Где ошибка	Как получить правильное (или полное) решение	Пример правильного (или полного) решения
при решении уравнения			
	$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения	**Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение**	**В данном уравнении не было необходимости возводить в квадрат.** $$x - 1 = 2x + 1.$$ ▶ $x - 2x = 1 + 1$, $x = -2$. *Ответ:* -2. ◁ **Если применить возведение в квадрат, то проверка показывает, что $x_2 = -2$ — корень, а $x_1 = 0$ — посторонний корень**
при решении уравнения			
	Потеряли корень $x = 0$, поскольку после деления на x фактически получили уравнение $$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x},$$ **ОДЗ которого: $x \neq 0$, то есть сузили ОДЗ заданного уравнения.**	**Те значения, на которые сузилась ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно**	$$x^2 = x.$$ ▶ 1. При $x = 0$ получаем $0^2 = 0$ — верное равенство, таким образом, $x = 0$ — корень. 2. При $x \neq 0$ получаем $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, $x = 1$. *Ответ.* 0; 1. ◁ (Конечно, *удобнее решать так*: $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0$ или $x = 1$.)
	Потеряли корень $x = -1$, поскольку ОДЗ данного уравнения: x — любое число, а $\sqrt{x}$ существует только при $x \geqslant 0$.		**В данном уравнении не было необходимости прибавлять к обеим частям $\sqrt{x}$.** ▶ $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Ответ:* ± 1. ◁ **(Если бы пришлось прибавить к обеим частям $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ данное уравнение необходимо рассмотреть отдельно, и тогда получим еще и корень $x = -1$.)**

Вопросы для контроля

1. Что называется корнем уравнения? Приведите примеры.
2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Приведите примеры.
3. Дайте определение уравнения-следствия данного уравнения. Приведите примеры. Объясните, в каком случае можно гарантировать, что в результате преобразований уравнения получили уравнение-следствие.
4. Дайте определение равносильных уравнений. Приведите примеры. Объясните, в каком случае можно гарантировать, что в результате преобразований уравнения получили уравнение, равносильное данному.
5. Сформулируйте основные теоремы о равносильности уравнений. Приведите примеры их использования.
6. Объясните, в результате каких преобразований данного уравнения можно получить посторонние для данного уравнения корни. Как можно исключить посторонние корни? Приведите примеры.
7. Объясните, в результате каких преобразований данного уравнения можно потерять корни данного уравнения. Приведите примеры. Объясните на примерах, как необходимо дополнить соответствующие преобразования, чтобы не потерять корни данного уравнения.

Упражнения

1. Найдите область допустимых значений (ОДЗ) уравнения:

   1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$; 2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$; 3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$; 4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$.

2. Выясните: а) является ли второе уравнение следствием первого; б) являются ли эти уравнения равносильными (ответ обоснуйте):

   1) $2x^2-8x-9=0$ и $x^2-4x-4{,}5=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ и $x^2-4=0$.

3. Обоснуйте равносильность уравнений:

   1) $5x-8=7-3x$ и $5x+3x=7+8$;

   2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ и $2x-1=x$.

4. Обоснуйте, что данные уравнения не являются равносильными (на $\boldsymbol{R}$):

   1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ и $x^2=9$;

   2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ и $2x-1=x$.

5. Объясните, какие преобразования были использованы при переходе от первого уравнения ко второму и могут ли они приводить к нарушению равносильности:

   1) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ и $3x+2x=6{,}8-1{,}1$;

   2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ и $x-9+3x^2-1=0$;

   3) $\frac{5}{3x-1}+x=3$ и $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;

   4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ и $x^2-1=x^2-4x+4$.

6. Являются ли равносильными данные уравнения на ОДЗ первого из них:

1) $5 - x = x + 7$ и $5 - x + \frac{1}{x-3} = x + 7 + \frac{1}{x-3}$;

2) $\frac{12-2x}{x-2} = \frac{x-5}{x-2}$ и $12 - 2x = x - 5$;

3) $6 - x = 10$ и $6 - x + \sqrt{x} - \sqrt{x} = 10$;

4) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 6) = 5\,(x^2 + 6)$ и $x^2 + 2x - 3 = 5$;

5) $x^2 - 1 = 6x - 1$ и $\frac{x^2-1}{x} = \frac{6x-1}{x}$?

7. Решите уравнение и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению равносильности:

1) $\frac{8}{x} - \frac{5-x}{2} = \frac{8+3x}{x} - x$;

2) $\frac{x}{4} + \frac{(x-2)^2+8}{x} = \frac{(4-x)(2-x)}{x}$;

3) $\frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-4}{3+x}$;

4) $\frac{1}{x-2} + \frac{x-6}{3x^2-12} = \frac{1}{2-x} - 1$.

8. Решите уравнение с помощью уравнений-следствий и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению равносильности:

1) $3x + \sqrt{x-2} = 5x - 1 + \sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5} = x + 1$;

3) $\sqrt{3-2x} = 1 - x$;

4) $\sqrt{5+x^2} = x - 4$.

9. При каком условии уравнения являются равносильными:

1) $\frac{f(x)}{2x-3} = g(x)$ и $f(x) = g(x)(2x - 3)$;

2) $f(x) + \sqrt{x} = g(x) + \sqrt{x}$ и $f(x) = g(x)$?

10. Может ли произойти потеря корней или появление посторонних корней, если:

1) уравнение $(x^2 + 7)\,f(x) = 4x^2 + 28$ заменить уравнением $f(x) = 4$;

2) уравнение $(x - 1)\,f(x) = (x - 1)\,g(x)$ заменить уравнением $f(x) = g(x)$;

3) уравнение $\frac{f(x)}{x+3} = \frac{g(x)}{x+3}$ заменить уравнением $f(x) = g(x)$;

4) уравнение $\frac{f(x)}{3x^2+5} = 0$ заменить уравнением $f(x) = 0$?

11. Решите уравнение и обоснуйте, что построена цепочка равносильных уравнений:

1) $13 - (x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 1) = (x + 2)^2$;

2) $(x - 1)^3 - (x - 3)^3 = 3x + 26$;

3) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$;

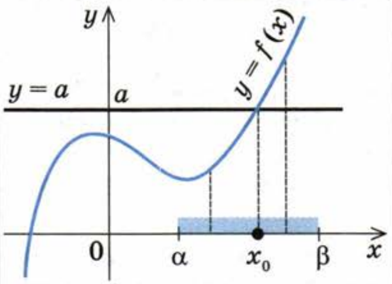
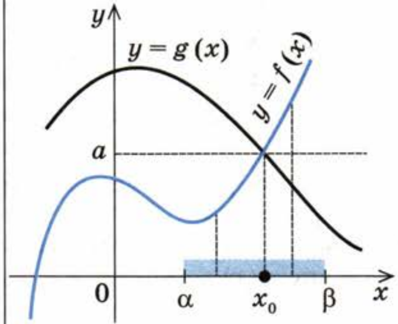
4) $(3x - 1)^2 + (6x - 3)(2x + 1) = (x - 1)^2 + 5\,(2x + 1)^2$.

3.2. Применение свойств функций к решению уравнений

Таблица 8

Ориентир	Пример
1. Конечная ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Проверка: $x=1$ — корень $\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}, 1=1\right)$, $x=-1$ — не корень $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$. *Ответ:* 1. ◁
2. Оценка левой и правой частей уравнения	
$\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$ **Если надо решить уравнение вида $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно равны a.**	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$. ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (так как $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Итак, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$. *Ответ:* 0. ◁
$\boxed{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$ $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\geqslant 0$, $\ldots\ldots\ldots$ $f_n(x)\geqslant 0$ ***Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.***	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0$. ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=$ $=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Итак, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0. \end{cases}$ Из первого уравнения получаем $x=2$, что удовлетворяет всей системе. *Ответ:* 2. ◁

Продолж. табл. 8

<table>
<tr><td colspan="2">3. Использование возрастания и убывания функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема решения уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку левой и правой частей уравнения).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Теоремы о корнях уравнения</td></tr>
<tr><td>1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.</td></tr>
<tr><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Уравнение $\sqrt{x} + 2x^3 = 3$ имеет единственный корень $x = 1$ $(\sqrt{1} + 2 \cdot 1^3 = 3$, то есть $3 = 3)$, поскольку функция $f(x) = \sqrt{x} + 2x^3$ возрастает на всей области определения $x \geqslant 0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.</td></tr>
<tr><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет единственный корень $x = 1$ $(\sqrt{1} + 1^3 = 3 - 1$, то есть $2 = 2)$, поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geqslant 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает (на множестве $\boldsymbol{R}$, а следовательно, и при $x \geqslant 0$).</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Конечная ОДЗ. Напомним, что в случае, когда дано уравнение $f(x) = g(x)$, общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$ называется *областью допустимых значений* этого уравнения. Понятно, что каждый корень заданного уравнения принадлежит как области определения функции $f(x)$, так и области определения функции $g(x)$. Таким образом, *каждый корень* *уравнения обязательно принадлежит ОДЗ этого уравнения.* Это позволяет в некоторых случаях за счет анализа ОДЗ получить решение уравнения.

Например, если дано уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то его ОДЗ можно задать с помощью системы $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 4-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ то есть $x=2$. Таким образом, ОДЗ данного уравнения состоит только из одного значения $x=2$. Но если только для одного числа необходимо выяснить, является ли оно корнем данного уравнения, то достаточно подставить это значение переменной в уравнение. В результате получаем верное числовое равенство ($0=0$). Следовательно, $x=2$ — корень данного уравнения. Других корней у этого уравнения быть не может, поскольку все корни уравнения находятся в его ОДЗ, а там нет других значений, кроме $x=2$.

Рассмотренный пример позволяет выделить ориентир для решения аналогичных уравнений:

если ОДЗ уравнения (а также неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.

Замечание. *В том случае, когда ОДЗ — пустое множество (не содержит ни одного числа), мы можем сразу дать ответ, что данное уравнение не имеет корней.*

Например, если необходимо решить уравнение $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}+5x$, то его ОДЗ задается системой $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$ то есть системой $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ которая не имеет решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

2. Оценка левой и правой частей уравнения. Некоторые уравнения можно решить с помощью оценки левой и правой частей уравнения.

Пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$, и нам удалось выяснить, что для всех допустимых значений x значение $f(x)\geqslant a$, а значение $g(x)\leqslant a$.

Рассмотрим два случая: 1) $f(x)>a$; 2) $f(x)=a$.

Если $f(x)>a$, то равенство $f(x)=g(x)$ не может выполняться, потому что $g(x)\leqslant a$, то есть при $f(x)>a$ данное уравнение корней не имеет. Остается только случай $f(x)=a$, но, учитывая необходимость выполнения равенства $f(x)=g(x)$, имеем, что тогда и $g(x)=a$. Таким образом, мы обосновали, что выполнение равенства $f(x)=g(x)$ (при условии $f(x)\geqslant a$ и $g(x)\leqslant a$) гарантирует одновременное выполнение равенств $f(x)=a$ и $g(x)=a$ (и наоборот, если одновременно выполняются равенства $f(x)=a$ и $g(x)=a$, то выполняется и равенство $f(x)=g(x)$). Как было показано в п. 3.1, это и означает, что уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

Коротко это можно записать так:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a, \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$$

○

Пример использования такого приема решения уравнений приведен в пункте 2 таблицы 8.

Аналогично предыдущим рассуждениям обосновывается и ориентир по решению уравнения $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$, в котором все функции-слагаемые неотрицательны ($f_1(x) \geqslant 0$; $f_2(x) \geqslant 0$; ...; $f_n(x) \geqslant 0$).

● Если предположить, что $f_1(x) > 0$, то сумма всех функций, стоящих в левой части этого уравнения, может равняться нулю только тогда, когда сумма $f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ будет отрицательной. Но это невозможно, поскольку по условию все функции неотрицательные. Таким образом, при $f_1(x) > 0$ данное уравнение не имеет корней. Эти же рассуждения можно повторить для любой другой функции-слагаемого. Остается единственная возможность — все функции-слагаемые равны нулю (очевидно, что в этом случае равенство $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ обязательно будет выполняться). Таким образом, *сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.* ○

Например, чтобы решить уравнение $x^4 + |x - 1| = 2x^2 - 1$, достаточно перенести все члены в одну сторону, записать уравнение в виде $(x^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$ и учесть, что функции $(x^2 - 1)^2$ и $|x - 1|$ неотрицательные. Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2-1)^2=0, \\ |x-1|=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x = 1$, что удовлетворяет и всей системе. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

3. Использование возрастания и убывания функций к решению уравнений опирается на такое свойство: *возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.*

Полезно помнить специальные теоремы о корнях уравнения.

Теорема 1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Графически утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 39. Прямая $y = a$ пересекает график возрастающей на промежутке $[\alpha; \beta]$ функции $y = f(x)$ только в одной точке. Это и означает, что уравнение $f(x) = a$ не может иметь больше одного корня на промежутке $[\alpha; \beta]$. Докажем это утверждение аналитически.

Если на промежутке $[\alpha; \beta]$ уравнение имеет корень x_0, то $f(x_0) = a$. Других корней быть не может, поскольку для возрастающей функции $f(x)$ при $x > x_0$ получаем неравенство $f(x) > f(x_0) = a$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = a$. Таким образом, при $x \neq x_0$ $f(x) \neq a$. Аналогично и для убывающей функции при $x \neq x_0$ получаем $f(x) \neq a$. ○

Теорема 2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Графически утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 40.

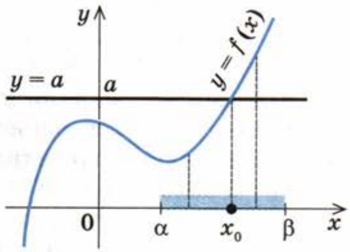


Рис. 39

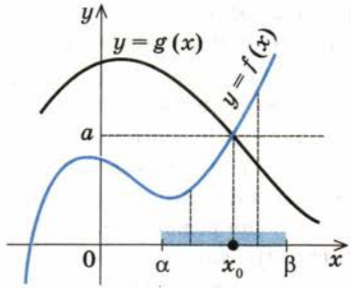


Рис. 40

Если на промежутке $[\alpha; \beta]$ уравнение имеет корень x_0, то $f(x_0) = g(x_0) = a$. Других корней быть не может, поскольку, например, для возрастающей функции $f(x)$ и убывающей функции $g(x)$ при $x > x_0$ имеем $f(x) > a$, а $g(x) < a$, таким образом, $f(x) \neq g(x)$. Аналогично и при $x < x_0$ $f(x) \neq g(x)$. ○

Каждая из этих теорем утверждает, что *в рассмотренном промежутке данное уравнение может иметь не более чем один корень, то есть или это уравнение совсем не имеет корней, или оно имеет единственный корень.* Если нам удалось подобрать один корень такого уравнения, то других корней в заданном промежутке уравнение не имеет.

Например, чтобы решить уравнение $x^3 + x = 10$, достаточно заметить, что функция $f(x) = x^3 + x$ является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций) и что $x = 2$ — корень* этого уравнения ($2^3 + 2 = 10$; $10 = 10$). Таким образом, данное уравнение $f(x) = 10$ имеет единственный корень $x = 2$.

Заметим, что каждая из этих теорем гарантирует единственность корня уравнения (если он есть) только на промежутке возрастания (или убывания) соответствующей функции. Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, то приходится рассматривать каждый из них отдельно.

---

* Корень $x = 2$ получен подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые подставляются в данное уравнение.

Пример Решим с помощью теоремы 2 уравнение $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

▶ Сначала следует учесть его ОДЗ: $x \neq 0$ и вспомнить, что функция $y = \frac{2}{x}$ на всей области определения не является ни убывающей, ни возрастающей (с. 28), но она убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Поэтому рассмотрим каждый из этих промежутков отдельно.

1) При $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x = 1$ $\left(1^3 + 1 = \frac{2}{1},\ 2 = 2\right)$.
   Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает при $x > 0$ (как было показано выше, она возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$), а функция $g(x) = \frac{2}{x}$ убывает на промежутке $x > 0$. Таким образом, данное уравнение $f(x) = g(x)$ при $x > 0$ имеет единственный корень $x = 1$.

2) При $x < 0$ данное уравнение имеет корень $x = -1$ $\left((-1)^3 + (-1) = \frac{2}{-1},\ -2 = -2\right)$.
   Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает при $x < 0$, а функция $g(x) = \frac{2}{x}$ убывает на этом промежутке. Поэтому данное уравнение $f(x) = g(x)$ при $x < 0$ имеет единственный корень $x = -1$.
   В ответ следует записать все найденные корни (хотя на каждом из промежутков корень единственный, но всего корней — два). Итак, данное уравнение имеет только два корня: 1 и −1. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x - 1)^2$.

Решение

▶ ОДЗ: $x \neq 0$. На ОДЗ $x^4 > 0$. Тогда функция $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел), а функция $g(x) = 2 - (x - 1)^2 \leqslant 2$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^4 + \frac{1}{x^4} = 2, \\ 2 - (x - 1)^2 = 2. \end{cases}$ Из второго уравнения системы получаем $x = 1$, что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, система (а значит, и данное уравнение) имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: 1. ◁

Комментарий

Если раскрыть скобки и привести обе части уравнения к общему знаменателю, то для нахождения корней полученного уравнения придется решать полное уравнение восьмой степени, все корни которого мы не сможем найти.

Попытаемся оценить области значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Поскольку на ОДЗ ($x \neq 0$) $x^4 > 0$, то в левой части уравнения стоит *сумма двух взаимно обратных положительных чисел*, которая *всегда больше или равна* 2.

В правой части из 2 вычитается неотрицательное число $(x - 1)^2$. Таким образом, при всех значениях x получаем значение, меньшее или равное 2. Равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда обе части равны 2.

Задача 2 Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+x^3=\sqrt{y}+y^3,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$ Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt{t}+t^3$. На своей области определения ($t \geqslant 0$) эта функция является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций). Тогда первое уравнение заданной системы, которое имеет вид $f(x) = f(y)$, равносильно уравнению $x = y$. Таким образом, на ОДЗ заданная система равносильна системе $\begin{cases}x=y,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$

Подставляя $x = y$ во второе уравнение системы, имеем $4y^2 = 36$, $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Учитывая, что на ОДЗ $y \geqslant 0$, получаем $y = 3$. Тогда $x = y = 3$.

Ответ: (3; 3). ◁

Комментарий

Иногда свойства функций удается применить при решении систем уравнений. Если заметить, что в левой и правой частях первого уравнения заданной системы стоят значения одной и той же функции, которая является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то *равенство $f(x) = f(y)$ для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку возрастающая функция может принимать одинаковые значения только при одном значении аргумента.* (Заметим, что такое же свойство будет иметь место и для убывающей функции.)

Замечание. Утверждение, обоснованное в комментарии к задаче 2, может быть использовано при решении аналогичных задач. Коротко его можно сформулировать так: **если функция $f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве**

$$f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно использовать свойства функций при решении уравнений.
2*. Обоснуйте правильность ориентиров по решению уравнений с использованием свойств функций, приведенных в таблице 8 (с. 60).

Упражнения

Решите уравнение **(1—4)**, используя свойства соответствующих функций.

1. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{4-2x}+x+2$; 2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

2. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 2) $1+\left|x^5+3x\right|=\sqrt{1-x^2}$;

3*) $x^6+\frac{1}{x^6}=1-2x-x^2$; 4*) $\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|$.

3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0$;

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$;

5) $x^2+y^2+5=4x+2y$;

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$; 3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$;

4) $\sqrt{x-2}+x=\frac{40}{x-1}$; 5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\frac{10}{x}$; 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}$.

5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8. \end{cases}$

§ 4. НЕРАВЕНСТВА: РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ И ОБЩИЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

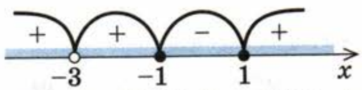
Таблица 9

1. Понятия неравенства с одной переменной и его решений	
Определение	Пример
Если два выражения с переменной соединить одним из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то получим *неравенство с переменной*. В общем виде неравенство с одной переменной x (например, для случая «больше») записывают так: $f(x)>g(x)$.	$3x<1$ — линейное неравенство; $x^2-3x+2>0$ — квадратное неравенство; $\frac{x-5}{2x+4}<1$ — дробное неравенство.

Продолж. табл. 9

Решением неравенства с переменной **называется значение переменной, которое обращает заданное неравенство в верное числовое неравенство.** *Решить неравенство — значит найти все его решения (и обосновать, что других решений нет) или доказать, что решений нет.*	$x = 4$ — одно из решений неравенства $2x - 3 > x$, так как при $x = 4$ получаем верное неравенство: $2 \cdot 4 - 3 > 4$, то есть $5 > 4$.
2. Область допустимых значений (ОДЗ)	
Областью допустимых значений **(или областью определения)** ***неравенства*** **называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, которые стоят в левой и правой частях неравенства.**	Для неравенства $\sqrt{x+2} < x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется условием: $x + 2 \geqslant 0$, а областью определения функции $g(x) = x$ является множество всех действительных чисел.
3. Равносильные неравенства	
Определение	Простейшие теоремы
Два неравенства называются ***равносильными*** **на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения,** то есть каждое решение первого неравенства является решением второго и наоборот, каждое решение второго неравенства является решением первого.	**1. Если из одной части неравенства перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное заданному (на любом множестве).** **2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число** *(или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства),* ***не меняя знак неравенства,*** **то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).** **3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число** (*или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства*) **и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).**

Продолж. табл. 9

4. Метод интервалов (решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)	
План	Пример
1. Найти ОДЗ. **2. Найти нули функции $f(x) = 0$.** **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.**	**Решите неравенство $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.** ▶ **Пусть $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^2}$.** **1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, то есть $x \neq -3$.** **2. Нули функции: $f(x) = 0$.** $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ **(входят в ОДЗ).** **3.**  *Ответ:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

5. Схема поиска плана решения неравенства

Решение неравенства

с помощью равносильных преобразований	**с помощью метода интервалов ($f(x) \gtrless 0$)**
Учесть ОДЗ исходного неравенства	**1. Найти ОДЗ.** **2. Найти нули функции $f(x) = 0$.** **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.**
(1) ↓↑ (2) **Сохранять на ОДЗ верное неравенство при прямых и обратных преобразованиях.**	

(1) — **исходное неравенство;**

(2) — **неравенство, полученное в результате преобразования исходного;**

↓, ↑ — **символическое изображение выполненных преобразований (с указанием направления их выполнения)**

Объяснение и обоснование

1. Понятия неравенства с переменной и его решений. Если два выражения с переменной соединить одним из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то получаем неравенство с переменной.

Аналогично уравнению, неравенство с переменной (например, со знаком $>$) чаще всего понимают как аналитическую запись задачи о нахождении тех значений аргументов, при которых значение одной из заданных функций больше, чем значение другой заданной функции. Поэтому в общем виде неравенство с одной переменной x (например, для случаев «больше») записывают так: $f(x) > g(x)$.

Напомним, что *решением неравенства называется значение переменной, которое обращает это неравенство в верное числовое неравенство.*

Решить неравенство — значит найти все его решения (и обосновать, что других решений нет) или доказать, что решений нет.

Например, решениями неравенства $3x < 6$ являются все значения $x < 2$, для неравенства $x^2 > -1$ решениями являются все действительные числа ($\boldsymbol{R}$), а неравенство $x^2 < -1$ не имеет решений, поскольку значение x^2 не может быть отрицательным числом.

2. Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства определяется аналогично ОДЗ уравнения. *Если задано неравенство $f(x) > g(x)$, то общая область определения функций $f(x)$ и $g(x)$ называется областью допустимых значений этого неравенства* (иногда используются также термины «область определения неравенства» или «множество допустимых значений неравенства»). Например, для неравенства $x^2 < x$ областью допустимых значений являются все действительные числа (это можно записать, например, так: ОДЗ: $\boldsymbol{R}$), поскольку функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$ имеют области определения $\boldsymbol{R}$.

Понятно, что каждое решение заданного неравенства входит как в область определения функции $f(x)$, так и в область определения функции $g(x)$ (иначе мы не сможем получить верное числовое неравенство). Таким образом, *каждое решение неравенства обязательно входит в ОДЗ этого неравенства.* Это позволяет в некоторых случаях применить анализ ОДЗ неравенства для его решения.

Например, в неравенстве $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}>x$ функция $g(x) = x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ — только при условии, что под знаком квадратного корня будут стоять неотрицательные выражения. Таким образом, ОДЗ этого неравенства задается системой $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$ из которой получаем систему $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ не имеющую решений. Иначе говоря, ОДЗ заданного неравенства не содержит ни одного числа, поэтому это неравенство не имеет решений.

В основном при решении неравенств различных видов приходится применять один из двух методов решения: равносильные преобразования неравенств или так называемый метод интервалов.

3. Равносильные неравенства. С понятием равносильности неравенств вы знакомы еще из курса алгебры 9 класса. Как и для случая равносильных уравнений, равносильность неравенств мы будем рассматривать на определенном множестве.

Два неравенства называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения, то есть каждое решение первого неравенства является решением второго и, наоборот, каждое решение второго неравенства является решением первого.

Договоримся, что в дальнейшем **все равносильные преобразования неравенств будем выполнять на ОДЗ заданного неравенства.** Укажем, что в том случае, когда ОДЗ заданного неравенства является множество всех действительных чисел, мы не всегда будем его записывать (как не записывали ОДЗ при решении линейных или квадратных неравенств). И в других случаях главное — не записать ОДЗ при решении неравенства, а действительно учесть ее при выполнении равносильных преобразований заданного неравенства.

Общие ориентиры выполнения равносильных преобразований неравенств аналогичны соответствующим ориентирам выполнения равносильных преобразований уравнений.

Как указывалось выше, выполняя *равносильные преобразования неравенств*, необходимо **учитывать ОДЗ заданного неравенства** — это и есть первый ориентир для выполнения равносильных преобразований неравенств.

По определению равносильности неравенств необходимо обеспечить, чтобы каждое решение первого неравенства было решением второго, и наоборот, каждое решение второго неравенства было решением первого. Для этого достаточно **обеспечить сохранение верного неравенства на каждом шаге решения не только при прямых, но и при обратных преобразованиях.** Это и есть второй ориентир для решения неравенств с помощью равносильных преобразований. Действительно, каждое решение неравенства обращает его в верное числовое неравенство, и если верное неравенство сохраняется, то решение каждого из неравенств будет также и решением другого, таким образом, неравенства будут равносильны (соответствующие ориентиры схематически представлены в пункте 5 табл. 9).

Например, чтобы решить с помощью равносильных преобразований неравенство

$$\frac{x-3}{x+1}>0, \qquad (1)$$

достаточно учесть его ОДЗ: $x + 1 \neq 0$ и условие положительности дроби (*дробь будет положительной тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки*), а также учесть, что на ОДЗ все необходимые преобразования можно выполнить как в прямом, так и в обратном направлении с сохранением верного неравенства.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда получаем $\begin{cases} x>3, \\ x>-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<3, \\ x<-1. \end{cases}$

Таким образом, $x > 3$ или $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Комментарий

Заметим, что при записи условия положительности дроби — совокупности систем (2) — мы неявно учли ОДЗ неравенства (1). Действительно, если $x + 1 > 0$ или $x + 1 < 0$, то $x + 1 \neq 0$, поэтому в явном виде ОДЗ заданного неравенства не записано при оформлении решения.

Кроме выделенных общих ориентиров, для выполнения равносильных преобразований неравенств можно также пользоваться специальными теоремами о равносильности. В связи с уточнением определения равносильности неравенств обобщим также формулировки простейших теорем о равносильности неравенств, известных из курса алгебры 9 класса.

1. ***Если из одной части неравенства перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное заданному (на любом множестве).***
2. ***Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства), не изменяя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).***
3. ***Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).***

Обоснование этих теорем проводится с использованием основных свойств числовых неравенств, приведенных в таблице 5 справочных материалов на с. 456, и полностью аналогично обоснованию ориентиров для равносильных преобразований заданного неравенства.

Замечание. Для обозначения перехода от заданного неравенства к неравенству, равносильному ему, можно применять специальный значок $\Leftrightarrow$, но его использование при оформлении решений не является обязательным (хотя иногда мы будем его использовать, чтобы подчеркнуть, что было выполнено именно равносильное преобразование).

4. Метод интервалов. Решение неравенств методом интервалов опирается на свойства функций, связанные с изменением знаков функции. Объясним эти свойства, используя графики известных нам функций, например функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2x - 2$ (рис. 41).

Рассматривая эти графики, замечаем, что функция может изменить свой знак только в двух случаях:

1) если график разрывается (как в случае функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 41, *а*) — график разрывается в точке 0 и знак функции изменяется в точке 0);
2) если график без разрыва переходит из нижней полуплоскости в верхнюю (или наоборот). Но тогда график пересекает ось Ox (как в случае функции $y = 2x - 2$) (рис. 41, *б*).

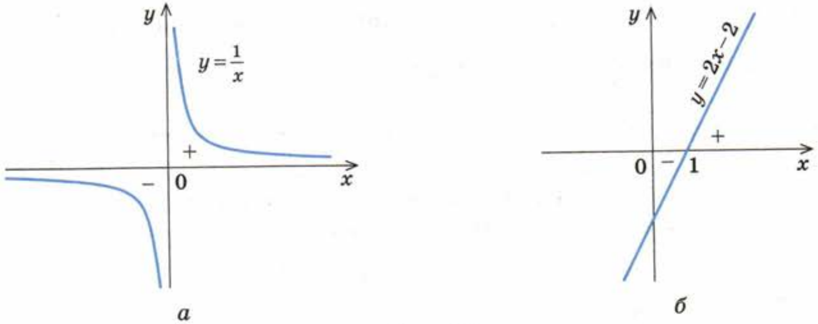


Рис. 41

На оси Ox значения функции равны нулю. (Напомним, что значения аргумента, при которых функция равна нулю, называют *нулями функции*.) Таким образом, **любая функция может поменять свой знак только в нулях или в точках, где разрывается график функции** (в так называемых точках разрыва функции*).

Точки, в которых разрывается график функции $f(x)$, мы выделяем, как правило, когда находим область определения этой функции. Например, если $f(x)=\frac{1}{x}$, то ее область определения $x \neq 0$, и именно в точке 0 график этой функции разрывается (рис. 41, *а*). Если же на каком-нибудь промежутке области определения график функции не разрывается и функция не равна нулю, то по приведенному выше выводу она не может на этом промежутке поменять свой знак**. То есть, для решения неравенств мы будем пользо-

* Более детально это понятие будет рассмотрено в курсе 11 класса.

** В курсе 11 класса мы уточним формулировку этого свойства (так называемых непрерывных функций). Для всех известных вам элементарных функций (линейных, квадратичных, степенных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических) это свойство имеет место (доказательство соответствующего утверждения дается в курсе математического анализа). Укажем, что элементарными функциями обычно называют функции: $y = c$ ($c = const$); $y = x^n$, $n \in N$; $y=\sqrt[n]{x}$, $n \in N$; $y=a^x$ $(a > 0)$; $y=\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$ и все функции, которые получаются из перечисленных выше с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции (функции от функции).

ваться следующим свойством элементарной функции (которое доказывается в курсе математического анализа): *если на интервале $(a; b)$ элементарная функция $f(x)$ определена и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.* Таким образом, если отметить нули элементарной функции на ее области определения, то область определения разобьется на промежутки, внутри которых знак функции измениться не может (и поэтому этот знак можно определить в любой точке из этого промежутка).

В таблице 10 приведено решение дробно-рационального неравенства $\frac{2x+4}{x-1}>0$ методом интервалов; комментарий, объясняющий каждый этап решения; *план решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов.*

Таблица 10

Пример	Комментарий	План решения
$\frac{2x+4}{x-1}>0.$ Решение ▶ $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}.$ 1. ОДЗ: $x-1\neq 0,$ то есть $x\neq 1.$	Рассмотрим функцию, стоящую в левой части этого неравенства, и обозначим ее через $f(x)$: $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}.$ Решением неравенства $f(x)>0$ могут быть только числа, которые входят в область определения функции $f(x)$, то есть числа, входящие в ОДЗ неравенства. Поэтому первым этапом решения неравенства методом интервалов будет нахождение его ОДЗ.	**1. Найти ОДЗ неравенства.**
2. Нули $f(x)$: $(f(x)=0).$ $\frac{2x+4}{x-1}=0,$ тогда $x=-2.$	Нас интересуют те промежутки области определения функции $f(x)$, на которых эта функция положительна. Как было отмечено выше, элементарная функция $f(x)$ может поменять знак в своих нулях, поэтому вторым этапом решения неравенства $f(x)>0$ будет нахождение нулей функции (для этого приравниваем функцию $f(x)$ к нулю и решаем полученное уравнение).	**2. Найти нули $f(x)$ $(f(x)=0)$.**
3.  	Если теперь отметить нули на области определения функции $f(x)$, то область определения разбивается на промежутки, внутри каждого из которых элементарная функция $f(x)$ не меняет свой знак. Поэтому знак функции на каждом промежутке можно определить в любой точке этого промежутка. Это и является третьим этапом решения.	**3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции в каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.**

Продолж. табл. 10

Пример	Комментарий	План решения
4. *Ответ:* $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.	Из рисунка видно, что решением неравенства является объединение промежутков $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$.	4. Записать ответ, учитывая знак неравенства.

Приведем пример решения более сложного дробно-рационального неравенства методом интервалов и с помощью равносильных преобразований.

Пример Решите неравенство $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$.

I способ (метод интервалов)

Решение

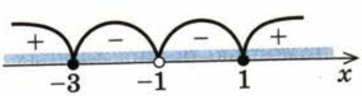
► Пусть $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

1. ОДЗ: $x \neq -1$.
2. Нули $f(x)$: $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0$,

$$x^2+2x-3=0,$$

$x_1=1$, $x_2=-3$ (принадлежат ОДЗ).

3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (см. рисунок).



4. *Ответ:* $[-3;\ -1) \cup (-1;\ 1]$. ◁

Комментарий

Данное неравенство имеет вид $f(x) \leqslant 0$, и для его решения можно применить метод интервалов. Для этого используем план, приведенный выше и на с. 69.

При нахождении нулей $f(x)$ следим за тем, чтобы найденные значения принадлежали ОДЗ (или выполняем проверку найденных корней уравнения $f(x)=0$).

Записывая ответ к нестрогому неравенству, следует учесть, что все нули функции должны войти в ответ (в данном случае — числа -3 и 1).

II способ (с помощью равносильных преобразований)

Комментарий

Выберем для решения метод равносильных преобразований неравенства. При выполнении равносильных преобразований мы должны учесть ОДЗ данного неравенства, то есть учесть ограничение $(x+1)^2 \neq 0$.

Но если $x \neq -1$, то $(x+1)^2 > 0$, и тогда в данной дроби знаменатель положителен. Если выполняется данное неравенство, то числитель дроби $x^2+2x-3 \leqslant 0$ (и наоборот, если выполняется последнее неравенство, то на ОДЗ дробь $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$), то есть данное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству $x^2+2x-3 \leqslant 0$.

Чтобы решить полученное квадратное неравенство, найдем корни квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 3$ и построим эскиз графика функции $y = x^2 + 2x - 3$. Решение квадратного неравенства: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

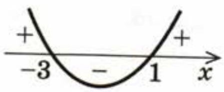
Поскольку все преобразования были равносильными только на ОДЗ, то мы должны выбрать те решения квадратного неравенства, которые удовлетворяют ограничению ОДЗ.

Решение

▶ ОДЗ: $(x + 1)^2 \neq 0$, то есть $x \neq -1$.

Тогда $(x + 1)^2 > 0$ и данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенству $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$. Поскольку $x^2 + 2x - 3 = 0$ при $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (эти значения x принадлежат ОДЗ), получаем

$-3 \leqslant x \leqslant 1$ (см. рисунок).



Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах смысл понятий: «решение неравенства», «решить неравенство», «область допустимых значений неравенства», «равносильные неравенства».
2. Сформулируйте известные вам теоремы о равносильности неравенств. Проиллюстрируйте их на примерах.
3. Сформулируйте план решения неравенств методом интервалов. Проиллюстрируйте использование этого плана на примере.
4. Объясните на примере, как можно выполнять равносильные преобразования неравенств в тех случаях, которые не описываются известными теоремами о равносильности неравенств.

Упражнения

Решите неравенство **(1–2)** двумя способами: с помощью равносильных преобразований и с помощью метода интервалов.

1. 1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{2}{x+2} < \dfrac{1}{x-3}$; 3) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2+12}{x^2-2x-8} \geqslant 1$.

2. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$;

3) $\dfrac{81}{x} \geqslant x^3$; 4) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$.

3. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Таблица 11

1. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля

по определению модуля

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

с использованием геометрического смысла модуля

$|a|$ — *расстояние на числовой прямой от точки O до точки a.*

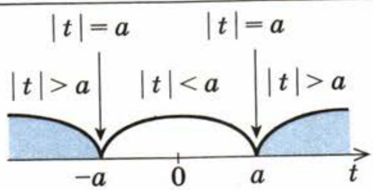
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

по общей схеме

1. **Найти ОДЗ.**
2. **Найти нули всех подмодульных функций.**
3. **Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки.**
4. **Найти решение в каждом промежутке (и проверить, входит ли это решение в рассматриваемый промежуток).**

с использованием специальных соотношений

2. Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **или** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **или** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **или** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Продолж. табл. 11

Обобщение

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$

6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **или** $f(x) > g(x)$.

7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Использование специальных соотношений

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Тогда** $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$;
   знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.
5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **где** $a < b$.

Объяснение и обоснование

Решать любое уравнение или неравенство, содержащее знак модуля, можно одним из трех основных способов: по определению модуля, исходя из геометрического смысла модуля или по общей схеме. Некоторые уравнения или неравенства с модулем могут быть также решены с использованием специальных соотношений (табл. 11).

В зависимости от выбранного способа решения получаем разные записи решения.

Пример Решите уравнение $|2x - 4| = 6$.

I способ (по определению модуля)

Решение	Комментарий
1) Если $2x - 4 \geqslant 0$, (1)	Чтобы раскрыть знак модуля по определению, рассмотрим два случая:

то получаем уравнение

$$2x - 4 = 6.$$

Тогда $x = 5$, что удовлетворяет и условию (1).

2) Если

$$2x - 4 < 0, \qquad (2)$$

то получаем уравнение

$$-(2x - 4) = 6.$$

Тогда $x = -1$, что удовлетворяет и условию (2).

Ответ: 5; −1. ◁

$$2x - 4 \geqslant 0 \text{ и } 2x - 4 < 0.$$

По определению *модулем положительного (неотрицательного) числа является само это число, а модулем отрицательного числа является противоположное ему число*. Поэтому при $2x - 4 \geqslant 0$ $|2x - 4| = 2x - 4$, а при $2x - 4 < 0$ $|2x - 4| = -(2x - 4)$.

В каждом случае решаем полученное уравнение и выясняем, удовлетворяет ли каждый из найденных корней тому условию, при котором мы его находили.

II способ (использование геометрического смысла модуля)

Решение

▶ $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$,
$2x = 10$ или $2x = -2$,
$x = 5$ или $x = -1$.

Ответ: 5; −1. ◁

Комментарий

С геометрической точки зрения $|2x - 4|$ — это расстояние от точки 0 до точки $2x - 4$. По условию уравнения оно равно 6, но расстояние 6 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 6), так и влево (получаем число −6). Таким образом, равенство $|2x - 4| = 6$ возможно тогда и только тогда, когда $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$.

Замечание. При решении уравнения с использованием геометрического смысла модуля знак модуля раскрывается неявно, то есть определение модуля в явном виде не применяется.

Общая схема решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля — это фактически немного измененный метод интервалов. Поясним содержание этой схемы на примере уравнения с двумя модулями вида

$$|f(x)| + |g(x)| = a \ (a > 0).$$

● Чтобы решить это уравнение, необходимо раскрыть знаки модулей, а для этого необходимо знать, где функции $f(x)$ и $g(x)$ будут положительными, а где — отрицательными. То есть фактически мы должны решить неравенства

$$f(x) \geq 0, \qquad (1)$$

$$g(x) \geq 0. \qquad (2)$$

Каждое из этих неравенств мы умеем решать методом интервалов. Перестроим прием решения неравенств методом интервалов таким образом, чтобы он давал возможность одновременно решать каждое из последних неравенств. Как известно, решение неравенства (1) методом интервалов начинается с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции $f(x)$), а решение неравенства (2) — с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции $g(x)$). Чтобы начать одновременно решать оба неравенства, необходимо найти общую область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть **найти ОДЗ данного уравнения** (это и есть *первый из ориентиров* необходимой схемы).

Чтобы продолжить решение неравенств $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ методом интервалов, необходимо найти нули функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть **найти нули всех подмодульных функций** (это и есть *второй ориентир*).

Если далее применить схему метода интервалов одновременно для двух неравенств, необходимо **на ОДЗ отметить нули подмодульных функций и разбить ОДЗ на промежутки** (это *третий ориентир*).

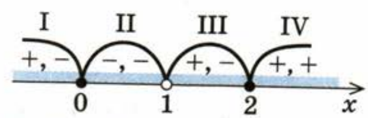
В каждом из полученных промежутков знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ не могут измениться. Тогда мы можем **найти знаки подмодульных функций на каждом промежутке** (в любой точке этого промежутка), **раскрыть знаки модулей и найти решение данного уравнения в каждом из этих промежутков** (это и есть *четвертый ориентир* общей схемы). ○

Обоснование возможности применения приведенной схемы к решению неравенств с модулями проводится аналогично.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\left|\frac{x}{x-1}\right| + |x-2| = 2.$

► 1. ОДЗ: $x \neq 1$.



2. Нули подмодульных функций: $\frac{x}{x-1} = 0$ $(x = 0)$ и $x - 2 = 0$ $(x = 2)$.

3. Нули 0 и 2 разбивают ОДЗ на четыре промежутка, в которых подмодульные функции имеют знаки*, показанные на рисунке.

4. Находим решения данного уравнения в каждом из промежутков (поскольку знаки подмодульных функций одинаковы на промежутках I и III, удобно для решения объединить эти промежутки).

<u>Промежутки I и III:</u> $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Учитывая знаки подмодульных функций на этих промежутках и определение модуля, получаем, что в этих промежутках данное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{x-1} - (x-2) = 2.$ Отсюда $x = 0$ или $x = 2$. В рассмотренные промежутки полученные значения не входят, таким образом, в этих промежутках корней нет.

---

* На рисунке в каждом из промежутков первый знак — это знак функции $\frac{x}{x-1}$, а второй — знак функции $x - 2$. При выполнении рисунка удобно сначала отметить на числовой прямой ОДЗ, а потом нули подмодульных функций на ОДЗ.

Промежуток II: [0; 1). (Следует обратить внимание на то, чтобы не пропустить значение $x = 0$, которое принадлежит ОДЗ.) В этом промежутке получаем уравнение $-\frac{x}{x-1}-(x-2)=2$. Отсюда $x = 0$ — корень, поскольку принадлежит этому промежутку.

Промежуток IV: [2; +∞). (И в этом промежутке необходимо не забыть значение $x = 2$.) Получаем уравнение $\frac{x}{x-1}+x-2=2$. Отсюда $x = 2$ — корень, поскольку принадлежит этому промежутку.

Объединяя все решения, которые мы получили в каждом промежутке, имеем решение данного уравнения на всей ОДЗ.

Ответ: 0; 2. ◁

Проиллюстрируем также получение и использование специальных соотношений, приведенных в таблице 11.

Обоснуем, например, соотношение 5: $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

● Запишем заданное равенство в виде $u + v = |u| + |v|$ и проанализируем его, опираясь на известные из 6 класса правила действий над числами с одинаковыми и с разными знаками. Чтобы сложить два числа u и v, мы сложили их модули, таким образом, эти числа имеют одинаковые знаки. Если бы эти числа были оба отрицательными, то и их сумма была бы тоже отрицательна, но $u + v = |u| + |v| \geqslant 0$. Тогда получаем, что числа u и v — оба неотрицательные. Наоборот, если $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \end{cases}$ то выполняется равенство $u + v = |u| + |v|$. Таким образом, действительно уравнение $|u| + |v| = u + v$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ ○

Задача 2* Решите уравнение $|x - 5| + |2x + 5| = 3x$.

Решение

▶ Поскольку $3x = (x - 5) + (2x + 5)$, то данное уравнение имеет вид $|u| + |v| = u + v$, но это равенство может выполняться тогда и только тогда, когда числа u и v — оба неотрицательные. Следовательно, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \geqslant -\frac{5}{2}. \end{cases}$

Таким образом, $x \geqslant 5$.

Ответ: [5; +∞). ◁

Комментарий

Если обозначить $x - 5 = u$ и $2x + 5 = v$, то $u + v = 3x$ и данное уравнение имеет вид $|u| + |v| = u + v$, а по соотношению 5 такое уравнение равносильно системе $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

Заметим, что данное уравнение можно решать и по общей схеме, но тогда решение будет более громоздким.

При решении *неравенств, содержащих знак модуля,* рассуждения, связанные с раскрытием знаков модулей, полностью аналогичны рассуждениям, которые использовались при решении уравнений, содержащих знак модуля.

Задача 3 Решите неравенство $|2x - 5| \leqslant 7$.

Решение

▶ Учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что заданное неравенство равносильно неравенству

$$-7 \leqslant 2x - 5 \leqslant 7. \qquad (1)$$

Тогда $-2 \leqslant 2x \leqslant 12$, таким образом,

$$-1 \leqslant x \leqslant 6.$$

Ответ: $[-1; 6]$. ◁

Комментарий

Неравенство вида $|f(x)| \leqslant a$ (где $a > 0$) удобно решать, используя геометрический смысл модуля. Поскольку заданное неравенство — это неравенство вида $|t| \leqslant 7$, а модуль числа — это расстояние на координатной прямой от точки, изображающей данное число, до точки 0, то заданному неравенству удовлетворяют все точки, находящиеся в промежутке $[-7; 7]$. Таким образом, $-7 \leqslant t \leqslant 7$. Если возникают затруднения с решением двойного неравенства (1), то его заменяют на равносильную систему $\begin{cases} 2x-5 \geqslant -7, \\ 2x-5 \leqslant 7. \end{cases}$

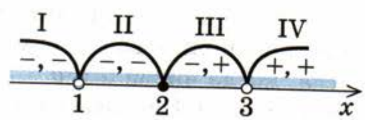
Задача 4 Решите неравенство

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1. \qquad (1)$$

▶ 1. ОДЗ: $|x - 2| - 1 \neq 0$. Тогда $|x - 2| \neq 1$, то есть $x - 2 \neq \pm 1$, таким образом: $x \neq 3$ или $x \neq 1$.

2. Нули подмодульных функций: $x - 3 = 0$ ($x = 3$ — не принадлежит ОДЗ) и $x - 2 = 0$ ($x = 2$).

3. Нуль 2 разбивает ОДЗ на четыре промежутка, на которых подмодульные функции имеют знаки, показанные на рисунке (на каждом из промежутков первый знак — это знак функции $x - 3$, а второй — знак функции $x - 2$).



4. Находим решения заданного неравенства в каждом из промежутков (поскольку знаки подмодульных функций являются одинаковыми на промежутках I и II, удобно для решения объединить эти промежутки).

Промежутки I и II: $(-\infty; 1) \cup (1; 2]$. Учитывая знаки подмодульных функций в этих промежутках и определение модуля, получаем, что при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ заданное неравенство равносильно неравенству $\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geqslant 1$. Тогда $\frac{3-x}{1-x} \geqslant 1$, то есть $\frac{2}{1-x} \geqslant 0$. Отсюда $x < 1$. В промежутки, которые мы рассмотрели, входят все значения $x < 1$, таким образом, в этом случае решением будет $x < 1$.

Промежуток III: $[2; 3)$. На этом промежутке получаем неравенство $\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geqslant 1$, то есть $\frac{-(x-3)}{x-3} \geqslant 1$. Но при любом значении x из промежутка III последнее неравенство обращается в неверное неравенство $(-1 \geqslant 1)$. Таким образом, в промежутке III неравенство (1) решений не имеет.

Промежуток IV: $(3; +\infty)$. В этом промежутке получаем неравенство $\frac{x-3}{x-2-1} \geqslant 1$, то есть $\frac{x-3}{x-3} \geqslant 1$. Как видим, при любом x из промежутка IV неравенство (1) обращается в верное числовое неравенство $(1 \geqslant 1)$. Таким образом, решением неравенства (1) в промежутке IV есть любое число из этого промежутка $(x > 3)$.

Объединяя все решения, полученные в каждом из промежутков, имеем решение данного неравенства на всей ОДЗ: $x < 1$ или $x > 3$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Укажем, что для решения некоторых неравенств, содержащих знак модуля, удобно применять также специальные соотношения, приведенные в таблице 11.

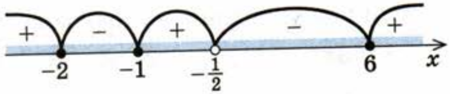
Задача 5* Решите неравенство $\frac{(|x-1|-|x+3|)(|2x|-|x+6|)}{|1-x|-|x+2|} < 0$.

▶ Поскольку $|a| \geqslant 0$ и функция $y = t^2$ монотонно возрастает на множестве неотрицательных чисел, то все разности модулей в неравенстве можно заменить на разности их квадратов (то есть воспользоваться соотношением 4: $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$). Получаем неравенство, равносильное заданному

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2} < 0.$$

Раскладывая на множители все разности квадратов, имеем:

$$\frac{(-4)(2x+2)(x-6)(3x+6)}{(-1-2x)3} < 0.$$



Далее методом интервалов (см. рисунок) получаем $-2 < x < -1$ или $-\frac{1}{2} < x < 6$.

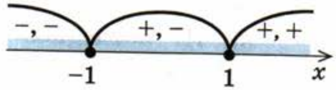
Ответ: $(-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 6\right)$. ◁

Общая схема, предложенная в таблице 11, может быть использована не только при решении уравнений или неравенств, содержащих знак модуля, но и при преобразовании выражений, содержащих знак модуля.

Например, для построения графика функции $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ удобно сначала по общей схеме раскрыть знаки модулей, а уже потом строить график функции $f(x)$.

Оформление решения подобного примера может быть таким.

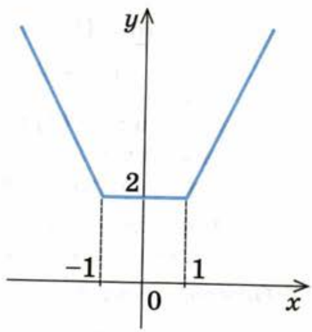
Задача 6 Постройте график функции $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.



1. Область определения функции: $\boldsymbol{R}$.
2. Нули подмодульных функций: $x = -1$ и $x = 1$.
3. Отмечаем нули на области определения и разбиваем область определения на промежутки (на рисунке также указаны знаки подмодульных функций в каждом из промежутков).
4. Тогда $f(x) = \begin{cases} -(x+1)-(x-1), & \text{если } x \leqslant -1, \\ x+1-(x-1), & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x+1+x-1, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$

Таким образом, $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$

Строим график этой функции (см. рисунок).



Вопросы для контроля

1. Объясните, какими способами можно решать уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. Проиллюстрируйте эти способы на примерах.
2. Обоснуйте специальные соотношения, приведенные в таблице 11. Проиллюстрируйте их применение к решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.
3. Обоснуйте обобщения использования геометрического смысла модуля, приведенные в таблице 11. Проиллюстрируйте их применение к решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства, содержащие знак модуля **(1–15)**.

1. 1) $|3x - 5| = 7$; 2) $|8 - 4x| = 6$; 3) $|x^2 - 5x| = 6$.

2. 1) $|2x - 3| > 5$; 2) $|3 - 5x| < 7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right| < 1$.

3. 1) $|x - 2| - 2x - 1 = 0$; 2) $x^2 + 3x + |x + 3| = 0$.

4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$;
3) $|x+5|+|x-8|=13$.

5. 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$;
3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.

6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.

7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

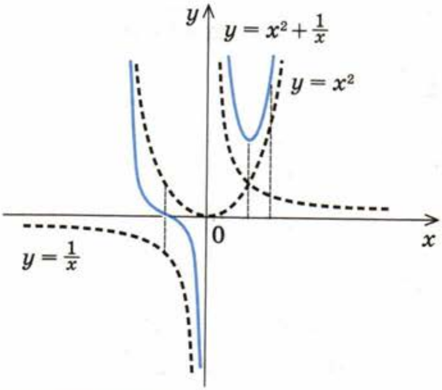
16. Постройте график функции:
1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$.

§ 6. ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Таблица 12

1. Построение графиков функции вида $y=f(x)+g(x)$
Если нам известны графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, то эскиз графика функции $y=f(x)+g(x)$ можно построить так: изобразить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $g(x)$, а потом построить искомый график по точкам, выполняя для каждого значения x (из области определения функции $f(x)+g(x)$) необходимые операции с отрезками, изображающими соответствующие ординаты $f(x)$ и $g(x)$. *Аналогично можно построить и схематические графики функций* $$y=f(x)\cdot g(x) \text{ и } y=\frac{1}{f(x)}.$$

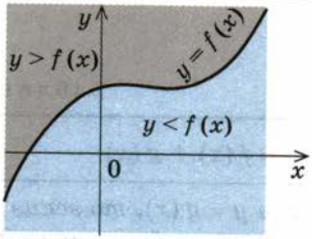
Продолж. табл. 12

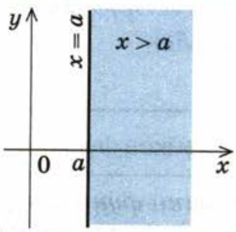
Пример	Комментарий
Постройте график функции $$y = x^2 + \frac{1}{x}.$$ 	Построим в одной системе координат графики функций-слагаемых: $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ (на рисунке они показаны штриховыми линиями). Для каждого значения x (кроме $x = 0$, которое не принадлежит области определения заданной функции) справа от оси Oy прибавляем соответствующие отрезки — значения функций $f(x)$ и $g(x)$ (обе функции имеют одинаковые знаки), слева от оси Oy — вычитаем (функции имеют противоположные знаки). На рисунке синей линией изображен график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

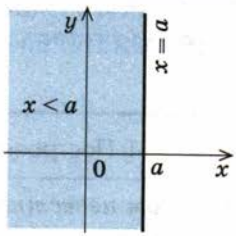
2. Графики уравнений и неравенств с двумя переменными

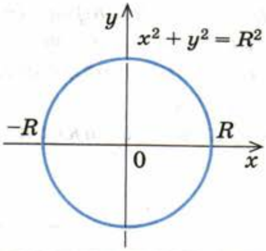
Определение. ***Графиком уравнения* (*неравенства*) *с двумя переменными* x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами (x; y), где пара чисел (x; y) является решением соответствующего уравнения (неравенства).**

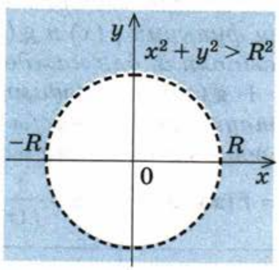
Графики некоторых уравнений и неравенств

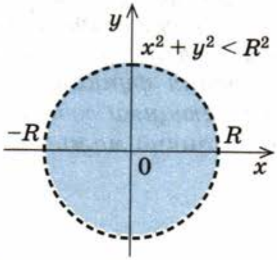




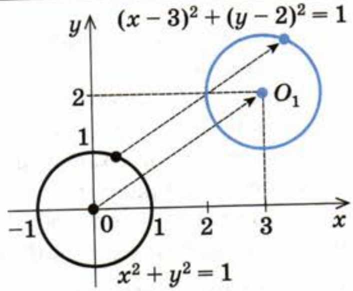
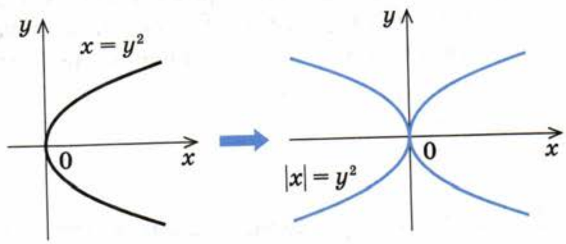
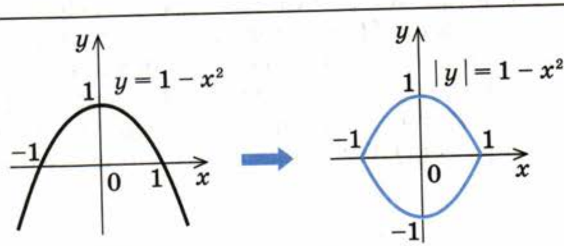








Продолж. табл. 12

3. Геометрические преобразования графика уравнения $F(x;\ y) = 0$	
Преобразование	Пример
$\boxed{\boldsymbol{F(x - a;\ y - b) = 0}}$ *Параллельный перенос* **графика уравнения** $F(x;\ y) = 0$ *на вектор* $\overline{n}(a; b)$.	
$\boxed{\boldsymbol{F(\lvert x \rvert;\ y) = 0}}$ **Часть графика уравнения** $F(x;\ y) = 0$ *справа от оси Oy* **(и на самой оси)** *остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.*	
$\boxed{\boldsymbol{F(x;\ \lvert y \rvert) = 0}}$ **Часть графика уравнения** $F(x;\ y) = 0$ *выше оси Ox* **(и на самой оси)** *остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Ox.*	

Объяснение и обоснование

1. Построение графиков функций вида $y = f(x) + g(x)$. Если известны графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, то можно построить ориентировочный вид графика функции $y = f(x) + g(x)$, или $y = f(x) \cdot g(x)$, или $y = \frac{1}{f(x)}$. Для этого достаточно изобразить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $g(x)$, а потом построить искомый график по точкам, выполняя для каждого значения x (из области определения заданной функции) необходимые операции над отрезками (или над длинами этих отрезков), которые изображают соответствующие ординаты функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример построения графика функции вида $y = f(x) + g(x)$ приведен в таблице 12, а графика функции вида $y = \frac{1}{f(x)}$ — на с. 92 (в последнем случае удобно строить графики функций $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{f(x)}$ не в одной системе координат, а в разных, расположенных так, чтобы их оси ординат находились на одной прямой).

Заметим, что такой способ построения графика функции не всегда дает возможность определить все характерные особенности поведения графика (часто это можно сделать только в результате специального исследования функции, которое будет рассмотрено в учебнике для 11 класса), но во многих случаях приведенный способ позволяет получить определенное представление о виде графика заданной функции.

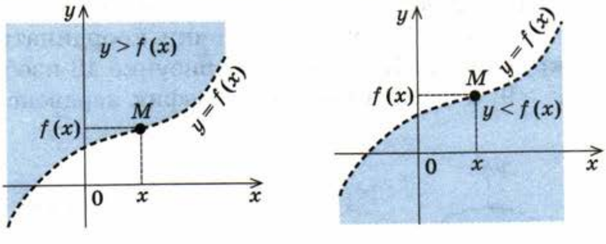
2. Графики уравнений и неравенств с двумя переменными. С понятием графика уравнения с двумя переменными вы ознакомились в курсе алгебры. Аналогично вводится и понятие графика неравенства с двумя переменными. Поэтому можно дать общее определение этих графиков:

Графиком уравнения (неравенства) с двумя переменными x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y)$, где пара чисел $(x; y)$ является решением соответствующего уравнения (неравенства).

Для построения графика неравенства $y > f(x)$ (или $y < f(x)$) достаточно иметь график функции $y = f(x)$. Действительно, по определению график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек M координатной плоскости с координатами $(x; y) = (x; f(x))$. Тогда для каждого значения x точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, будут находиться выше точки M (рис. 42, *а*), а точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$, будут находиться ниже точки M (рис. 42, *б*). Таким образом, график неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, находящихся выше графика функции $y = f(x)$, а график неравенства $y < f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, находящихся ниже графика функции $y = f(x)$. ○

Например, на рисунке 43 изображен график неравенства $y > x^2$, а на рисунке 44 — график неравенства $y \leqslant x^2$. Поскольку точки графика $y = x^2$ не принадлежат графику неравенства $y > x^2$, то на первом графике парабола $y = x^2$ изображена штриховой линией; а так как точки графика $y = x^2$ принадлежат графику неравенства $y \leqslant x^2$, то на втором графике парабола $y = x^2$ изображена сплошной линией.

Аналогично, если на координатной плоскости есть прямая $x = a$, то **графиком неравенства $x > a$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся справа от этой прямой, а графиком неравенства $x < a$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся слева от этой прямой.**



а *б*

Рис. 42

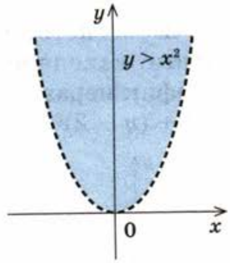


Рис. 43

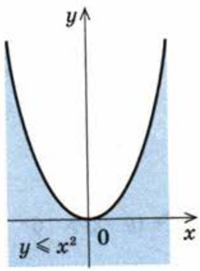


Рис. 44

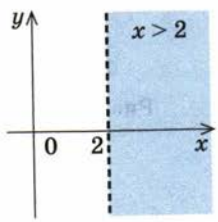


Рис. 45

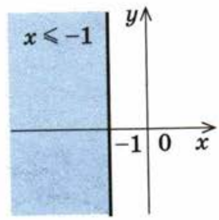


Рис. 46

Например, на рисунке 45 изображен график неравенства $x > 2$, а на рисунке 46 — график неравенства $x \leqslant -1$.

Отметим, что в том случае, когда на координатной плоскости есть изображение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, то

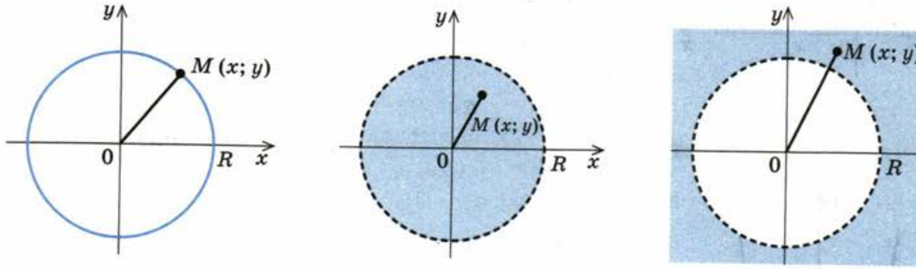
графиком неравенства $x^2 + y^2 < R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся внутри окружности, а графиком неравенства $x^2 + y^2 > R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся вне окружности.

Действительно, если на координатной плоскости рассмотреть точку $M\ (x,\ y)$, то $OM^2 = x^2 + y^2$ (O — начало координат). Если $x^2 + y^2 = R^2$ (где $R > 0$), то $OM^2 = R^2$, таким образом, $OM = R$ — точка M лежит на окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 47, *а*).

Если $x^2 + y^2 < R^2$, то $OM^2 < R^2$, таким образом, $OM < R$. То есть неравенству $x^2 + y^2 < R^2$ удовлетворяют координаты всех точек (и только этих точек), которые находятся внутри круга, ограниченного окружностью радиуса R с центром в начале координат (рис. 47, *б*).

Если $x^2 + y^2 > R^2$, то $OM^2 > R^2$, таким образом, $OM > R$. То есть неравенству $x^2 + y^2 > R^2$ удовлетворяют координаты всех точек (и только этих точек), которые находятся вне круга, ограниченного окружностью радиуса R (рис. 47, *в*).

Аналогично, если на плоскости есть изображение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, то графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся внутри этой окружности, а графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся вне окружности. Например, на рисунке 48 изображен график неравенства $x^2 + y^2 > 9$, а на рисунке 49 — график неравенства $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16$. ○



а *б* *в*

Рис. 47

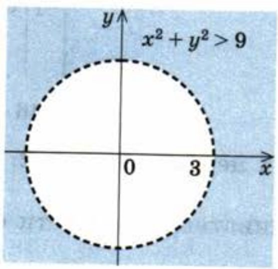


Рис. 48

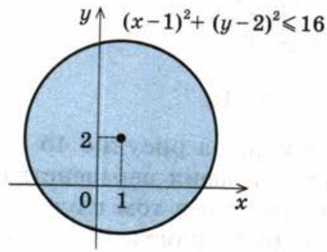


Рис. 49

3. Геометрические преобразования графика уравнения $F(x; y) = 0$.

● По определению график уравнения

$$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$

состоит из всех точек $M(x_0; y_0)$ координатной плоскости, координаты $(x_0; y_0)$ которых являются решениями этого уравнения. Это означает, что при подстановке пары чисел $(x_0; y_0)$ в данное уравнение оно обращается в верное числовое равенство, таким образом, $F(x_0; y_0) = 0$ — верное равенство.

Рассмотрим точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$. Если координаты этой точки подставить в уравнение

$$F(x - a; y - b) = 0, \qquad (2)$$

то получим верное равенство $F(x_0; y_0) = 0$. Поэтому координаты точки M_1 являются решениями уравнения (2), значит, точка M_1 принадлежит графику уравнения $F(x - a; y - b) = 0$.

Точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ можно получить из точки $M(x_0; y_0)$ параллельным переносом ее на вектор $\bar{n}(a; b)$. Поскольку каждая точка M_1 графика уравнения $F(x-a;\ y-b)=0$ получается из точки M графика уравнения $F(x;\ y)=0$ параллельным переносом ее на вектор $\overline{n}(a;b)$ (рис. 50), то и весь

график уравнения $F(x-a;\ y-b)=0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y)=0$ параллельным переносом его на вектор $\overline{n}(a;b)$. ○

● Для обоснования связи между графиками $F(x;\ y)=0$ и $F(|x|;\ y)=0$ достаточно заметить, что при $x\geqslant 0$ уравнение $F(|x|;\ y)=0$ совпадает с уравнением $F(x;\ y)=0$, таким образом, совпадают и их графики справа от оси Oy и на самой оси. Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ (где $x_0\geqslant 0$) — одна из общих точек этих графиков. Тогда $F(x_0;\ y_0)=0$ — верное равенство.

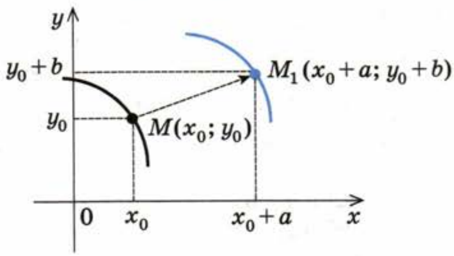


Рис. 50

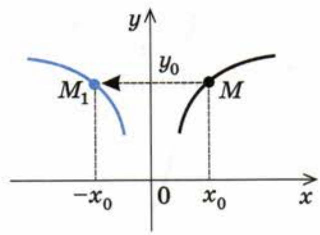


Рис. 51

Рассмотрим точку $M_1(-x_0;\ y_0)$. Если координаты этой точки подставить в уравнение $F(|x|;\ y)=0$ и учесть, что $x_0\geqslant 0$, то получим равенство $F(x_0;\ y_0)=0$. Поэтому координаты точки M_1 являются решениями уравнения $F(|x|;\ y)=0$, значит, точка M_1 принадлежит графику этого уравнения. Учитывая, что точки M и M_1 симметричны относительно оси Oy (рис. 51) , получаем:

график уравнения $F(|x|;\ y)=0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y)=0$ следующим образом: часть графика уравнения $F(x;\ y)=0$ справа от оси Oy (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy. ○

Аналогично обосновывается, что

для построения графика уравнения $F(x;\ |y|)=0$ часть графика уравнения $F(x;\ y)=0$ выше оси Ox (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Ox.

В таблице 12 приведены простейшие примеры использования геометрических преобразований графиков уравнений. Указанные соотношения приходится применять в заданиях типа: построить график уравнения или неравенства или изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению (неравенству).

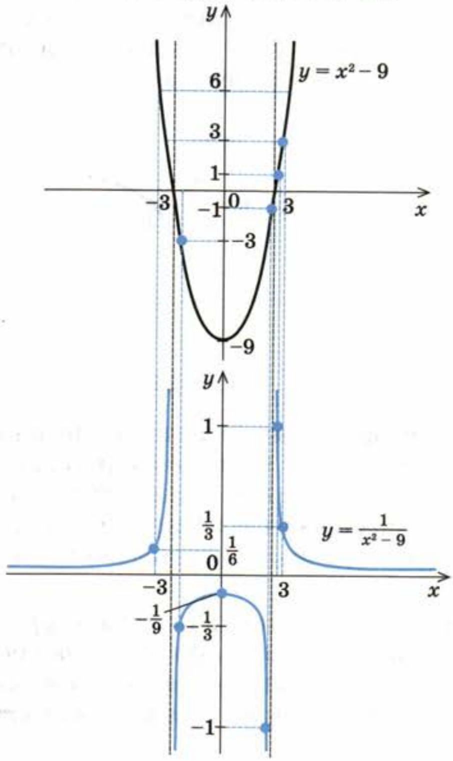
Примеры решения задач

Задача 1* Постройте график функции $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

Решение

▶ $x^2-9=0$ при $x=\pm 3$. Поэтому область определения заданной функции:

$x^2-9\neq 0$, то есть $x\neq \pm 3$.



Комментарий

Построим две системы координат так, чтобы оси ординат были у них на одной прямой. В верхней системе координат построим график функции $y=f(x)=x^2-9$. В тех точках, где функция $f(x)=x^2-9$ равна нулю ($x=\pm 3$), не существует графика функции $y=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2-9}$. Поэтому проведем через эти точки вертикальные прямые, которые не пересекают график функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$. Затем для каждого значения x разделим 1 на соответствующее значение ординаты $f(x)$ (используя то, что ординаты $f(x)$ отмечены на верхнем графике). На рисунке синей линией изображен результат — график функции $y=\dfrac{1}{x^2-9}$. (Для построения этого графика масштаб по осям Ox и Oy выбран разный.)

Задача 2 Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} x^2+y\leqslant 0, \\ x-y<2. \end{cases}$

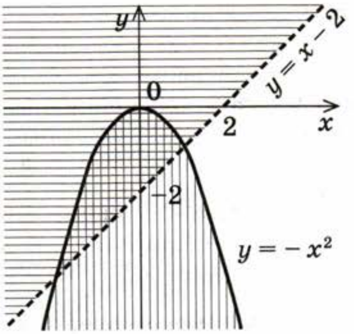
Решение

▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y>x-2. \end{cases}$

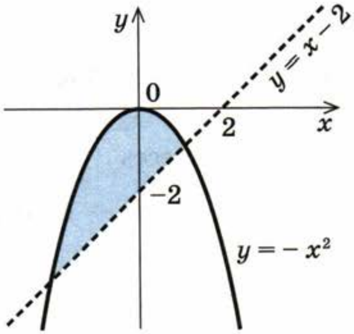
Комментарий

Перепишем заданную систему так, чтобы было удобно изображать графики данных неравенств (то есть запишем неравенства в виде $y>f(x)$

Изобразим штриховкой графики неравенств системы (первого — вертикальной штриховкой, второго — горизонтальной):



Тогда множество точек, координаты которых удовлетворяют системе, будет таким:



или $y < f(x)$). Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leqslant -x^2$, является объединением точек параболы $y = -x^2$ и точек координатной плоскости, находящихся ниже параболы (на рисунке это множество обозначено вертикальной штриховкой). Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > x - 2$, состоит из точек координатной плоскости, находящихся выше прямой $y = x - 2$ (на рисунке это множество обозначено горизонтальной штриховкой).

Системе неравенств удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые принадлежат пересечению множеств точек, заданных каждым из неравенств данной системы (на рисунке пересечению множеств соответствует та область, где штриховки наложились друг на друга).

Заметим, что в подобных заданиях можно не выполнять промежуточных рисунков, а сразу штриховать искомое множество точек координатной плоскости (выше прямой $y = x - 2$ и ниже параболы $y = -x^2$ вместе с той частью параболы, которая лежит выше прямой).

Задача 3* Постройте график уравнения $|x - y| + 2\,|x + y| = x + 6$.

Ориентир

Для упрощения выражения с несколькими модулями с двумя переменными можно найти нули подмодульных выражений (то есть приравнять их к нулю) и разбить область определения рассматриваемого выражения на несколько частей, в каждой из которых знак каждого модуля раскрывается однозначно.

Используя этот ориентир, получаем *план решения* примера.

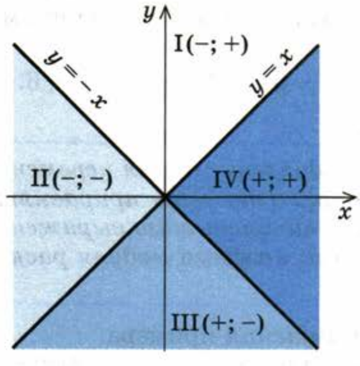
Приравняем к нулю подмодульные выражения $x - y = 0$ (отсюда $y = x$) и $x + y = 0$ (отсюда $y = -x$). Прямые $y = x$ и $y = -x$ разбивают координатную плоскость на четыре области. В каждой из этих областей знак каждого модуля раскрывается однозначно, после преобразования полученного равенства строим соответствующую часть графика заданного уравнения.

Решение

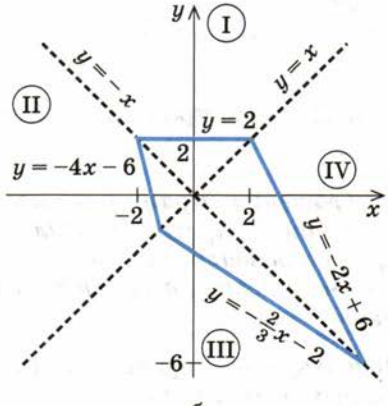
1. Область определения: x — любое действительное число, y — любое действительное число.
2. $x - y = 0$ при $y = x$; $x + y = 0$ при $y = -x$.
3. Прямые $y = x$ и $y = -x$ разбивают координатную плоскость на четыре части, в каждой из которых обозначены знаки первого и второго подмодульных выражений (рис. 52, *а*). (Будем считать, что каждая область берется вместе с лучами, которые ее ограничивают.) Действительно, если точки находятся в области I или на ее границе, то их координаты удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ которую можно записать так: $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда в области I первое подмодульное выражение отрицательно, а второе — положительно, поэтому данное уравнение имеет вид $-(x - y) + 2\,(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = 2$. Строим ту часть графика этой функции, которая находится в области I (рис. 52, *б*). Аналогично для точек области II: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$

   Таким образом, в области II данное уравнение имеет вид $-(x - y) - 2\,(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -4x - 6$. Строим ту часть графика этой функции, которая находится в области II.

   Если точки находятся в области III, то $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 0, \end{cases}$ из данного уравнения получаем $(x - y) - 2\,(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -\frac{2}{3}x - 2$.



а



б

Рис. 52

Если точки находятся в области IV, то $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0, \end{cases}$ из данного уравнения имеем: $(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -2x + 6$. Окончательный вид графика уравнения приведен на рисунке 52, *б*. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно, имея графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить эскиз графика функции $y = f(x) + g(x)$ и функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$.
2. Что называется графиком уравнения с двумя переменными? Что называется графиком неравенства с двумя переменными? Приведите примеры.
3. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график неравенства $y > f(x)$ и неравенства $y < f(x)$? Приведите примеры.
4. Как, зная график уравнения $F(x; y) = 0$, можно построить график уравнения $F(x - a; y - b) = 0$ и уравнений $F(|x|; y) = 0$ и $F(x; |y|) = 0$? Приведите примеры.

5*. Обоснуйте правила геометрических преобразований графика уравнения $F(x; y) = 0$ для получения графиков уравнений $F(x - a; y - b) = 0$, $F(|x|; y) = 0$, $F(x; |y|) = 0$.

6. Объясните на примере, как можно найти на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств с двумя переменными.

Упражнения

1. Постройте эскиз графика функции:

1) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 2) $y = x - \dfrac{1}{x}$; 3*) $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$; 4*) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

2. Постройте график уравнения:

1) $|y| = x - 2$; 2) $|y| = x^2 - x$; 3) $|x| = -y^2$;
4) $|x| + |y| = 2$; 5) $|x| - |y| = 2$.

3. Постройте график неравенства:

1) $y > x^2 - 3$; 2) $y < \dfrac{1}{x}$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
4) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 4$.

4. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y > x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x, \\ y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x + 4. \end{cases}$

5*. Постройте график уравнения:

1) $|x - y| - |x + y| = y + 3$; 2) $|x - 2y| + |2x - y| = 2 - y$;
3) $|3x + y| + |x - y| = 4$.

§ 7. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

7.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Если в запись уравнения или неравенства, кроме переменной и числовых коэффициентов, входят также буквенные коэффициенты — параметры, то при решении таких уравнений можно пользоваться следующим ориентиром.

Любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решения необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.

На этапе поиска плана решения уравнения или неравенства с параметрами или в ходе решения часто удобно сопровождать соответствующие рассуждения схемами, по которым легко проследить, в какой момент мы не смогли однозначно выполнить необходимые преобразования, на сколько случаев пришлось разбить решение и чем отличается один случай от другого. Чтобы на таких схемах (или в записях громоздких решений) не потерять какой-то ответ, целесообразно помещать окончательные ответы в прямоугольные рамки. Записывая окончательный ответ, следует учитывать, что ответ должен быть записан для всех возможных значений параметра.

Пример 1 Решите неравенство с переменной x: $3ax + 2 \geqslant x + 5a$.

Комментарий

Заданное неравенство является линейным относительно переменной x, поэтому используем известный алгоритм решения линейного неравенства:

1) переносим члены с переменной x в одну сторону, а без x — в другую:
$$3ax - x \geqslant 5a - 2;$$
2) выносим в левой части за скобки общий множитель x (то есть приводим неравенство к виду $Ax \geqslant B$): $(3a - 1)\,x \geqslant 5a - 2$.

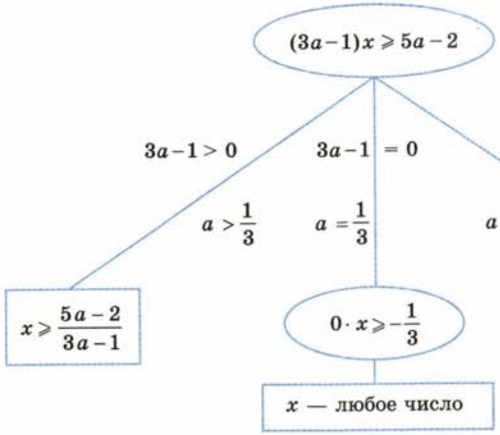
Для решения последнего неравенства мы хотели бы разделить обе его части на $(3a - 1)$. Но если обе части неравенства разделить на положительное число, то знак неравенства не изменится, а если на отрицательное, то знак неравенства необходимо изменить на противоположный. Кроме того, следует учесть, что на нуль делить нельзя. Следовательно, начиная с этого момента нужно рассмотреть три случая: $3a - 1 > 0$, $3a - 1 < 0$, $3a - 1 = 0$.

Приведенные выше рассуждения можно наглядно записать так:

$$3ax + 2 \geqslant x + 5a.$$

Решение

$$3ax - x \geqslant 5a - 2$$



Ответ: 1) при $a>\frac{1}{3}$ $x \geqslant \frac{5a-2}{3a-1}$; 2) при $a<\frac{1}{3}$ $x \leqslant \frac{5a-2}{3a-1}$; 3) при $a=\frac{1}{3}$ x — любое число. ◁

При решении более сложных уравнений или неравенств следует помнить, что уравнения и неравенства с параметрами чаще всего решают с помощью равносильных преобразований, а все равносильные преобразования уравнений или неравенств выполняют на области допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения или неравенства (то есть на общей области определения для всех функций, которые входят в запись уравнения или неравенства). Поэтому, прежде чем записать ответ, *нужно обязательно учесть ОДЗ заданного уравнения или неравенства*.

Пример 2 Решите уравнение $\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$, где x — переменная.

Комментарий

Заданные дробные выражения существуют тогда и только тогда, когда знаменатели заданных дробей не равны нулю, следовательно, ОДЗ уравнения: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

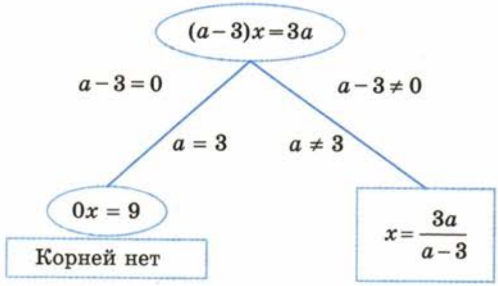
Умножим обе части заданного уравнения на выражение $x\,(x-3)$ — общий знаменатель дробей — и получим целое уравнение, которое при условии $x\,(x-3) \neq 0$ (то есть на ОДЗ заданного уравнения) равносильно заданному: $x^2 = x\,(x-3) + a\,(x-3)$. Из этого уравнения получаем $x^2 = x^2 - 3x + ax + 3a$, то есть $ax - 3x = 3a$. Тогда $(a-3)\,x = 3a$.

Для того чтобы найти значение переменной x, хотелось бы разделить обе части последнего уравнения на $(a-3)$, но при $a = 3$ пришлось бы делить на 0, что невозможно. Следовательно, начиная с этого момента нужно рассмотреть два случая.

Решение в соответствии с приведенными выше рассуждениями можно наглядно записать в виде схемы.

Решение

▶ ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq 0$.
$x^2 = x(x-3) + a(x-3)$, $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, $ax - 3x = 3a$.



Выясним, при каких значениях a найденные корни не входят в ОДЗ уравнения, то есть при каких значениях a получаем $x = 3$ и $x = 0$.

$\frac{3a}{a-3}=3$, тогда $3a = 3(a-3)$, $3a = 3a - 9$ — решений нет. Следовательно, при всех значениях a корень $\frac{3a}{a-3}$ не равен 3.

$\frac{3a}{a-3}=0$, тогда $a = 0$. Следовательно, при $a = 0$ имеем $x = 0$ — посторонний корень (не входит в ОДЗ), то есть при $a = 0$ заданное уравнение не имеет корней.

Ответ: 1) при $a = 3$ и $a = 0$ корней нет; 2) при $a \neq 3$, $a \neq 0$ $x=\frac{3a}{a-3}$. ◁

Пример 3 Решите уравнение $\frac{ax-1}{x-a}=\frac{4}{x}$ относительно переменной x.

Комментарий

Будем выполнять равносильные преобразования заданного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ (знаменатели дробей не равны нулю). Если теперь обе части уравнения умножить на произведение выражений, которые стоят в знаменателях дробей (и которое не равно нулю на ОДЗ уравнения), то получим уравнение $ax^2 - 5x + 4a = 0$, равносильное заданному (на ОДЗ заданного). Но последнее уравнение будет квадратным только при $a \neq 0$, потому для его решения следует рассмотреть два случая ($a = 0$ и $a \neq 0$).

Если $a \neq 0$, то для исследования полученного квадратного уравнения нужно рассмотреть еще три случая: $D = 0$, $D < 0$, $D > 0$ — и в каждом из них проверить, входят найденные корни в ОДЗ или нет. При $D = 0$ удобно использовать, что значение корня соответствующего квадратного уравнения совпадает с абсциссой вершины параболы $y = ax^2 - 5x + 4a$, то есть $x = x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2a}$. Рассматривая случай $D > 0$, следует помнить также предыдущее ограничение: $a \neq 0$.

Поскольку корни уравнения (1) записываются достаточно громоздкими формулами (см. решение), то вместо подстановки полученных корней в ограничение ОДЗ можно подставить «запрещенные» значения x в уравнение (1) и выяснить, при каких значениях параметра a мы получим те значения x, которые не входят в ОДЗ, а затем проверить полученные значения параметра.

Решение

ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq a$. На этой ОДЗ заданное уравнение равносильно уравнениям $ax^2 - x = 4x - 4a$,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \qquad (1)$$

1. Если $a = 0$, то из уравнения (1) получаем $x = 0$ — не входит в ОДЗ, следовательно, при $a = 0$ корней нет.
2. Если $a \neq 0$, то уравнение (1) — квадратное. Его дискриминант $D = 25 - 16a^2$. Рассмотрим три случая:

1) $D = 0$, то есть $25 - 16a^2 = 0$, $a = \pm\frac{5}{4}$. Тогда уравнение (1) имеет одно значение корня: $x = \frac{5}{2a}$. Если $a = \frac{5}{4}$, то корень $x = 2$ уравнения (1) входит в ОДЗ и является корнем заданного уравнения. Если $a = -\frac{5}{4}$, то корень $x = -2$ уравнения (1) тоже входит в ОДЗ и является корнем заданного уравнения.
2) $D < 0$, то есть $25 - 16a^2 < 0$, следовательно, $a < -\frac{5}{4}$ или $a > \frac{5}{4}$. Тогда уравнение (1) не имеет корней.
3) $D > 0$, то есть $25 - 16a^2 > 0$, следовательно, $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$, но $a \neq 0$. Тогда уравнение (1) имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a^2}}{2a}. \qquad (2)$$

Выясним, при каких значениях a найденные корни не входят в ОДЗ, то есть при каких значениях a получаем $x = 0$ и $x = a$.

Подставляя в уравнение (1) $x = 0$, получаем $a = 0$, но при $a = 0$ заданное уравнение не имеет корней.

Подставляя в уравнение (1) $x = a$, получаем $a^3 - 5a + 4a = 0$, то есть $a^3 - a = 0$, $a\,(a^2 - 1) = 0$. Тогда $a = 0$ (заданное уравнение не имеет корней), или $a = \pm 1$. Проверим эти значения a.

При $a = 1$ ОДЗ записывается так: $x \neq 0$, $x \neq 1$. Из формулы корней (2) имеем $x_1 = 4$ (входит в ОДЗ) и $x_2 = 1$ (не входит в ОДЗ). Следовательно, при $a = 1$ заданное уравнение имеет только один корень: $x = 4$.

При $a = -1$ ОДЗ записывается так: $x \neq 0$, $x \neq -1$, а из формулы корней (2) получим: $x_1 = -4$ (входит в ОДЗ) и $x_2 = -1$ (не входит в ОДЗ). Следовательно, при $a = -1$ заданное уравнение имеет только один корень: $x = -4$.

Таким образом, формулу корней (2) можно использовать, если $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$, только при $a \neq 0$ и $a \neq 1$.

Ответ: 1) если $a=\frac{5}{4}$, то $x = 2$; 2) если $a=-\frac{5}{4}$, то $x = -2$; 3) если $a = 1$, то $x = 4$; 4) если $a = -1$, то $x = -4$; 5) если $a\in\left(-\frac{5}{4};\ -1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\ \frac{5}{4}\right)$, то $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$; 6) если $a\in\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$ или $a = 0$, то корней нет. ◁

Замечание. Чтобы облегчить запись ответа в этом и аналогичных примерах, можно пользоваться таким приемом. *Перед записью ответа в сложных или громоздких случаях изобразим ось параметра (a) и отметим на ней все особые значения параметра, которые появились в процессе решения. Под осью параметра* (*левее от нее*) *выпишем все полученные решения* (*кроме решения «корней нет»*) *и напротив каждого ответа отметим, при каких значениях параметра этот ответ можно использовать* (рис. 54). *После этого ответ записывают для каждого из особых значений параметра и для каждого из полученных промежутков оси параметра.* В частности, перед записью ответа в рассмотренном примере удобно на черновике изобразить такую схему (рис. 54).

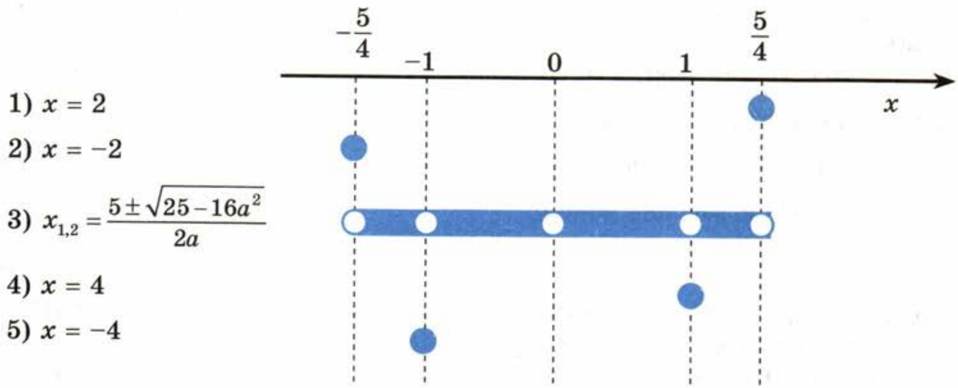


Рис. 54

7.2. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Некоторые исследовательские задачи с параметрами удается решить по такой схеме: 1) *решить заданное уравнение или неравенство;* 2) *исследовать полученное решение.*

Пример 1 Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$ имеет единственный корень.

Решение

▶ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ получаем равносильное уравнение

$$(x + a)(x - 5a) = 0.$$

Тогда $x + a = 0$ или $x - 5a = 0$. Получаем $x = -a$ или $x = 5a$. Учтем ОДЗ. Для этого выясним, когда $x = -7$: $-a = -7$ при $a = 7$, $5a = -7$ при $a = -\frac{7}{5}$. Тогда при $a = 7$ получаем: $x = -a = -7$ — посторонний корень; $x = 5a = 35$ — единственный корень. При $a = -\frac{7}{5}$ получаем: $x = 5a = -7$ — посторонний корень; $x = -a = \frac{7}{5}$ — единственный корень.

Также заданное уравнение будет иметь единственный корень, если $-a = 5a$, то есть при $a = 0$ (тогда $x = -a = 0$ и $x = 5a = 0 \neq -7$).

Ответ: $a = 7$, $a = -\frac{7}{5}$, $a = 0$. ◁

Комментарий

Поскольку дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, то на ОДЗ ($x + 7 \neq 0$) заданное уравнение равносильно уравнению $(x + a)(x - 5a) = 0$. Дальше учитываем, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю (а второй имеет смысл). После этого выясним, при каких значениях a найденные корни не входят в ОДЗ, то есть $x = -7$: приравниваем корни к -7 и находим соответствующие значения a. При найденных значениях a один из двух полученных корней будет посторонним ($x = -7$), и уравнение будет иметь единственный корень (одно значение корня). Кроме того, заданное уравнение будет иметь единственный корень еще и в том случае, когда два полученных корня ($x = -a$ и $x = 5a$) будут совпадать (и конечно, будут входить в ОДЗ).

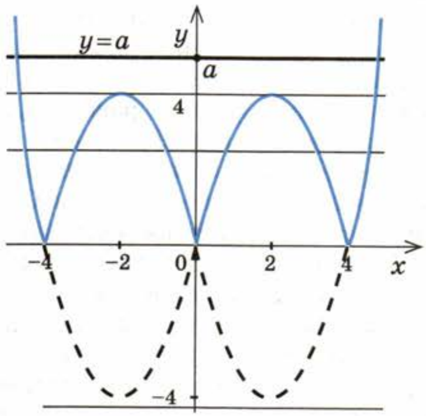
Исследование количества решений уравнений и их систем. При решении некоторых задач с параметрами можно пользоваться таким ориентиром: *если в задаче с параметрами речь идет о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа заданной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.*

Наиболее простым соответствующее исследование является в том случае, когда заданное уравнение можно преобразовать к виду $f(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a). Отметим, что, заменяя заданное уравнение на уравнение $f(x) = a$, нужно следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и заданное, а следовательно, и количество корней у них будет одинаковым. Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a. (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

Пример 2 Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 4|x|| = a$ в зависимости от значения параметра a?

Решение

Построим графики функций $y = |x^2 - 4|x||$ и $y = a$.



Анализируя взаимное размещение полученных графиков, получаем *ответ*:

1) при $a < 0$ уравнение корней не имеет;
2) при $a = 0$ уравнение имеет 3 корня;
3) при $0 < a < 4$ уравнение имеет 6 корней;
4) при $a = 4$ уравнение имеет 4 корня;
5) при $a > 4$ уравнение имеет 2 корня. ◁

Комментарий

Поскольку в этом задании речь идет о количестве решений уравнения, то для анализа заданной ситуации попробуем использовать графическую иллюстрацию решения.

1. Строим график функции $y = |x^2 - 4|x||$ (учитывая, что $x^2 = |x|^2$, построение может происходить, например, по таким этапам:
$$x^2 - 4x \to |x|^2 - 4|x| \to |x^2 - 4|x||).$$
2. Строим график функции $y = a$.
3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков и записываем ответ (количество корней уравнения $f(x) = a$ равно количеству точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$).

Отметим, что значительное количество исследовательских заданий не удается решить путем непосредственных вычислений (или такие вычисления являются очень громоздкими). Поэтому часто приходится сначала обосновывать какое-то свойство заданного уравнения или неравенства, а затем, пользуясь этим свойством, уже давать ответ на вопрос задачи.

Например, принимая во внимание четность функций, которые входят в запись заданного уравнения, можно использовать такой ориентир.

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является четной или нечетной, то вместе с каждым корнем α мы можем указать еще один корень этого уравнения $(-\alpha)$.

Пример 3 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 - a\,|\,x\,|^3 + a^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

Решение

▶ Функция $f(x) = x^4 - a\,|\,x\,|^3 + a^2 - 4$ является четной ($D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(-x) = f(x)$). Если $x = \alpha$ — корень уравнения (1), то $x = -\alpha$ тоже является корнем этого уравнения. Потому единственный корень у заданного уравнения может быть только тогда, когда $\alpha = -\alpha$, то есть $\alpha = 0$. Следовательно, единственным корнем заданного уравнения может быть только $x = 0$. Если $x = 0$, то из уравнения (1) получаем $a^2 - 4 = 0$, тогда $a = 2$ или $a = -2$. При $a = 2$ уравнения (1) превращается в уравнение $x^4 - 2\,|\,x\,|^3 = 0$. Тогда $|x|^4 - 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| - 2) = 0$. Получаем $|x|^3 = 0$ (тогда $|x| = 0$, то есть $x = 0$) или $|x| - 2 = 0$ (тогда $|x| = 2$, то есть $x = \pm 2$).
Следовательно, при $a = 2$ уравнение (1) имеет три корня и условие задачи не выполняется. При $a = -2$ уравнение (1) превращается в уравнение $x^4 + 2\,|x|^3 = 0$. Тогда $|x|^4 + 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| + 2) = 0$. Поскольку $|x| + 2 \neq 0$, то получаем $|x|^3 = 0$. Тогда $|x| = 0$, то есть $x = 0$ — единственный корень. Следовательно, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -2$. ◁

Комментарий

Замечаем, что в левой части заданного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир, приведенный выше. Действительно, если $x = \alpha$ — корень уравнения $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — правильное числовое равенство. Учитывая четность функции $f(x)$, имеем $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Следовательно, $x = -\alpha$ — тоже корень уравнения $f(x) = 0$. Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни α и $-\alpha$ совпадают. Тогда $x = \alpha = -\alpha = 0$.

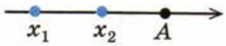
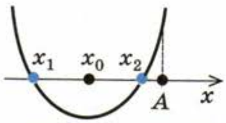
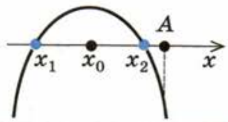
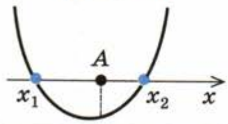
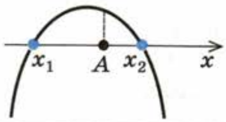
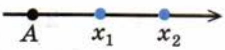
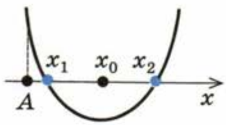
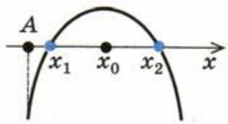
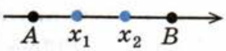
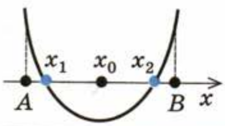
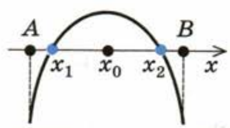
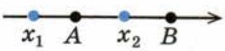
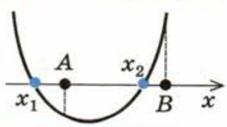
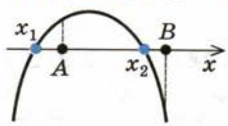
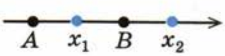
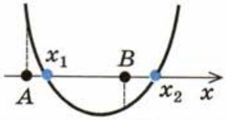
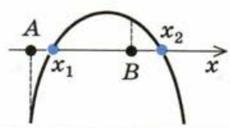
Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). (Это значения $a = 2$ и $a = -2$.)

Поскольку значения $a = 2$ и $a = -2$ мы получили из условия, что $x = 0$ — корень уравнения (1), то необходимо проверить, на самом ли деле при этих значениях a заданное уравнение будет иметь единственный корень. При решении полученных уравнений целесообразно использовать, что $x^4 = |\,x\,|^4$.

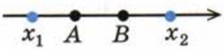
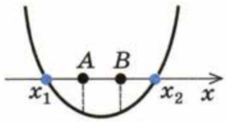
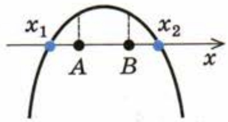
7.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСЛОВИЙ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННЫХ ЧИСЕЛ *A* и *B*

Решение некоторых исследовательских задач с параметрами можно свести к использованию необходимых и достаточных условий расположения корней квадратного трехчлена. Основные из этих условий приведены в таблице 13 (в таблице использованы традиционные обозначения: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$).

Таблица 13

Расположение корней	Необходимые и достаточные условия расположения корней		
	при $a > 0$	при $a < 0$	в общем случае ($a \neq 0$)
1. $x_1 < A$; $x_2 < A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 < A$; 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 < A$; 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < A \end{cases}$
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
3. $x_1 > A$; $x_2 > A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$; 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$; 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > A \end{cases}$
4. $A < x_1 < B$; $A < x_2 < B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$
5. $x_1 < A$; $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
6. $A < x_1 < B$; $x_2 > B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Продолж. табл. 13

Расположение корней	Необходимые и достаточные условия расположения корней		
	при $a > 0$	при $a < 0$	в общем случае ($a \neq 0$)
7. $x_1 < A$; $x_2 > B$ 	$f(A) < 0; f(B) < 0$ 	$f(A) > 0; f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Объяснение и обоснование

Приведенные условия имеют достаточно простую графическую иллюстрацию, которая опирается на тот факт, что график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ — сплошная (неразрывная[1]) линия. Если такая функция на концах какого-то промежутка принимает значения с разными знаками (то есть соответствующие точки графика находятся в разных полуплоскостях относительно оси Ox), то внутри этого промежутка есть хотя бы одна точка, в которой функция равна нулю (рис. 55).

Например, *два различных корня квадратного трехчлена* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *при* $a > 0$ *будут расположены по разные стороны от заданного числа* A *тогда и только тогда, когда выполняется только одно условие* — $f(A) < 0$ (рис. 56).

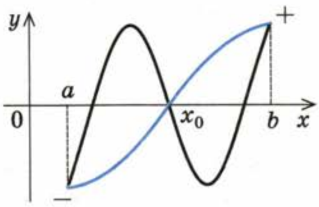


Рис. 55

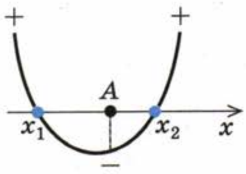


Рис. 56

Докажем это утверждение аналитически.

Корни заданного квадратного трехчлена $f(x)$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (*), где по условию $a > 0$, следовательно, $a \neq 0$.

1) Пусть уравнение (*) имеет корни x_1 и x_2, такие, что число A находится между этими корнями (и через x_1 обозначен меньший корень), то есть $x_1 < A$ и $x_2 > A$. Тогда $A - x_1 > 0$ и $A - x_2 < 0$ (следовательно, числа $A - x_1$ и $A - x_2$ имеют разные знаки), поэтому $(A - x_1)(A - x_2) < 0$, то есть

[1] Более строго соответствующее свойство будет обосновано в 11 классе при рассмотрении так называемых непрерывных функций.

$A^2 - (x_1 + x_2)A + x_1 x_2 < 0$. В силу теоремы Виета для уравнения (*) имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ и из последнего неравенства получаем: $A^2 + \frac{b}{a}A + \frac{c}{a} < 0$. Учитывая, что $a > 0$, имеем $aA^2 + bA + c < 0$, то есть $f(A) < 0$.

2) Пусть выполняется условие $f(A) < 0$ (**). Покажем, что тогда уравнение (*) будет иметь корни, расположенные по разные стороны от числа A. Для этого используем метод доказательства от противного.

Пусть уравнение (*) имеет корни x_1 и x_2.

Если один из корней совпадает с числом A, то $f(A) = 0$, что противоречит условию (**).

Если оба корня находятся по одну сторону от числа A, то $x_1 < A$ и $x_2 < A$ или $x_1 > A$ и $x_2 > A$, но тогда числа $A - x_1$ и $A - x_2$ имеют одинаковые знаки и $(A - x_1)(A - x_2) > 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в пункте 1, получаем при $a > 0$ неравенство $aA^2 + bA + c > 0$, то есть $f(A) > 0$, что противоречит условию (**).

Если предположить, что уравнение (*) не имеет корней (или его корни совпадают), то его дискриминант $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$. Но $f(A) = aA^2 + bA + c$, следовательно, дискриминант квадратного трехчлена $f(A)$ тоже неположительный и при $a > 0$ $f(A) \geqslant 0$ при всех значениях A, что противоречит условию (**). Таким образом, при условии $f(A) < 0$ квадратный трехчлен $f(x)$ всегда имеет два различных корня, которые располагаются по разные стороны от числа A.

Следовательно, при $a > 0$ условие $f(A) < 0$ необходимое и достаточное для того, чтобы два различных корня квадратного трехчлена были расположены по разные стороны от заданного числа A.

Аналогичные рассуждения при $a < 0$ показывают, что для выполнения этого требования необходимо и достаточно, чтобы $f(A) > 0$. Эти два условия можно объединить в одно: $a \cdot f(A) < 0$.

Действительно, $a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$ Следовательно,

квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) имеет два различных корня, которые расположены по разные стороны от заданного числа A, тогда и только тогда, когда выполняется условие $a \cdot f(A) < 0$.

Аналогично можно обосновать и другие условия, приведенные в таблице 13.

Заметим, что приведенные условия не обязательно запоминать: для их записи (но не для доказательства) можно пользоваться графиком квадратичной функции (изображенным для нужного расположения корней) и таким ориентиром.

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) были расположены заданным образом относительно данных чисел A и B, необходимо и достаточно выполнения системы условий, которая включает:

1) *знак коэффициента при старшем члене;*

2) *знаки значений* $f(A)$ *и* $f(B)$;

3) *знак дискриминанта* D;

4) *положение абсциссы вершины параболы* $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$ *относительно данных чисел* A *и* B.

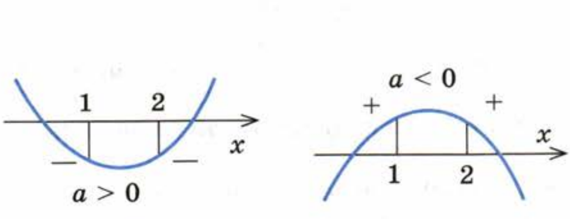
Отметим, что для случаев, в которых хотя бы одно из данных чисел расположено между корнями квадратного трехчлена (см. вторую, пятую, шестую и седьмую строки табл. 13), достаточно выполнения первых двух условий этого ориентира, а для других случаев приходится рассматривать все четыре условия. Заметим также, что, записывая каждое из указанных условий, следует выяснить, будет ли выполняться требование задачи в том случае, когда в этом условии будет записан знак нестрогого неравенства.

Пример 1 Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $ax^2 - x + 3a = 0$ имеет один корень больше двух, а второй — меньше единицы.

Комментарий

Поскольку заданное уравнение имеет два различных корня, то оно квадратное (то есть $a \neq 0$). Тогда $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-12a^2}}{2a}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-12a^2}}{2a}$ и, чтобы получить ответ на вопрос задачи, достаточно решить совокупность из двух систем иррациональных неравенств: $\begin{cases} x_1 > 2, \\ x_2 < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 < 1, \\ x_2 > 2. \end{cases}$ Но такой путь решения достаточно громоздкий.

Попробуем воспользоваться условиями расположения корней квадратного трехчлена. Для этого можно непосредственно использовать соответствующие условия, зафиксированные в таблице 13, или получить их с помощью предложенного ориентира. В частности, обозначим $f(x) = ax^2 - x + 3a$ и изобразим график квадратичной функции $f(x)$ (параболу) в таких положениях, которые удовлетворяют условию задачи (рис. 57, *а*, *б*).



а *б*

Рис. 57

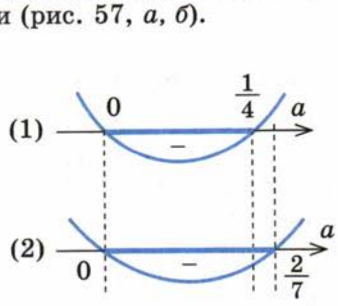


Рис. 58

Для того чтобы корни квадратного трехчлена располагались по разные стороны от чисел 1 и 2, необходимо и достаточно выполнения совокупности условий: $\begin{cases} a > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ f(1) > 0, \\ f(2) > 0. \end{cases}$ Замечаем, что в этих системах знаки a и $f(1)$, а также a и $f(2)$ противоположны, поэтому полученную совокупность систем можно заменить одной равносильной системой $\begin{cases} a\,f(1) < 0, \\ a\,f(2) < 0, \end{cases}$ которая и позволяет получить план решения задачи.

Решение

▶ Поскольку заданное уравнение имеет два различных корня, то оно является квадратным (то есть $a \neq 0$). Обозначим $f(x) = ax^2 - x + 3a$. Как известно, корни квадратного трехчлена будут располагаться по разные стороны от данных чисел 1 и 2 тогда и только тогда, когда выполняется система условий: $\begin{cases} a\,f(1) < 0, \\ a\,f(2) < 0. \end{cases}$

Получаем систему $\begin{cases} a(4a-1) < 0, & (1) \\ a(7a-2) < 0. & (2) \end{cases}$

Решаем неравенства (1) и (2) и находим общее решение системы (рис. 58).

Ответ: заданное уравнение имеет один корень больше двух, а второй меньше единицы при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. ◁

Упражнения

Решите уравнения и неравенства с переменной x (1–3).

1. 1) $5ax - a = ax + a$; 2) $4 - ax = 2x + 7a$;
3) $ax + 7a \leqslant ax + 8a$; 4) $2a - 6x > 2ax + 11$.

2. 1) $|x-2| + |x+1| = ax + 3$; 2) $|x-a| + |x| = 2$; 3) $|a-x| + |x+a+1| = 1$.

3. 1) $ax + 1 = \frac{9a+3}{x}$; 2) $2ax - 1 = \frac{4a-1}{x-1}$; 3) $\frac{ax+1}{x+a} = \frac{2}{x}$.

4. Найдите все значения a, при которых заданное уравнение имеет единственный корень: 1) $\frac{(x-a)(x-2a)}{x-4} = 0$; 2) $\frac{(x+2a)(x-6a)}{x+12} = 0$.

5. Найдите все значения a, при которых заданное уравнение имеет единственный корень: 1) $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$; 2) $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$.

6 (ВШЭ*). Для каждого значения параметра b найдите число корней уравнения $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$.

7 (СПбУЭФ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 2ax| = 1$ имеет ровно три различных корня.

8 (МГСУ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 + 2x + a| = 2$ имеет четыре различных корня.

---

* Список принятых сокращений приведен на с. 475.

9 (МГУЛ). Выясните, существует ли наибольшее значение параметра k, при котором оба корня уравнения $x^2 + (2k + 6)\,x + 4k + 12 = 0$ больше -1. Если такое значение параметра существует, то укажите его.

10 (СПбУЭФ). Найдите все значения параметра m, для которых уравнение $(m-2)\,x^2 - 2(m+3)\,x + 4m = 0$ имеет один корень больше 3, а второй меньше 2.

§ 8. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

При решении математических задач иногда возникает потребность обосновать, что определенное свойство выполняется для произвольного натурального числа n.

Проверить данное свойство для каждого натурального числа мы не можем — их количество бесконечно. Приходится рассуждать так: 1) я могу проверить, что это свойство выполняется при $n = 1$; 2) я могу обосновать: если рассматриваемое свойство выполняется для некоторого значения n, то оно выполняется и для следующего значения. Таким образом, свойство будет выполняться для каждого следующего числа, начиная с единицы, то есть для всех натуральных чисел.

Такой способ рассуждений при доказательстве математических утверждений называется *методом математической индукции*. Он является одним из универсальных методов доказательства математических утверждений, в которых содержатся слова «для любого натурального n» (возможно, не сформулированные явно). Доказательство с помощью этого метода всегда состоит из двух этапов:

1) *начало индукции*: проверяется, выполняется ли рассматриваемое утверждение при $n = 1$;
2) *индуктивный переход*: доказывается, что если данное утверждение выполняется для k, то оно выполняется и для $k + 1$.

Таким образом, начав с $n = 1$, мы на основании доказанного индуктивного перехода получаем, что сформулированное утверждение справедливо и для $n = 2, 3, \ldots$, то есть для любого натурального n.

На практике этот метод удобно применять по схеме, приведенной в таблице 14.

Таблица 14

Схема доказательства утверждений с помощью метода математической индукции	Пример
1. *Проверяем*, выполняется ли данное утверждение при $n = 1$ (иногда начинают с $n = p$).	Докажите, что для любого натурального n: $$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$ ▶ Для удобства записи обозначим $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)$. 1. При $n = 1$ равенство выполняется: $$1\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3,$$ то есть $2 = 2$.

Продолж. табл. 14

Схема доказательства утверждений с помощью метода математической индукции	Пример
2. *Предполагаем*, что заданное утверждение справедливо при $n = k$, где $k \geqslant 1$ (другой вариант — при всех $n \leqslant k$). 3. *Доказываем* (опираясь на предположение) справедливость нашего утверждения и при $n = k + 1$. 4. *Делаем вывод*, что данное утверждение справедливо для любого натурального числа n (для любого $n \geqslant p$).	2. Предполагаем, что заданное равенство верно при $n = k$, где $k \geqslant 1$, то есть $S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$ (1) 3. Докажем, что равенство выполняется и при $n = k + 1$, то есть докажем, что $S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$ Учитывая, что $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, и подставляя S_k из равенства (1), получаем $S_{k+1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$ что и требовалось доказать. 4. Итак, заданное равенство верно для любого натурального n. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите, что $10^n - 9n - 1$ делится на 81 при любом натуральном n.

Комментарий

Поскольку утверждение необходимо доказать для любого натурального n, то используем метод математической индукции по схеме, приведенной в таблице 14. При выполнении индуктивного перехода (от $n = k$ к $n = k + 1$) представим выражение, полученное при $n = k + 1$, как сумму двух выражений: того, что получили при $n = k$, и еще одного выражения, которое делится на 81.

Доказательство

1. ▶Проверяем, выполняется ли данное утверждение при $n = 1$. Если $n = 1$, данное выражение равно 0, то есть делится на 81. Таким образом, данное свойство выполняется при $n = 1$.
2. Предполагаем, что данное утверждение выполняется при $n = k$, то есть что $10^k - 9k - 1$ делится на 81.

3. Докажем, что данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$, то есть что $10^{k+1} - 9(k+1) - 1$ делится на 81.
$10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k$.
Выражение в скобках — это значение заданного выражения при $n = k$, которое по предположению индукции делится на 81. Следовательно, каждое слагаемое последней суммы делится на 81, тогда и вся сумма, то есть $10^{k+1} - 9(k+1) - 1$, делится на 81. Таким образом, данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$.
4. Следовательно, $10^n - 9n - 1$ делится на 81 при любом натуральном n. ◁

Задача 2 Докажите, что $2^n > 2n + 1$, если $n \geqslant 3$, $n \in N$.

Комментарий

Поскольку утверждение должно выполняться, начиная с $n = 3$, то проверку проводим именно для этого числа. Записывая предположение индукции, удобно воспользоваться тем, что по определению понятия «больше» $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$. Доказывая неравенство при $n = k + 1$, снова используем то же определение и доказываем, что разность между его левой и правой частями положительна.

Доказательство

1. При $n = 3$ получаем $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, то есть $8 > 7$ — верное неравенство. Таким образом, при $n = 3$ данное неравенство выполняется.
2. Предполагаем, что данное неравенство выполняется при $n = k$ (где $k \geqslant 3$):
$$2^k > 2k + 1, \text{ то есть}$$
$$2^k - 2k - 1 > 0. \qquad (1)$$
3. Докажем, что данное неравенство выполняется и при $n = k + 1$, то есть докажем, что $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.
Рассмотрим разность: $2^{k+1} - (2(k+1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 =$
$= 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$
(поскольку выражение в скобках по неравенству (1) положительно и при $k \geqslant 3$ выражение $2k - 1$ также положительно). Следовательно, $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$, то есть данное неравенство выполняется и при $n = k + 1$.
4. Итак, данное неравенство выполняется при всех натуральных $n \geqslant 3$.

Упражнения

Докажите с помощью метода математической индукции **(1–12)**.

1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ при всех натуральных n ($n \in N$).

2. $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, где $n \in N$.

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, где $n \in N$.

4. $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, где $n \in N$.

5. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначается $n!$ (читается: «n факториал»). Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, где $n \in N$.

6. $4^n > 7n - 5$, если $n \in N$.

7. $2^n > n^3$, если $n \geqslant 10$.

8. Докажите, что $9^n - 8n - 1$ делится на 16 при любом натуральном n.

9. Докажите, что $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$ делится на 8 при любом натуральном n.

10. Докажите, что $7^n + 3^n - 2$ делится на 8 при любом натуральном n.

11. Докажите, что $2^{3n+3} - 7n + 41$ делится на 49 при любом натуральном n.

12. Докажите, что когда $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, то $a_n = 3^n - 1$, где $n \in N$.

§ 9. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ m. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Таблица 15

Делимость целых чисел и признаки делимости	
Делимость целых чисел	
Определение	Пример
Целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое c, что $a = bc$. Делимость можно обозначать так: $a \vdots b$ (читается a делится на b)	$24 \vdots 8$, поскольку существует такое целое число 3, что $24 = 8 \cdot 3$
Свойства	
1. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$ (транзитивность делимости)	$48 \vdots 12$ и $12 \vdots 6$, следовательно, $48 \vdots 6$
2. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, m и n — любые целые числа, то $(ma + nb) \vdots c$ Частный случай ($m = 1$, $n = \pm 1$). Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$ Если каждое из чисел делится на c, то их сумма или разность тоже делится на c	$77 \vdots 11$ и $22 \vdots 11$, тогда $77 + 22 = 99 \vdots 11$; $77 - 22 = 55 \vdots 11$
3. Если $a \vdots b$ и $k \neq 0$, то $ak \vdots (bk)$	$6 \vdots 3$, тогда $(6 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$, то есть $30 \vdots 15$
4. Если $a \vdots b$ и $a \vdots c$, причем b и c — взаимно простые числа (то есть их наибольший общий делитель — НОД равен единице), то $a \vdots (bc)$	48 делится на 3 и на 8 (3 и 8 — взаимно простые числа), тогда 48 делится на $3 \cdot 8 = 24$

Продолж. табл. 15

Признаки делимости		
На какое число делим	Признак	**Пример**
На 2	***Последняя цифра числа делится на 2*** **(четная).** **Целое число n, которое делится на 2, называют *четным*, и его можно представить в виде $n = 2k$, где $k \in \mathbf{Z}$.** **Целое число n, которое не делится на 2, называют *нечетным*, и его можно представить в виде $n = 2k + 1$, где $k \in \mathbf{Z}$**	**$956 \vdots 2$, поскольку последняя цифра 6 — четная ($6 \vdots 2$); $453 \not\vdots 2$, поскольку последняя цифра 3 — нечетная**
На 5	***Последняя цифра числа равна 0 или 5***	**$375 \vdots 5$; $8500 \vdots 5$**
На 10^k	***Число заканчивается на k нулей***	**$482\ 900\ 000 \vdots 10^5$**
На 4	***Число, выраженное двумя последними цифрами заданного числа, делится на 4***	**$35724 \vdots 4$, поскольку $24 \vdots 4$**
На 8	***Число, выраженное тремя последними цифрами заданного числа, делится на 8***	**$17328 \vdots 8$, поскольку $328 \vdots 8$**
На 3	***Сумма цифр числа делится на 3***	**$9822 \vdots 3$, поскольку $9 + 8 + 2 + 2 = 21 \vdots 3$**
На 9	***Сумма цифр числа делится на 9***	**$15732 \vdots 9$, поскольку $1 + 5 + 7 + 3 + 2 = 18 \vdots 9$**
На 11	***Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11***	**$4836271 \vdots 11$, поскольку $(1 + 2 + 3 + 4) - (7 + 6 + 8) = -11 \vdots 11$**
Простые и составные числа		
Натуральное число p называют простым, если у него только два натуральных делителя — 1 и само число p		**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... — простые числа**
Натуральное число называют составным, если оно имеет больше двух натуральных делителей		**6, 15, 130, 998 — составные числа (например, 6, кроме делителей 1 и 6, еще имеет делители 2 и 3)**
1 не является ни простым числом, ни составным		

Продолж. табл. 15

Свойства простых делителей натуральных чисел
1. Всякое натуральное число (большее единицы) или делится на данное простое число p, или является взаимно простым с ним.
2. Если произведение нескольких множителей делится на простое число p, то по меньшей мере один из множителей делится на p.

Основная теорема арифметики

Формулировка	Пример
Любое натуральное число, большее единицы, можно разложить на произведение простых чисел, причем это разложение единственное с точностью до порядка множителей: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m$, где p_1, p_2, ..., p_m — простые числа. Запись $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ называется *каноническим разложением* числа a (p_1, p_2, ..., p_k — различные простые числа, α_1, α_2, ..., α_k — натуральные)	$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; $792 = 2 \cdot 2 \times$ $\times 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 =$ $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^1$

Запись произвольного делителя числа a через простые делители

Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a, то *натуральными делителями числа a* будут только числа $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ..., $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$. *Количество всех делителей числа a равно* $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \ldots (\alpha_k+1)$	$45 = 3^2 \cdot 5^1$. Любой натуральный делитель числа 45: $d = 3^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 1$. Количество всех делителей числа 45: $(2+1)(1+1) = 6$.

β_1	0	0	1	1	2	2
β_2	0	1	0	1	0	1
d	1	5	3	15	9	45

НОД и НОК двух чисел. Взаимно простые числа

Определение	Пример
Наибольшее из натуральных чисел, являющихся одновременно делителями натуральных чисел a и b, называют *наибольшим общим делителем* (НОД) чисел a и b.	НОД (36; 12) = 12; НОД (45; 60) = 15
Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из натуральных чисел a и b, называют *наименьшим общим кратным* (НОК) чисел a и b.	НОК (36; 12) = 36; НОК (45; 60) = 180
Два натуральных числа называют *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.	НОД (8; 39) = 1, следовательно, числа 8 и 39 взаимно простые

Продолж. табл. 15

Связь между наибольшим общим делителем (НОД) и наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральних чисел	
Произведение НОД и НОК двух натуральных чисел равно произведению этих чисел	**НОД $(a; b) \cdot$ НОК $(a; b) = ab$**

Деление с остатком	
Определение	Пример
Разделить с остатком целое число a на отличное от нуля целое число b — это значит найти два таких целых числа q и r, что $$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < \lvert b \rvert$$ **(q называют неполным частным, r — остатком от деления a на b).** *Для любой пары целых чисел a и b (где $b \neq 0$) неполное частное q и остаток r находятся однозначно.*	**При делении 56 на 6 – неполное частное $q = 9$ и остаток $r = 2$, так как $56 = 6 \cdot 9 + 2$; при делении (-56) на 6 — неполное частное $q = -10$ и остаток $r = 4$, так как $-56 = 6 \cdot (-10) + 4$ (остаток не бывает отрицательным!).**
Если при делении a на b остаток $r = 0$, то это значит, что a делится на b ($a \vdots b$).	

Сравнения по модулю m ($m \geqslant 2$)	
Определение	Пример
Целые числа a и b называют *сравнимыми по модулю m*, если они дают одинаковые остатки при делении на m: $$a = mq_1 + r \text{ и } b = mq_2 + r, \text{ где } 0 \leqslant r < m.$$ **Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$ (читают так: «a сравнимо с b по модулю m»). Знак $\equiv$ называют знаком сравнения.**	**$103 \equiv 53 \pmod{10}$, поскольку 103 и 53 дают одинаковые остатки (3) при делении на 10**

Утверждения, эквивалентные определению сравнения	
Целые числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда разность $a - b$ делится на m.	**$8 \equiv -1 \pmod{9}$, так как разность $8 - (-1) = 9$ делится на 9**
Целые числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда выполняется равенство $a = b + mt$, $t \in \mathbf{Z}$.	**$30 \equiv 16 \pmod{7}$, так как $30 = 16 + 7 \cdot 2$**

Продолж. табл. 15

Основные свойства сравнений
1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$. 2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то: а) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$; б) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$; в) $ac \equiv bd \pmod{m}$. Следствия 1) если $a + c \equiv b \pmod{m}$, то $a \equiv b - c \pmod{m}$; 2) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + mk \equiv b \pmod{m}$; 3) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. 4. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен n-й степени относительно переменной x с целыми коэффициентами. Тогда если $a \equiv b \pmod{m}$, то $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$. В общем случае: **если заданное числовое выражение содержит только суммы, произведения и степени целых чисел и вместо соответствующих слагаемых, множителей и оснований степеней подставить числа, сравнимые с заданными по модулю m, то получим число, сравнимое по модулю m с заданным выражением.**
5. Если $ak \equiv bk \pmod{m}$ и числа k и m взаимно простые, то $a \equiv b \pmod{m}$.

Объяснение и обоснование

1. Делимость целых чисел. Говорят, что целое число a *делится* (нацело) на целое число b (где $b \neq 0$), если существует такое целое число c, что справедливо равенство $a = bc$.

Часто утверждение «*a делится* на b» записывают так «$a \vdots b$».

Числа b и c называют *делителями* числа a (а число a называют *кратным* числам b и c). Например, поскольку $6 = 1 \cdot 6 = (-1) \cdot (-6) = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3)$, то делителями целого числа 6 являются целые числа: 1; −1; 2; −2; 3; −3; 6; −6 (и следовательно, целое число 6 кратно этим числам).

Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из натуральных чисел a и b, называют *наименьшим общим кратным* (НОК) чисел a и b.

Наибольшее из натуральных чисел, являющихся одновременно делителями натуральных чисел a и b, называют *наибольшим общим делителем* (НОД) чисел a и b.

Например, для чисел $a = 40$ и $b = 24$ их НОД равен 8, а НОК равен 120.

Два натуральных числа называют *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1. Например, числа 6 и 55 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 6 являются числа 1, 2, 3, 6, а натуральными делителями числа 55 являются числа 1, 5, 11, 55, то есть НОД (6; 55) = 1.

Для решения задач приходится использовать *свойства делимости* целых чисел, которые приведены в таблице 15.

Рассмотрим, например, доказательство свойства 2:

если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, m и n — любые целые числа, то $(ma + nb) \vdots c$.

Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a = ca_1$ и $b = cb_1$, где a_1 и b_1 – целые числа. Тогда

$$ma + nb = mca_1 + ncb_1 = c\,(ma_1 + nb_1) \vdots c.$$

В частности, при $m = 1$, $n = \pm 1$ получаем: если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$, то есть

если каждое из чисел делится на c, то их сумма или разность тоже делится на c.

Рассматривая только натуральные целые числа, можно отметить, что у каждого натурального числа $a > 1$ есть два натуральных делителя: 1 и a. Если у натурального числа $a > 1$ нет других натуральных делителей, кроме 1 и a, то это число называют *простым*. Если у натурального числа $a > 1$ есть натуральные делители, отличные от 1 и a, то это число называют *составным*. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Справедлива *основная теорема арифметики*.

Теорема. **Любое натуральное число, большее единицы, можно разложить на произведение простых чисел, причем это разложение[1] единственное с точностью до порядка множителей:**

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m$, где p_1, p_2, ..., p_m — простые числа.

Например, $35 = 5 \cdot 7$, $17 = 17$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$.

Запись $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ называют *каноническим разложением* числа a (p_1, p_2, ..., p_k — различные простые числа, α_1, α_2, ..., α_k — натуральные числа).

Заметим, что если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a, то число a может делиться только на такое натуральное число d, в каноническом разложении которого на простые множители нет других простых множителей, кроме p_1, p_2, ..., p_k, и степени соответствующих простых множителей не могут превышать соответствующую степень в каноническом разложении числа a. Поэтому *натуральными делителями числа a* будут только числа

$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ... , $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

Если $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$ и β_1 — целое число, то β_1 может принимать всего $\alpha_1 + 1$ значений ($\beta_1 = 0; 1; 2; ...; \alpha_1$). Аналогично β_2 может принимать всего $\alpha_2 + 1$ значений, ..., β_k может принимать всего $\alpha_k + 1$ значений. Поэтому *количество всех делителей числа a равно* $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ (см. пример в табл. 15).

Отметим, что каноническое разложение чисел на простые множители может использоваться для нахождения НОД и НОК двух натуральных чисел.

[1] Если заданное число простое, то получаем разложение, состоящее только из одного числа.

Покажем это на примере нахождения НОД и НОК чисел 280 и 300.

1) Запишем канонические разложения данных чисел на простые множители: $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.
2) Запишем получившиеся разложения так, чтобы формально у них были одинаковые простые множители (если в разложении первого числа нет множителя 3, то допишем его формально в виде множителя $3^0 = 1$, а в разложении второго числа запишем множитель $7^0 = 1$). Получаем: $280 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, $300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0$.
3) Теперь НОД и НОК данных чисел можно записать как произведение степеней полученных простых чисел (2; 3; 5 и 7), причем при записи НОД каждый множитель берется с наименьшим показателем, а при записи НОК — с наибольшим. Получаем:
НОД $(280; 300) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 20$, НОК $(280; 300) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 4200$.

Заметим, что если найти произведение НОД и НОК заданных чисел, то в полученном произведении будут использованы все множители, входящие в разложение первого числа, и все множители, входящие в разложение второго числа, в результате получим произведение заданных чисел:

$$\text{НОД}\,(280; 300) \cdot \text{НОК}\,(280; 300) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 =$$
$$= (2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0) = 280 \cdot 300.$$

В общем случае

произведение НОД и НОК двух натуральных чисел равно произведению этих чисел: НОД $(a; b)$ · НОК $(a; b) = ab$.

2. Деление целых чисел с остатком. Разделить с остатком целое число a на отличное от нуля целое число b — это значит найти два таких целых числа q и r, что

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < |b|.$$

При этом число q называют неполным частным, число r — остатком. Подчеркнем, что в этом определении r — число неотрицательное.

Если $r = 0$, то говорят, что число a делится на b нацело, и тогда q называют полным частным (или просто «частным»), а число b — делителем числа a.

Для любой пары целых чисел a и b (где $b \neq 0$) неполное частное q и остаток r находятся однозначно (обоснуйте это самостоятельно). Например, при делении 42 на 5 — неполное частное $q = 8$ и остаток $r = 2$, так как $42 = 5 \cdot 8 + 2$; а при делении (-42) на 5 — неполное частное $q = -9$ и остаток $r = 3$, так как $-42 = 5 \cdot (-9) + 3$ (еще раз напомним, что остаток не бывает отрицательным).

При делении целого числа a на натуральное число m может получиться только m остатков: 0, 1, 2, 3, ..., $m - 1$. Поэтому множество $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел можно разбить на m непересекающихся классов K_r, где в класс K_r входят те и только те целые числа, которые при делении на m дают остаток r ($r = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$).

Такое разбиение обычно называют разбиением целых чисел на классы по модулю m.

Заметим, что если к обеим частям равенства $a = mq + r$ (где $0 \leqslant r < m$) прибавить m (или из обеих частей вычесть m), то получим $a \pm m = mq + r \pm \pm m = m(q \pm 1) + r$. Это равенство показывает, что

если к заданному числу а прибавить (или из него вычесть) модуль m (или число, кратное m), то остаток при делении на m не изменится. *При разбиении целых чисел на классы по модулю m в один класс будут попадать только числа, отличающиеся друг от друга на число, кратное модулю m* (обоснуйте это самостоятельно).

Например, если $m = 3$, то при делении на 3 получаем только остатки 0; 1; 2, и поэтому все целые числа можно разбить на следующие 3 класса по модулю 3:

Класс	K_0	K_1	K_2
Числа	… -6 -3 0 3 6 …	… -5 -2 1 4 7 …	… -4 -1 2 5 8 …
Общая формула	$a = 3k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$a = 3k + 1,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$a = 3k + 2,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Рассматривая несколько последовательных целых чисел, замечаем, что при увеличении числа из некоторого класса на единицу мы всегда получаем число, которое находится в следующем классе (для класса K_2 будем считать следующим классом класс K_0).

Разбиение целых чисел на классы по модулю m часто применяют при решении задач.

Например, чтобы доказать, что ***из m последовательных целых чисел одно обязательно делится на m***, достаточно разбить все целые числа на m классов по модулю m. Поскольку разность любых двух заданных чисел меньше m, то числа попадают в разные классы, а так как число классов m и количество чисел тоже m, следовательно, в каждом классе будет по одному числу. Но тогда одно из заданных чисел попадает в класс K_0 и будет давать остаток 0 при делении на m, то есть будет делиться на m.

3. Сравнения по модулю *m*. Указанный выше прием разбиения множества целых чисел на классы может быть описан с помощью специального понятия: сравнения по модулю m.

Пусть m — данное натуральное число ($m \geqslant 2$). **Целые числа *a* и *b* называют *сравнимыми по модулю m*, если они дают одинаковые остатки при делении на *m*.**

Таким образом, целые числа a и b сравнимы по модулю m, если $a = mq_1 + r$ и $b = mq_2 + r$, где $0 \leqslant r < m$, то есть каждое из чисел a и b при делении на m дает один и тот же остаток r. Отсюда получаем, что *целые числа*

a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда разность $a - b$ при делении на m дает остаток 0 (делится на m).

Учитывая, что если $a - b$ делится на m, то существует такое целое число t, что $a - b = mt$ и тогда $a = b + mt$. Следовательно, *целые числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда выполняется равенство $a = b + mt$.*

Для обозначения того, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, используют запись: $a \equiv b \pmod{m}$, что читают так: «a сравнимо с b по модулю m». Знак $\equiv$ называют знаком сравнения.

Например, $27 \equiv 12 \pmod{5}$, так как числа 27 и 12 дают одинаковые остатки (2) при делении на 5;

$10 \equiv -1 \pmod{11}$, так как разность $10 - (-1) = 11$ делится на 11.

Основные *свойства* сравнений похожи на свойства равенств. Сформулируем некоторые из них.

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то: а) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$; б) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$; в) $ac \equiv bd \pmod{m}$, то есть *сравнения по одному модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать.*
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
4. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен n-й степени относительно переменной x с целыми коэффициентами. Тогда если $a \equiv b \pmod{m}$, то $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

Свойство 4 можно обобщить: *если заданное числовое выражение содержит только суммы, произведения и степени целых чисел и вместо соответствующих слагаемых, множителей и оснований степеней подставить числа, сравнимые с заданными по модулю m, то получим число, сравнимое по модулю m с заданным выражением.*

Докажем, например, что сравнения по одному модулю можно почленно складывать.

● Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a = b + mt_1$ и $c = d + mt_2$. Складывая почленно последние равенства, получаем: $a + c = b + d + m(t_1 + t_2)$. Но последнее равенство и означает, что $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. ○

Укажем несколько следствий из приведенных свойств.

Например, если задано сравнение $a + c \equiv b \pmod{m}$, то складывая почленно это сравнение с верным сравнением $-c \equiv -c \pmod{m}$, получаем: $a \equiv b - c \pmod{m}$. Следовательно, *члены сравнения можно переносить из одной части сравнения в другую с противоположным знаком.*

Если сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ почленно сложить с верным сравнением $mk \equiv 0 \pmod{m}$, получаем $a + mk \equiv b \pmod{m}$. Следовательно, *к любой части сравнения можно прибавить (или из нее вычесть) любое число, кратное модулю.*

Если сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ почленно умножить на верное сравнение $c \equiv c \pmod{m}$, получаем $ac \equiv bc \pmod{m}$. Следовательно, *обе части сравнения можно умножать на любое целое число.*

Заметим, что для получения правильного сравнения по данному модулю m делить обе части сравнения можно только на число, взаимно простое с модулем m, то есть имеет место *свойство*:

5. Если $ak \equiv bk \pmod{m}$ и числа k и m взаимно простые, то $a \equiv b \pmod{m}$.

Если $ak \equiv bk \pmod{m}$, то $ak - bk = k\,(a - b)$ делится на m. Но k и m — взаимно простые числа (и $m \neq 1$), следовательно, $a - b$ делится на m. А это и означает, что $a \equiv b \pmod{m}$.

Рассмотрим применение свойств сравнений к доказательству признаков делимости, приведенных в таблице 15.

Пусть задано натуральное число N, записанное в десятичной системе счисления так[1]:

$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$. Тогда

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n. \qquad (1)$$

Так как $10 \equiv 1$ (mod 3 или 9), то по обобщенному свойству 4: $N \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (mod 3 или 9). Поскольку $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ — сумма цифр числа N, то получаем, что число N и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3 (или на 9). В частности, если сумма цифр делится на 3 (или на 9), то и само число N делится на 3 (или на 9), то есть признаки делимости на 3 и на 9 доказаны.

Так как $10 \equiv 0$ (mod 2 или 5), то по обобщенному свойству 4: $N \equiv a_0$ (mod 2 или 5), то есть число N и его последняя цифра a_0 дают одинаковые остатки при делении на 2 (или на 5). В частности, если последняя цифра a_0 — четная (делится на 2), то и само число N делится на 2. А если последняя цифра a_0 равна 0 или 5 (делится на 5), то и само число N делится на 5, то есть признаки делимости на 2 и на 5 доказаны.

Так как $10 \equiv -1 \pmod{11}$, то по обобщенному свойству 4: $N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n \cdot a_n \pmod{11}$. Поскольку $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n \cdot a_n = (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)$, то получаем признак делимости на 11: *если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11, то и само число делится на 11* (и полученное число дает тот же остаток при делении на 11, что и число N).

Так как $10^2 \equiv 10^3 \equiv \ldots \equiv 10^n \equiv 0 \pmod{4}$, то по обобщенному свойству 4: $N \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 \pmod{4}$. Поскольку $a_0 + a_1 \cdot 10 = \overline{a_1 a_0}$, то число N и число $\overline{a_1 a_0}$, выраженное его двумя последними цифрами, дают одинаковые остатки при делении на 4. В частности, если $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4, то и само число N делится на 4.

Аналогично, так как $10^3 \equiv 10^4 \equiv \ldots \equiv 10^n \equiv 0 \pmod{8}$, то по обобщенному свойству 4: $N \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 \pmod{8}$. Поскольку $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^3 = \overline{a_2 a_1 a_0}$, то число N и число $\overline{a_2 a_1 a_0}$, выраженное его тремя последними цифрами, дают одинаковые остатки при делении на 8. В частности, если $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8, то и само число N делится на 8.

[1] Запись $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ обозначает число, записанное с помощью цифр a_0, a_1, a_2, ..., a_n, причем $a_n \neq 0$.

Приведенные свойства сравнений и признаки делимости можно использовать при нахождении остатков при делении заданных чисел.

Например, найдем остаток при делении 2012^{2013} на 3.

Учитывая признак делимости на 3, получаем $2012 \equiv 2 + 0 + 1 + 2 \equiv$ $\equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$. Вычитая из правой части последнего сравнения модуль 3, имеем $2012 \equiv -1 \pmod 3$. Подставляя вместо основания заданной степени сравнимое с ним по модулю 3 число (-1), получаем $2012^{2013} \equiv (-1)^{2013} \equiv -1$ $\pmod 3$. Поскольку остаток при делении на 3 не бывает отрицательным, то прибавляем к правой части последнего сравнения модуль 3 и получаем, что $2012^{2013} \equiv 2 \pmod 3$. Следовательно, остаток от деления 2012^{2013} на 3 равен 2.

4. Решение уравнений в целых числах. Выясним, можно ли, используя только монеты по 2 р. и по 5 р., заплатить за покупку точно 21 р.

Если обозначить через x число монет по 2 р., через y — число монет по 5 р., которые надо уплатить за покупку, то по условию задачи получаем равенство

$$2x + 5y = 21 \tag{1}$$

и задача сводится к нахождению целых решений уравнения (1).

Уравнение (1) имеет бесконечно много решений в целых числах:

1) $x = -2$, $y = 5$; 2) $x = 3$, $y = 3$; 3) $x = 8$, $y = 1$; 4) $x = 13$, $y = -1$; ... .

Заметим, что условие задачи можно понимать по-разному: 1) можно считать, что монеты по 2 р. и по 5 р. имеются только у покупателя, и он этими монетами должен набрать ровно 21 р. (тогда условию задачи удовлетворяют только неотрицательные целые решения уравнения (1), например $x = 3$, $y = 3$; или $x = 8$, $y = 1$); 2) можно также считать, что у продавца тоже есть такие монеты и он может ими давать сдачу покупателю (тогда условию задачи удовлетворяют любые целые решения уравнения (1), причем отрицательное значение x (или y) означает, что покупатель получил сдачу в $|x|$ монет по 2 р. (или в $|y|$ монет по 5 р.)).

Уравнение (1) является примером *диофантова уравнения* — уравнения с несколькими переменными, решения которого ищут в целых числах. Подобные уравнения возникают в некоторых задачах математики, физики, экономики и т. д. Название «диофантовы» дано таким уравнениям по имени древнегреческого математика Диофанта (III в.).

Отметим, что нет общих методов решения диофантовых уравнений, однако можно выделить некоторые частные приемы, связанные с использованием свойств делимости, которые позволяют решать некоторые из таких уравнений. Рассмотрим применение этих приемов на конкретных примерах.

1. *Пробуем представить заданное уравнение в виде $u \cdot v = a$ и рассматриваем все возможные варианты разложения целого числа a на целые множители.*

Пример Решить в целых числах уравнение

$$xy + x + y = 2. \tag{2}$$

▶ Решение. Преобразуем данное уравнение так, чтобы выражение в левой части можно было разложить на множители: $x(y + 1) + y + 1 = 2 + 1$.

Тогда $(y + 1)(x + 1) = 3$. Так как по условию x и y — целые числа, то $x + 1$ и $y + 1$ — тоже целые числа. Но целое число 3 можно представить в виде произведения двух целых чисел лишь одним из четырех способов: $3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-3) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-3)$. Получаем четыре системы:

$$\begin{cases} y+1=3, \\ x+1=1, \end{cases} \begin{cases} y+1=1, \\ x+1=3, \end{cases} \begin{cases} y+1=-3, \\ x+1=-1, \end{cases} \begin{cases} y+1=-1, \\ x+1=-3. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим все решения заданного уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-4, \end{cases} \begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 2), (2; 0), (−2; −4), (−4; −2). ◁

2. *Пробуем выполнить равносильные преобразования заданного уравнения так, чтобы записать его в виде равенства с дробным выражением и, если возможно, выделить целую часть в полученной дроби.*

Решим этим способом в целых числах уравнение (2): $xy + x + y = 2$. Для этого выразим из заданного уравнения переменную x через переменную y.

▶ Решение. $x(y + 1) = 2 - y$. При $y + 1 = 0$ (то есть $y = -1$) решений нет ($0 \neq 3$). При $y + 1 \neq 0$ (то есть $y \neq -1$) получаем $x=\dfrac{2-y}{y+1}$. Тогда: $x=\dfrac{3-(y+1)}{y+1}$,

$x=\dfrac{3}{y+1}-1$, $x+1=\dfrac{3}{y+1}$. По условию x — целое число, тогда левая часть последнего уравнения тоже целое число, следовательно, и число $\dfrac{3}{y+1}$ — целое. Но это возможно только в случае, когда $y + 1$ — делитель числа 3. Но у числа 3 только 4 целых делителя: ±1; ±3. Следовательно, $y + 1 = 1$, или $y + 1 = -1$, или $y + 1 = 3$, или $y + 1 = -3$. Определяя из этих равенств значение y, а затем соответствующее значение x из равенства $x=\dfrac{2-y}{y+1}$,

получаем: $\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ x=-4, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ x=0, \end{cases} \begin{cases} y=-4, \\ x=-2. \end{cases}$ ◁

3. *Использование свойств сравнений*

Решим этим способом в целых числах уравнение (1): $2x + 5y = 21$.

▶ Решение. Из данного уравнения получаем: $2x = 21 - 5y$. Это равенство означает, что $2x \equiv 21 \pmod 5$. Последнее сравнение останется правильным, если коэффициент 2 (или число 21) заменить сравнимым по модулю 5 числом (так, чтобы левая и правая части нового сравнения имели общий множитель). Поскольку $2 \equiv 7 \pmod 5$, то правильным будет также сравнение $7x \equiv 21 \pmod 5$. Учитывая, что числа 7 и 5 взаимно простые, обе части последнего сравнения можно разделить на 7 и получить верное сравнение $x \equiv 3 \pmod 5$. Тогда $x = 3 + 5t$ (где t — целое число). Подставляя в уравнение (1), получаем: $2 \cdot (3 + 5t) + 5y = 21$. Отсюда $y = 3 - 2t$.

Следовательно, все целые решения уравнения (1) задаются формулами: $x = 3 + 5t$, $y = 3 - 2t$, где t — любое целое число. ◁

Замечание. Если по условию задачи требуется найти решение уравнения (1) в натуральных числах, то из полученных формул видно, что натуральные решения мы получим только при $t = 0$ и $t = 1$. Следовательно, уравнение (1) имеет только два решения в натуральных числах: $x = 3$, $y = 3$ и $x = 8$, $y = 1$.

Заметим, что, используя свойства делимости, можно исследовать существование и общий вид решения диофантова уравнения первой степени

$$ax + by = c, \tag{3}$$

где a, b, c — целые числа.

В частности, можно показать, что если a и b — взаимно простые числа (то есть НОД $(a; b) = 1$), то уравнение (3) всегда имеет решение. Причем, если $(x_0; y_0)$ — одно из решений уравнения (3), то все его решения задаются формулами

$$x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at \text{ (где } t \text{ — любое целое число).} \tag{4}$$

Покажем, что если $(x_0; y_0)$ — одно из решений уравнения (3), то все его решения действительно задаются формулами (4). Пусть уравнение (3) имеет решения $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$. Тогда справедливы равенства $ax_0 + by_0 = c$, $ax_1 + by_1 = c$, откуда получаем, что $ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1$, и поэтому

$$b(y_0 - y_1) = a(x_1 - x_0). \tag{5}$$

Левая часть равенства (5) делится на b, следовательно, и правая его часть делится на b. Но поскольку НОД $(a; b) = 1$, то $x_1 - x_0$ делится на b, то есть существует такое целое число t, что $x_1 - x_0 = bt$, а значит, $x_1 = x_0 + bt$. Но тогда из равенства (5) следует, что $y_1 = y_0 - at$. Следовательно, все решения уравнения (3) задаются формулами (4).

Если целые числа a и b имеют наибольший общий делитель $d \neq 1$, то число $ax + by$ делится на d. Но тогда равенство (3) может выполняться только в том случае, когда $c = ax + by$ делится на d. Если же c не делится на d, то уравнение (3) не имеет решений. Например, уравнение $6x + 15y = 32$ не имеет решений, так как НОД $(6, 15) = 3$, а 32 не делится на 3.

Если же целые числа a и b имеют наибольший общий делитель $d \neq 1$ и c делится на d, то обе части уравнения (3) можно разделить на d и получить равносильное уравнение $a_1x + b_1y = c_1$, в котором НОД $(a_1; b_1) = 1$ и которое всегда имеет решения.

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите, что числа 3013 и 3007 взаимно простые.

Решение

▶Пусть НОД $(3013; 3007) = d$. Тогда $3013 \vdots d$ и $3007 \vdots d$, следовательно, разность $3013 - 3007 = 6 \vdots d$. Таким

Комментарий

Для решения можно разложить заданные числа на простые множители и убедиться, что у них нет образом, общие натуральные делители чисел 3013 и 3007 надо искать среди натуральных делителей числа 6 (то есть среди чисел 1; 2; 3; 6). Но 3007 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 6. Следовательно, НОД (3013; 3007) = 1, то есть числа 3013 и 3007 взаимно простые. ◁

общих делителей (кроме единицы). Но такой способ достаточно сложно реализовать для больших чисел.

Можно также использовать следующую идею: если НОД $(a;\, b) = d$, то $a \,\vdots\, d$ и $b \,\vdots\, d$, следовательно, $(a - b) \,\vdots\, d$ (и, кроме того, НОД $(a;\, b)$ = НОД $(a - b;\, b) = d$).

Задача 2 Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число).

Комментарий

Для решения достаточно вспомнить определение делимости натуральных чисел (если $n \,\vdots\, 42$, то $n = 42 \cdot m$) и формулу для числа делителей натурального числа, для которого мы знаем его каноническое разложение на простые множители. Поскольку $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ и $n = 42 \cdot m$, то $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m$. Следовательно, в разложении числа n на простые множители обязательно будут присутствовать простые числа $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$. Поэтому общий вид канонического разложения числа n на простые множители $(n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k})$ запишется так: $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а число делителей: $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. (1)

Дальнейшие рассуждения связаны с тем, что количество натуральных делителей искомого числа тоже равно $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, и поэтому в записи (1) может быть только три множителя (поскольку при натуральных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ числа $\alpha_1 + 1$, $\alpha_2 + 1$, ..., $\alpha_k + 1$ тоже натуральные и не меньше 2).

Решение

► Если искомое число n делится на $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, то его каноническое разложение на простые множители будет иметь вид: $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа, а число делителей:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) \qquad (1)$$

(причем $\alpha_1 + 1 \geqslant 2$, $\alpha_2 + 1 \geqslant 2$, ..., $\alpha_k + 1 \geqslant 2$).

Учитывая, что по условию число делителей числа n равно $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, получаем, что в формуле (1) (а значит, и в каноническом разложении числа n) может быть только три множителя. Следовательно, $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3}$, где $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$ (и каждый из множителей в последнем равенстве не меньше 2). Получаем всего шесть возможных случаев:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 3, \\ \alpha_3 + 1 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 7, \\ \alpha_3 + 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 2, \\ \alpha_3 + 1 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 7, \\ \alpha_3 + 1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 2, \\ \alpha_3 + 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 3, \\ \alpha_3 + 1 = 2. \end{cases}$$

Решая эти системы и подставляя результат в формулу $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3}$, получаем, что условию задачи удовлетворяют только шесть натуральных чисел со следующими каноническими разложениями:

$2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2^1 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^6$; $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^1$; $2^6 \cdot 3^1 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. ◁

Задача 3 Найдите последнюю цифру числа 237^{2011}.

Решение

▶ $237^{2011} \equiv 7^{2011} \pmod{10}$.

Поскольку $7^{2011} = 7^{2010+1} = (7^2)^{1005} \cdot 7^1$, то

$$7^{2011} \equiv (7^2)^{1005} \cdot 7 \equiv 49^{1005} \cdot 7 \equiv$$
$$\equiv (-1)^{1005} \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Следовательно, последняя цифра данного числа равна 3.

Ответ: 3. ◁

Комментарий

Последнюю цифру данного числа можно получить как остаток при делении этого числа на 10. Поэтому для нахождения последней цифры числа можно использовать сравнения по модулю 10. Поскольку $237 \equiv 7 \pmod{10}$, то $237^{2011} \equiv 7^{2011}$ $\pmod{10}$. Далее пробуем выделить такую степень числа 7, которая по модулю 10 сравнима с небольшим (по абсолютной величине) числом. Поскольку $7^2 = 49 \equiv$ $\equiv -1 \pmod{10}$, то удобно в выражении 7^{2011} выделить вторую степень числа 7 (представив 2011 в виде $2010 + 1 = 2 \cdot 1005 + 1$). Получив в результате сравнения отрицательное число, мы прибавляем к нему модуль, чтобы получить искомый остаток.

Задача 4 Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Решение

▶ При $n \geqslant 5$ выражение $n!$ содержит множитель 5 и, значит, делится на 5. Тогда $n! + 5n + 13 \equiv 0 + 0 + 3 \equiv$ $\equiv 3 \pmod 5$. Получаем, что число k^2 при делении на 5 дает остаток 3. Но при делении на 5 число k^2 дает только остатки 0; 1; 4:

Комментарий

Часть уравнений в целых числах удается решить с помощью полного перебора всех значений переменной, меньших некоторого числа, и доказательства того, что при бóльших значениях переменной равенство не может выполняться.

Остатки k	0	1	2	3	4
Остатки k^2	0	1	4	4	1

Следовательно, при $n \geqslant 5$ данное уравнение корней не имеет.
Проверим оставшиеся значения n (1; 2; 3; 4).
При $n = 1$ из данного уравнения получаем уравнение $13 = k^2$, у которого нет натуральных решений.
При $n = 2$ получаем уравнение $25 = k^2$, у которого только одно натуральное решение $k = 5$.
При $n = 3$ получаем уравнение $34 = k^2$, у которого нет натуральных решений.
При $n = 4$ получаем уравнение $57 = k^2$, у которого нет натуральных решений.
Ответ: $n = 2$, $k = 5$. ◁

Для обоснования последнего утверждения достаточно показать, что при делении на какое-то число левая и правая части равенства дают разные остатки.

В данном уравнении идея такого обоснования связана с тем, что *квадрат натурального числа k дает не все возможные остатки при делении на 3; 4; 5; 6; ...* (в этом легко убедиться, рассмотрев все остатки при делении *числа* k на выбранное число). Наличие слагаемого 5^n в левой части уравнения позволяет предположить, что удобно использовать модуль 5 для обоснования того, что при $n \geqslant 5$ уравнение не имеет решений. После этого остается проверить, есть ли решения при $n = 1$; 2; 3; 4.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение делимости целых чисел. Сформулируйте свойства делимости. Приведите пример их доказательства.
2. Дайте определение делимости целых чисел с остатком. Объясните на примере разбиение целых чисел на классы по модулю m.
3. Дайте определение сравнения целых чисел по модулю m. Сформулируйте свойства сравнений. Приведите пример их доказательства.
4. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2; 5; 3; 9; 11; 4; 8.

Упражнения

1. Докажите, что приведенные пары чисел являются взаимно простыми. 1) 2009 и 2003; 2) 1354 и 1357; 3) 2006 и 2011.

2. Докажите, что произведение:

1) двух последовательных целых чисел делится на 2;

2) трех последовательных целых чисел делится на 6;

3) четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

3. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

4. При делении натурального числа N на 3 и на 37 получаются соответственно остатки 1 и 33. Найдите остаток от деления N на 111.

5. Не выполняя деления, определите остаток от деления числа 100 320 052 006 200 720 087
1) на 3; 2) на 4; 3) на 5; 4) на 8; 5) на 9; 6) на 11.

6. Найдите остаток от деления числа 2^{30} на: 1) 10; 2) 11; 3) 13.

7. Определите последнюю цифру числа: 1) 19^{2009}; 2) 237^{2010}; 3) 52^{2011}.

8. Докажите, что квадрат любого натурального числа при делении на 4 не может давать остатки, равные 2 и 3.

9. Докажите, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 дает остаток 1.

10. Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

11. Найдите все пары натуральных чисел, разность которых 66, а их наименьшее общее кратное равно 360.

12. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

13. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

14. Найдите двузначное число, которое на 19 больше суммы квадратов его десятичных цифр и на 44 больше удвоенного произведения его цифр.

15. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК $(a, b) = 60$, НОК $(a, c) = 270$. Найдите НОК (b, c).

16. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел a и b, если при увеличении числа a на 6 он увеличивается в четыре раза?

17. Доказать, что при любом натуральном n число $37^{n+2}+16^{n+1}+23^n$ делится на 7.

18. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите все такие числа.

19. Решите в целых числах уравнение: 1) $x^2 - 4y^2 = 1997$; 2) $x^3 - y^3 = 98$.

20. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $19x + 99y = 2002$; 2) $xy - 3x + 5y = 25$; 3) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$.

21 (МГУ, хим. ф-т). Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.

§ 10. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ ТОЖДЕСТВЕННОЕ РАВЕНСТВО

Рассмотрим одночлен и многочлен, которые зависят только от одной переменной, например от переменной x.

По определению одночлена числа и буквы (в нашем случае одна буква — x) в нем связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень. Если в этом одночлене произведение всех чисел записать перед буквой, а произведение всех степеней буквы записать как целую неотрицательную степень этой буквы (то есть записать одночлен в стандартном виде), то получим выражение вида ax^n, где a — некоторое число. Поэтому *одночлен от одной переменной x — это выражение вида ax^n, где a — некоторое число, n — целое неотрицательное число*. Если $a \neq 0$, то показатель степени n переменной x называется *степенью одночлена*. Например, $25x^6$ — одночлен шестой степени, $\frac{2}{3}x^2$ — одночлен второй степени. Если одночлен является числом, не равным нулю, то его степень считается равной нулю. *Для одночлена, заданного числом* 0, *понятие степени не определяется* (поскольку $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

По определению многочлен от одной переменной x — это сумма одночленов от одной переменной x (в которой приведены подобные слагаемые, то есть все одночлены-слагаемые имеют различную степень). Поэтому

многочленом от одной переменной x называется выражение вида
$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{1}$$
где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — некоторые числа.

Если $a_n \neq 0$, то этот многочлен называют *многочленом n-й степени* от переменной x. При этом член a_nx^n называют *старшим членом многочлена* $f(x)$, число a_n — *коэффициентом при старшем члене*, а член a_0 — *свободным членом*. Например, $5x^3 - 2x + 1$ — многочлен третьей степени, у которого свободный член равен 1, а коэффициент при старшем члене равен 5.

Заметим, что иногда нумерацию коэффициентов многочлена начинают с начала записи выражения (1), и тогда общий вид многочлена $f(x)$ записывают так:

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — некоторые числа.

Теорема 1. ***Одночлены ax^n, где $a \neq 0$, и bx^m, где $b \neq 0$, тождественно равны тогда и только тогда, когда $a = b$ и $n = m$.***
Одночлен ax^n тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Поскольку равенство одночленов

$$ax^n = bx^m \tag{2}$$

выполняется при всех значениях x (по условию эти одночлены тождественно равны), то, подставляя в это равенство $x = 1$, получаем, что $a = b$. Сокращая обе части равенства (2) на a (где $a \neq 0$ по условию), получаем $x^n = x^m$. При $x = 2$ из этого равенства имеем: $2^n = 2^m$. Поскольку $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}}$,

а $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m \text{ раз}}$, то равенство $2^n = 2^m$ возможно только тогда, когда $n = m$.

Таким образом, из тождественного равенства $ax^n = bx^m$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) получаем, что $a = b$ и $n = m$.

Если известно, что $ax^n = 0$ для всех x, то при $x = 1$ получаем $a = 0$. Поэтому одночлен ax^n тождественно равен нулю при $a = 0$ (тогда $ax^n = 0 \cdot x^n = 0$). ○

Далее любой одночлен вида $0 \cdot x^n$ будем заменять на 0.

Теорема 2. ***Если многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю (то есть принимает нулевые значения при всех значениях x), то все его коэффициенты равны нулю.***

● Для доказательства используем метод математической индукции.

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ (тождественно).

При $n = 0$ имеем $f(x) = a_0 = 0$, поэтому $a_0 = 0$. То есть в этом случае утверждение теоремы выполняется.

Предположим, что при $n = k$ это утверждение также выполняется: если многочлен $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ тождественно равен 0, то

$$a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0.$$

Докажем, что данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$. Пусть

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (3)$$

Поскольку равенство (3) выполняется при всех значениях x, то, подставляя в это равенство $x = 0$, получаем, что $a_0 = 0$. Тогда равенство (3) обращается в следующее равенство: $a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x = 0$. Вынесем x в левой части этого равенства за скобки и получим

$$x\,(a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1) = 0. \qquad (4)$$

Равенство (4) должно выполняться при всех значениях x. Для того чтобы оно выполнялось при $x \neq 0$, должно выполняться тождество

$$a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 = 0.$$

В левой части этого тождества стоит многочлен со степенями переменной от x^0 до x^k. Тогда по предположению индукции все его коэффициенты равны нулю: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. Но мы также доказали, что $a_0 = 0$, поэтому наше утверждение выполняется и при $n = k + 1$. Таким образом, утверждение теоремы справедливо для любого целого неотрицательного n, то есть для всех многочленов. ○

Многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю, обычно называют *нулевым многочленом*, или *нуль-многочленом*, и обозначают $0(x)$ или просто 0 (поскольку $0(x) = 0$).

Теорема 3. ***Если два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, то они совпадают (то есть их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях равны).***

Пусть многочлен $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, а многочлен $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Рассмотрим многочлен $f(x) - g(x)$. Поскольку многочлены $f(x)$ и $g(x)$ по условию тождественно равны, то многочлен $f(x) - g(x)$ тождественно равен 0. Таким образом, все его коэффициенты равны нулю.

Но $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots$.

Тогда $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ... Отсюда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Как видим, если допустить, что у какого-то из двух данных многочленов степень выше, чем у второго многочлена (например, n больше m), то коэффициенты разности будут равны нулю. Поэтому начиная с $(m + 1)$-го номера все коэффициенты a_i также будут равны нулю. То есть действительно многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковую степень и соответственно равные коэффициенты при одинаковых степенях.

Теорема 3 является основанием так называемого метода неопределенных коэффициентов. Покажем его применение на следующем примере.

Пример Докажите, что выражение $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$ является полным квадратом.

Данное выражение может быть записано в виде многочлена четвертой степени, поэтому оно может быть полным квадратом только многочлена второй степени вида $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Получаем тождество:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (ax^2 + bx + c)^2. \qquad (5)$$

Раскрывая скобки в левой и правой частях этого тождества и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему равенств. Этот этап решения удобно оформлять в следующем виде:

x^4	$1 = a^2$
x^3	$2 + 4 + 6 + 8 = 2ab$
x^2	$2\cdot4 + 2\cdot6 + 2\cdot8 + 4\cdot6 + 4\cdot8 + 6\cdot8 = b^2 + 2ac$
x^1	$2\cdot4\cdot6 + 2\cdot4\cdot8 + 2\cdot6\cdot8 + 4\cdot6\cdot8 = 2bc$
x^0	$2\cdot4\cdot6\cdot8 + 16 = c^2$

Из первого равенства получаем $a = 1$ или $a = -1$.

При $a = 1$ из второго равенства имеем $b = 10$, а из третьего — $c = 20$. Как видим, при этих значениях a, b и c последние два равенства также выполняются. Следовательно, тождество (5) выполняется при $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$ (аналогично можно также получить $a = -1$, $b = -10$, $c = -20$).

Таким образом, $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x+8) + 16 = (x^2 + 10x + 20)^2$.

Упражнения

1. Зная, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, найдите значение коэффициентов a, b, c, d:

1) $f(x) = 2x^2 - (3 - a)x + b$, $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$;

2) $f(x) = (a + 1)x^3 + 2$, $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c - 1)x + d$.

2. Найдите такие числа a, b, c, чтобы данное равенство $a(x^2 - 1) + b(x - 2) + c(x + 2) = 2$ выполнялось при любых значениях x.

3. Докажите тождество:

1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$;

2) $1 + x^4 = \left(1 + x\sqrt{2} + x^2\right)\left(1 - x\sqrt{2} + x^2\right)$.

4. Докажите, что данное выражение является полным квадратом:

1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$;

2) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$.

5. Найдите такие a и b, чтобы при любых значениях x выполнялось равенство: $3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b)$.

6. Запишите алгебраическую дробь $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$ как сумму двух алгебраических дробей вида $\frac{a}{3x - 1}$ и $\frac{b}{5x + 2}$.

10.2. ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН С ОСТАТКОМ

Сложение и умножение многочленов от одной переменной выполняется с помощью известных правил сложения и умножения многочленов. В результате выполнения действий сложения или умножения над многочленами от одной переменной всегда получаем многочлен от той же переменной.

Из определения произведения двух многочленов вытекает, что *старший член произведения двух многочленов равен произведению старших членов множителей, а свободный член произведения равен произведению свободных членов множителей. Отсюда получаем, что степень произведения двух многочленов равна сумме степеней множителей.*

При сложении многочленов одной степени можно получить многочлен этой же степени или многочлен меньшей степени.

Например, $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$.

При сложении многочленов разных степеней всегда получаем многочлен, степень которого равна большей из степеней слагаемых.

Например, $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$.

Деление многочлена на многочлен определяется аналогично делению целых чисел. Напомним, что число a делится на число b ($b \neq 0$), если существует такое число q, что $a = b \cdot q$.

Определение. **Многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен), если существует такой многочлен $Q(x)$, что**

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

Как и для целых чисел, операция деления многочлена на многочлен выполняется не всегда, поэтому во множестве многочленов вводится операция *деления с остатком*.

Разделить с остатком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен) — это означает найти такую пару многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, что $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $B(x)$ (в этом случае многочлен $Q(x)$ называют *неполным частным*.)

Например, поскольку $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)\,x + 2$, то при делении многочлена $x^3 - 5x + 2$ на многочлен $x^2 - 5$ получаем неполное частное x и остаток 2.

Иногда деление многочлена на многочлен удобно выполнять «уголком», как и деление многозначных чисел, пользуясь следующим алгоритмом:

При делении многочленов от одной переменной переменные в делимом и в делителе размещают по убыванию степеней и делят старший член делимого на старший член делителя. Потом полученный результат умножают на делитель, и это произведение вычитают из делимого. С полученной разностью выполняют аналогичную операцию: делят ее старший член на старший член делителя и полученный результат снова умножают на делитель и т. д. Этот процес продолжают до тех пор, пока не получится в остатке 0 (если один многочлен делится на другой) или пока в остатке не получится многочлен, степень которого меньше степени делителя.

Пример Разделим многочлен $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B(x) = x^2 - 2x + 3$.

▶
$$
\begin{array}{l|l}
\;\; x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\
-\underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} & \overline{x^2 - 3x - 8} \\
\qquad -3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\
\qquad -\underline{-3x^3 + 6x^2 - 9x} & \\
\qquad\qquad -8x^2 + 17x - 20 & \\
\qquad\qquad -\underline{-8x^2 + 16x - 24} & \\
\qquad\qquad\qquad x + 4 &
\end{array}
$$
◁

Докажем, что полученный результат действительно является результатом деления $A(x)$ на $B(x)$ с остатком.

● Если обозначить результат выполнения первого шага алгоритма через $f_1(x)$, второго шага — через $f_2(x)$, третьего — через $f_3(x)$, то операцию деления, выполненную выше, можно записать в виде системы равенств:

$$f_1(x) = A(x) - x^2 \cdot B(x); \qquad (1)$$

$$f_2(x) = f_1(x) - (-3x) \cdot B(x); \qquad (2)$$

$$f_3(x) = f_2(x) - (-8) \cdot B(x). \qquad (3)$$

Сложим почленно равенства (1), (2), (3) и получим

$$A(x) = (x^2 - 3x - 8) \cdot B(x) + f_3(x). \qquad (4)$$

Учитывая, что степень многочлена $f_3(x) = x + 4$ меньше степени делителя $B(x) = x^2 - 2x + 3$, обозначим $f_3(x) = R(x)$ (остаток), а $x^2 - 3x - 8 = Q(x)$ (неполное частное). Тогда из равенства (4) имеем: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, то есть $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x - 8) + x + 4$, а это и означает, что мы разделили $A(x)$ на $B(x)$ с остатком. ○

Очевидно, что приведенное обоснование можно провести для любой пары многочленов $A(x)$ и $B(x)$ в случае их деления столбиком. Поэтому описанный выше алгоритм позволяет для любых делимого $A(x)$ и делителя $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен) найти неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$.

То есть, имеет место следующая теорема.

Для любой пары многочленов $A(x)$ и $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен) существует и притом единственная пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, такая, что $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$, причем степень $R(x)$ меньше степени $B(x)$ (или $R(x)$ — нулевой многочлен).

Отметим, что в случае, когда степень делимого $A(x)$ меньше степени делителя $B(x)$, считают, что неполное частное $Q(x) = 0$, а остаток $R(x) = A(x)$.

Упражнения

1. Выполните деление многочлена на многочлен:

1) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ на $x - 2$; 2) $x^{10} + 1$ на $x^2 + 1$;

3) $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$ на $x^2 + 2x + 3$.

2. Выполните деление многочлена на многочлен с остатком:

1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ на $x^2 + x + 2$;

2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ на $x^2 - x - 2$.

3. При каких значениях a и b многочлен $A(x)$ делится без остатка на многочлен $B(x)$?

1) $A(x) = x^3 + ax + b$, $B(x) = x^2 + 5x + 7$;

2) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 4$;

3) $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b$, $B(x) = x^2 - x + 2$.

4. Найдите неполное частное и остаток при делении многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ методом неопределенных коэффициентов:

1) $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $B(x) = x^2 - 1$;

2) $A(x) = x^3 - 19x - 30$, $B(x) = x^2 + 1$.

10.3. ТЕОРЕМА БЕЗУ. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА. ФОРМУЛЫ ВИЕТА

Рассмотрим деление многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - a)$. Поскольку степень делителя равна 1, то степень остатка, который мы получим, должна быть меньше 1, то есть в этом случае остатком будет некоторое число R. Таким образом, если разделить многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - a)$, то получим

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Это равенство выполняется тождественно, то есть при любом значении x. При $x = a$ имеем $f(a) = R$. Полученный результат называют теоремой Безу*.

Теорема 1 (теорема Безу). ***Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $f(a)$ (то есть значению многочлена при $x = a$).***

Задача 1 Докажите, что $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ делится на $x - 1$ без остатка.

▶ Подставив в $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ вместо x значение 1, получаем: $f(1) = 0$. Таким образом, остаток от деления $f(x)$ на $(x - 1)$ равен 0, то есть $f(x)$ делится на $(x - 1)$ без остатка. ◁

Определение. ***Число α называют корнем многочлена $f(x)$, если***

$$f(\alpha) = 0.$$

Если многочлен $f(x)$ делится на $(x - \alpha)$, то α — корень этого многочлена.

● Действительно, если $f(x)$ делится на $(x - \alpha)$, то $f(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$ и поэтому $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) = 0$. Таким образом, α — корень многочлена $f(x)$. ○

Справедливо и обратное утверждение. Оно является следствием теоремы Безу.

Теорема 2. ***Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится на двучлен $(x - \alpha)$ без остатка.***

● По теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на $(x - \alpha)$ равен $f(\alpha)$. Но по условию α — корень $f(x)$, таким образом, $f(\alpha) = 0$. ○

Обобщением теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. ***Если многочлен $f(x)$ имеет попарно разные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то он делится без остатка на произведение***

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n).$$

● Для доказательства используем метод математической индукции.

При $n = 1$ утверждение доказано в теореме 2.

Допустим, что утверждение справедливо при $n = k$. То есть если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно разные корни многочлена $f(x)$, то он делится на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)$. Тогда

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k) \cdot Q(x). \qquad (1)$$

Докажем, что утверждение теоремы справедливо и при $n = k + 1$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ — попарно разные корни многочлена $f(x)$. Поскольку α_{k+1} — корень $f(x)$, то $f(\alpha_{k+1}) = 0$. Принимая во внимание равенство (1), которое выполняется согласно предположению индукции, получаем:

$$f(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot Q(\alpha_{k+1}) = 0.$$

По условию все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ разные, поэтому ни одно из чисел $\alpha_{k+1} - \alpha_1, \alpha_{k+1} - \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} - \alpha_k$ не равно нулю. Тогда $Q(\alpha_{k+1}) = 0$. Таким образом, α_{k+1} — корень многочлена $Q(x)$. Тогда по теореме 2

* Безу Этьен (1730–1783) — французский математик, внесший значительный вклад в развитие теории алгебраических уравнений.

$Q(x)$ делится на $(x - \alpha_{k+1})$, то есть $Q(x) = (x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x)$ и из равенства (1) имеем

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x).$$

Это означает, что $f(x)$ делится на произведение

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}),$$

то есть теорема доказана и при $n = k + 1$.

Таким образом, теорема справедлива для любого натурального n. ○

Следствие. ***Многочлен степени n имеет не больше n разных корней.***

● Допустим, что многочлен n-й степени имеет $(n + 1)$ разных корней: α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1}. Тогда $f(x)$ делится на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \times (x - \alpha_{n+1})$ — многочлен степени $(n + 1)$, но это невозможно. Поэтому многочлен n-й степени не может иметь больше, чем n корней. ○

Пусть теперь многочлен n-й степени $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ имеет n разных корней α_1, α_2, ..., α_n. Тогда этот многочлен делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. Это произведение является многочленом той же n-й степени. Таким образом, в результате деления можно получить только многочлен нулевой степени, то есть число. Таким образом,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Если раскрыть скобки в правой части равенства (2) и приравнять коэффициенты при старших степенях, то получим, что $b = a_n$, то есть

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n).} \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (3), получаем соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями, которые называют **формулами Виета**:

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{gathered}} \quad (4)$$

Например, при $n = 2$ имеем:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \ \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},}$$

а при $n = 3$:

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3}; \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{gathered}} \quad (5)$$

Выполнение таких равенств является необходимым и достаточным условием того, чтобы числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ были корнями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Формулы (3) и (4) справедливы не только для случая, когда все корни многочлена $f(x)$ разные. Введем *понятие кратного корня многочлена*.

Если многочлен $f(x)$ делится без остатка на $(x-\alpha)^k$, но не делится без остатка на $(x-\alpha)^{k+1}$, то говорят, что число α является корнем кратности k многочлена $f(x)$.

Например, если произведение $(x+2)^3(x-1)^2(x+3)$ записать в виде многочлена, то для этого многочлена число (-2) является корнем кратности 3, число 1 — корнем кратности 2, а число (-3) — корнем кратности 1.

При использовании формул Виета в случае кратных корней необходимо каждый корень записать такое количество раз, которое равно его кратности.

Задача 2 Проверьте справедливость формул Виета для многочлена

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8.$$

▶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x+2) - 4(x+2) = (x+2)(x^2-4) = (x-2)(x+2)^2.$
Поэтому $f(x)$ имеет корни: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$ (поскольку (-2) — корень кратности 2).
Проверим справедливость формулы (5).
В нашем случае: $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -4$, $a_0 = -8$. Тогда

$$2+(-2)+(-2) = -\frac{2}{1}; \quad 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2) = \frac{-4}{1}; \quad 2\cdot(-2)\cdot(-2) = -\frac{-8}{1}.$$

Как видим, все равенства выполняются, поэтому формулы Виета справедливы для данного многочлена. ◁

Задача 3 Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$.

▶ Обозначим корни уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$ через x_1 и x_2. Тогда корнями искомого уравнения должны быть числа $\alpha_1 = x_1^2$ и $\alpha_2 = x_2^2$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$,

где $p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) = -\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)$, $q = \alpha_1\alpha_2 = x_1^2x_2^2 = \left(x_1x_2\right)^2$.
По формулам Виета имеем $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1x_2 = 4$. Отсюда находим, что $q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16$, а $p = -\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right) = -(8^2 - 2\cdot 4) = -56$.
Таким образом, искомое уравнение имеет вид $x^2 - 56x + 16 = 0$. ◁

Упражнения

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ на $x + 2$.
2. Найдите коэффициент a, зная, что остаток от деления многочлена $x^3 - ax^2 + 5x - 3$ на $x - 1$ равен 6.
3. Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 4, а при делении на $x - 3$ дает остаток 6. Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - 4x + 3$.

4. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ делится без остатка на $x + 2$, а при делении на $x - 1$ имеет остаток, который равен 3?

5. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $3x^2 - 5x + 2$ равен $7x + 1$. Найдите остаток от деления этого многочлена на двучлены $x - 1$ и $3x - 2$.

6. Запишите формулы Виета при $n = 4$.

7. Составьте кубический многочлен, который имеет корни 5, −2, 1 и коэффициент при старшем члене −2. Решите задачу двумя способами.

8. При каких значениях a сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - (a + 2)x + 3a$ равна 12?

9. Какую кратность имеет корень 2 для многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8?$$

10. Составьте кубический многочлен, который имеет корень 3 кратности 2 и корень (−1), а коэффициент при старшем члене 2.

11. Найдите такие a и b, чтобы число 3 было корнем кратности не меньше чем 2 для многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$.

12. Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$.

13. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

14. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 + 6x + 3 = 0$.

10.4. СХЕМА ГОРНЕРА

Делить многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - a)$ иногда удобно с помощью специальной схемы, которую называют схемой Горнера.

Пусть многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ необходимо разделить на двучлен $(x - a)$. В результате деления многочлена n-й степени на многочлен первой степени получим некоторый многочлен $Q(x)$ $(n - 1)$-й степени (то есть $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, где $b_0 \neq 0$) и остаток R. Тогда $f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, то есть

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x - a) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.$$

Левая и правая части полученного равенства тождественно равны, поэтому, перемножив многочлены, стоящие в правой части, можем приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^n & a_0 = b_0 \\
x^{n-1} & a_1 = b_1 - ab_0 \\
x^{n-2} & a_2 = b_2 - ab_1 \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
x^1 & a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2} \\
x^0 & a_n = R - ab_{n-1}
\end{array}$$

Найдем из этих равенств коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ и остаток R:
$b_0 = a_0$, $b_1 = ab_0 + a_1$, $b_2 = ab_1 + a_2$, ..., $b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$, $R = ab_{n-1} + a_n$.

Как видим, первый коэффициент неполного частного равен первому коэффициенту делимого. Остальные коэффициенты неполного частного и остаток находятся одинаково: для того чтобы найти коэффициент b_{k+1} неполного частного, достаточно предыдущий найденный коэффициент b_k умножить на a и добавить k-й коэффициент делимого. Эту процедуру целесообразно оформлять в виде специальной схемы-таблицы, которую называют *схемой Горнера*.

	a_0 $\oplus$	a_1 $\oplus$	a_2 $\oplus$	...	a_{n-1} $\oplus$	a_n
a $\otimes$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	...	b_{n-1}	R остаток

Пример 1 Разделите по схеме Горнера многочлен $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$ на двучлен $x - 2$.

▶ Запишем сначала все коэффициенты многочлена $f(x)$ (если в данном многочлене пропущена степень 2, то соответствующий коэффициент считаем равным 0), а потом найдем коэффициенты неполного частного и остаток по указанной схеме:

	3	−2	0	−4	1
2 $\otimes$	3 $\oplus$	4 $\oplus$	8 $\oplus$	12 $\oplus$	25 остаток

Таким образом, $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$. ◁

Пример 2 Проверьте, является ли $x = -3$ корнем многочлена $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42$.

▶ По теореме Безу остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$, поэтому найдем с помощью схемы Горнера остаток от деления $f(x)$ на $x - (-3) = x + 3$.

	2	6	4	−2	−42
−3	2	0	4	−14	0 (остаток = $f(-3)$)

Поскольку $f(-3) = 0$, то $x = -3$ — корень многочлена $f(x)$. ◁

Упражнения

1. Используя схему Горнера, найдите неполное частное и остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $B(x)$:
   1) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $B(x) = x + 1$;
   2) $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$; $B(x) = x - 5$;
   3) $A(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$; $B(x) = x + 3$.

2. Используя схему Горнера, проверьте, делится ли многочлен $f(x)$ на двучлен $q(x)$:

1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$; $q(x) = x + 2$;

2) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$; $q(x) = x - 2$.

3. Разделите многочлен $A(x)$ на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$; $B(x) = x - 7$;

2) $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$; $B(x) = 2x - 1$.

10.5. НАХОЖДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теорема 4. ***Если многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$, дробь $\frac{p}{q}$ несократимая), то p является делителем свободного члена (a_0), а q — делителем коэффициента при старшем члене a_n.***

● Если $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Подставляем $\frac{p}{q}$ вместо x в $f(x)$ и из последнего равенства имеем

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0. \tag{1}$$

Умножим обе части равенства (1) на q^n ($q \neq 0$). Получаем

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \tag{2}$$

В равенстве (2) все слагаемые, кроме последнего, делятся на p. Поэтому $a_0q^n = -(a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1})$ делится на p.

Но когда мы записываем рациональное число в виде $\frac{p}{q}$, то эта дробь считается несократимой, то есть p и q не имеют общих делителей. Произведение a_0q^n может делиться на p (если p и q — взаимно простые числа) только тогда, когда a_0 делится на p. Таким образом, p — делитель свободного члена a_0.

Аналогично все слагаемые равенства (2), кроме первого, делятся на q. Тогда $a_np^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n)$ делится на q. Поскольку p и q — взаимно простые числа, то a_n делится на q, следовательно, q — делитель коэффициента при старшем члене. ○

Отметим два следствия из этой теоремы. Если взять $q = 1$, то корнем многочлена будет целое число p — делитель a_0. Таким образом, имеет место:

Следствие 1. ***Любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.***

Если в заданном многочлене $f(x)$ коэффициент $a_n = 1$, то делителями a_n могут быть только числа ±1, то есть $q = \pm1$, и имеет место:

Следствие 2. ***Если коэффициент при старшем члене уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни этого уравнения (если они существуют) — целые числа.***

Задача 1 Найдите рациональные корни многочлена $2x^3 - x^2 + 12x - 6$.

▶ Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена. Тогда p необходимо искать среди делителей свободного члена, то есть среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6, а q — среди делителей старшего коэффициента: ±1, ± 2. Таким образом, рациональные корни многочлена необходимо искать среди чисел $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 2, ± 3, ± 6. Проверять, является ли данное число корнем многочлена, целесообразно с помощью схемы Горнера. При $x=\frac{1}{2}$ имеем следующую таблицу.

	2	−1	12	−6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

Кроме того, по схеме Горнера можно записать, что

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 12\right).$$

Многочлен $2x^2 + 12$ не имеет действительных корней (а тем более рациональных), поэтому заданный многочлен имеет единственный рациональный корень $x = \frac{1}{2}$. ◁

Задача 2 Разложите многочлен $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ на множители.

▶ Ищем целые корни многочлена среди делителей свободного члена: ±1, ±2. Подходит 1. Делим $P(x)$ на $x - 1$ с помощью схемы Горнера.

	2	3	−2	−1	−2
1	2	5	3	2	0

Тогда $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$. Ищем целые корни кубического многочлена $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ среди делителей его свободного члена: ±1, ±2. Подходит (-2). Делим на $x + 2$.

	2	5	3	2
−2	2	1	1	0

Имеем

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1).$$

Квадратный трехчлен $2x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней и на линейные множители не раскладывается.

Ответ: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$. ◁

Отметим, что во множестве действительных чисел не всегда можно найти все корни многочлена (например, квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней). Таким образом, многочлен n-й степени не всегда можно разложить на линейные множители. В курсах высшей алгебры доказывается, что многочлен нечетной степени всегда можно разложить на линейные и квадратные множители, а многочлен четной степени представить в виде произведения квадратных трехчленов.

Например, многочлен четвертой степени раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов. Для нахождения коэффициентов этого разложения иногда можно применить метод неопределенных коэффициентов.

Задача 3 Разложите на множители многочлен $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6$.

▶ Попытка найти рациональные корни ничего не дает: многочлен не имеет рациональных (целых) корней.

Попытаемся разложить этот многочлен в произведение двух квадратных трехчленов. Поскольку старший коэффициент многочлена равен 1, то и у квадратных трехчленов возьмем старшие коэффициенты равными 1. То есть будем искать разложение нашего многочлена в виде:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \tag{3}$$

где a, b, c и d — неопределенные (пока что) коэффициенты. Многочлены, стоящие в левой и правой частях этого равенства, тождественно равны, поэтому и коэффициенты при одинаковых степенях x у них равны. Раскроем скобки в правой части равенства и приравняем соответствующие коэффициенты. Это удобно записать так:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^4 + cx^3 + dx^2 &+ \\ + ax^3 + acx^2 + adx &+ \\ + bx^2 + bcx + bd&. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 1 = 1, \\ x^3 & 1 = a + c, \\ x^2 & 3 = ac + b + d, \\ x^1 & 1 = bc + ad, \\ x^0 & 6 = bd. \end{array}\Bigg\} \tag{4}$$

Попытка решить эту систему методом подстановки приводит к уравнению 4-й степени, поэтому попробуем решить систему (4) в целых числах. Из последнего равенства системы (4) получаем, что b и d могут быть только делителями числа 6. Все возможные варианты запишем в таблицу.

b	1	−1	2	−2
d	6	−6	3	−3

Коэффициенты b и d в равенстве (3) равноправны, поэтому мы не рассматриваем случаи $b = 6$ и $d = 1$ или $b = -6$ и $d = -1$ и т. д.

Для каждой пары значений b и d из третьего равенства системы (4) найдем $ac = 3 - (b + d)$, а из второго равенства имеем $a + c = 1$.

Зная $a + c$ и ac, по теореме, обратной теореме Виета, находим a и c как корни квадратного уравнения. Найденные таким образом значения a, b, c, d подставим в четвертое равенство системы (4) $bc + ad = 1$, чтобы выбрать те числа, которые являются решениями системы (4). Удобно эти рассуждения оформить в виде таблицы:

<table>
<tr><td>b</td><td>1</td><td>−1</td><td colspan="2">2</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>d</td><td>6</td><td>−6</td><td colspan="2">3</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>$a + c = 1$</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$ac = 3 - (b + d)$</td><td>−4</td><td>10</td><td colspan="2">−2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>a</td><td>нецелое</td><td>не существует</td><td>2</td><td>−1</td><td>не существует</td></tr>
<tr><td>c</td><td>нецелое</td><td>не существует</td><td>−1</td><td>2</td><td>не существует</td></tr>
<tr><td>$bc + ad = 1$</td><td>–</td><td>–</td><td>$bc + ad = 4$
$4 \neq 1$</td><td>$bc + ad = 1$
$1 = 1$</td><td>–</td></tr>
</table>

Как видим, системе (4) удовлетворяет набор целых чисел $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$. Тогда равенство (3) имеет вид

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \quad (5)$$

Поскольку квадратные трехчлены $x^2 - x + 2$ и $x^2 + 2x + 3$ не имеют не только рациональных, но и действительных корней, то равенство (5) дает окончательный ответ. ◁

Упражнения

1. Найдите целые корни многочлена:
1) $x^3 - 5x + 4$; 2) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$;
3) $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$; 4) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$.

2. Найдите рациональные корни уравнения:
1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$; 4) $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$.

3. Разложите многочлен на множители:
1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$; 2) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
3) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 4) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$.

4. Найдите действительные корни уравнения:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

5*. Разложите многочлен на множители методом неопределенных коэффициентов:
1) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$; 2) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$.

6*. Разложите многочлен на множители, заранее записав его с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$:
1) $x^4 + 4x - 1$; 2) $x^4 - 4x^3 - 1$; 3) $x^4 + 4a^3x - a^4$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

1. Область определения функции $y = f(x)$ — отрезок $[-2; 1]$. Найдите область определения функции:

1) $y = f(x) + 2$; 2) $y = f(x + 2)$; 3) $y = 3f(x)$; 4) $y = f(3x)$;
5) $y = f(-x)$; 6) $y = -f(x)$; 7) $y = f(|x|)$; 8) $y = |f(x)|$.

2. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$; 3) $y=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$; 4) $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$; 5) $y=\dfrac{x-5}{2x+6}$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию:

1) $(x-3)(y+5)=0$; 2) $|y| = |x^2-4x|$; 3) $|y| > |x+2|$;
4) $|x+y| + |x-y| \geqslant 2$; 5) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

4 (МТУСИ). Решите уравнение:

1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$; 2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=84$;
3) $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$; 4) $\dfrac{1}{(x+2)(x-7)}+\dfrac{27}{(x-2)(x-3)}=1$;
5) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6$; 6) $4\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+56\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}\right)+33=0$.

5 (МЭСИ). Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=-11, \\ (x^2-y^2)xy=180; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3; \\ x^4+y^4=17; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=2, \\ |3x-y|=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ y+|x-1|=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-2x+y^2=6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

6. Решите неравенство:

1) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5$; 2) $x^2-8x-\dfrac{1}{|x-4|}+18\leqslant 0$;
3) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)\geqslant 17$; 4) $\dfrac{|x^2-1|+x+1}{x(x-2)}\leqslant 0$.

7. Докажите неравенство:

1) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; 2) $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$;
3) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$;
4) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

8 (СТАНКИН). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|2|x|-3| = x + a$ имеет точно три корня.

9 (МГАТХТ). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} (a+3)x+4y=3a-5, \\ ax+(a-1)y=2 \end{cases}$ не имеет решений.

10 (МГУ, ИСАиА). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x|+y-4=0, \\ x^2+(y-a)^2=9 \end{cases}$ имеет единственное решение.

11 (МИСиС). При каких значениях параметра a неравенство
$$x^2-(4a+1)x+(a+2)(3a-1)>0$$
выполняется для всех отрицательных значений x?

12 (МГУ, мех.-мат. ф-т). При каких значениях параметра a уравнение $x^4+(a+2)x^2+a^2+3a=0$ имеет точно три различных корня?

13. При каких значениях параметра a уравнение $x^3-13x^2+ax-27=0$ имеет три действительных корня, которые образуют геометрическую прогрессию?

Решите задачи (14–25) на составление уравнений или неравенств и их систем.

14 (МГТУ). Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как каждый день он изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после срока. Сколько деталей в день должен был изготовлять рабочий по плану?

15 (МГУ, хим. ф-т). Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем два из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов. За какое время два комбайна могут убрать первое поле?

16 (РЭА). Производительность первого станка на 25 % больше производительности второго станка. Второй станок сделал деталей на 4 % больше, чем первый. На сколько процентов время, затраченное вторым станком на выполнение своей работы, больше времени первого станка?

17 (ГФА). Первая из труб наполняет бассейн водой в два раза быстрее, чем другая. Если половину бассейна наполнить только из первой трубы, а оставшуюся часть — только из второй, то для наполнения бассейна потребуется 6 час. За сколько часов можно наполнить бассейн только из первой трубы?

18 (МГУПБ). Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 30 км, и встречаются через час. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на 1,5 часа раньше, чем второй в пункт A. Определить скорость первого велосипедиста.

19 (МГУПБ). В течение 7 ч 20 мин судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось обратно. Скорость течения равна 4 км в час. С какой скоростью судно шло по течению?

20 (ПГУ). Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

21 (ВШЭ). Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

22 (МАИ). Найти такое двузначное число, в котором число его единиц на два больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

23 (ЛТА). Около дома посажены березы и липы, причем общее их количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько берез и сколько лип было посажено?

24 (МГУ, эк. ф-т, ВШЭ). Группу людей пытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд, то все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей построили по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

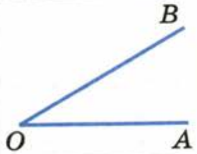
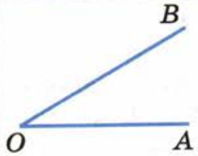
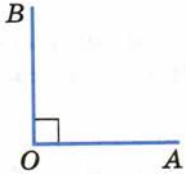
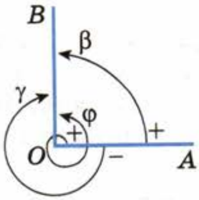
25 (МГУ, эк. ф-т). В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1 руб. 50 коп., роза — 2 руб. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30 руб. 50 коп. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз будет куплено при указанных условиях?

Раздел

2 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

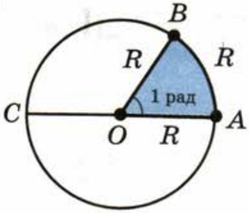
§ 11. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛОВ

Таблица 16

<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятие угла</td></tr>
<tr><td>В геометрии</td><td>В тригонометрии*</td></tr>
<tr><td>Угол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки.</td><td>Угол — фигура, образованная при повороте луча на плоскости около начальной точки.</td></tr>
<tr><td>
$\angle AOB$ образован лучами OA и OB</td><td>
$\angle AOB$ образован при повороте луча OA около точки O</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Измерение углов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Градусная мера угла ($1° = \frac{\pi}{180}$ часть развернутого угла)</td></tr>
<tr><td>Каждому углу ставится в соответствие градусная мера $\alpha \in [0°; 180°]$.

$\angle AOB = 90°$</td><td>Каждому углу как фигуре ставится в соответствие угол поворота, с помощью которого образован этот угол.
Угол поворота $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.

$\angle AOB = \beta = 90°$
$\angle AOB = \gamma = -270°$
$\angle AOB = \varphi =$
$= 90° + 360° = 450°$</td></tr>
</table>

* Происхождение и смысл термина «тригонометрия» см. на с. 219.

Продолж. табл. 16

Радианная мера угла
 **1** *радиан* — центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности. $\angle AOB = 1$ рад. Это означает, что $\cup AB = OA = R$. $\angle AOC = 180° = \pi$ (радиан). $\angle AOC$ — развернутый. $1° = \frac{\pi}{180}$ радиан. 1 радиан $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°$

Объяснение и обоснование

1. Понятие угла. В курсе геометрии угол определяется как геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки. Например, угол AOB, изображенный в первом пункте таблицы 16, — это угол, образованный лучами OA и OB.

Угол можно рассматривать также как результат поворота луча на плоскости около начальной точки. Например, поворачивая луч OA около точки O от начального положения OA до конечного положения OB, также получим угол AOB. Заметим, что достичь конечного положения OB можно при повороте луча OA как по часовой стрелке, так и против нее.

2. Измерение углов. Данные выше различные определения угла приводят к различному пониманию измерения углов.

В курсе геометрии каждому углу соответствует его *градусная мера*, которая может находиться только в пределах от 0° до 180°, и поэтому, например, для прямого угла AOB (см. пункт 2 табл. 16) его мера записывается однозначно: $\angle AOB = 90°$ ($1°$ — это $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла).

При измерении углов поворота договорились, что **направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным.**

Поэтому при измерении углов, образованных при повороте луча около начальной точки, мы можем получить как положительные, так и отрицательные значения углов поворота. Например, если угол AOB, в котором лучи OA и OB являются взаимно перпендикулярными, получен при повороте луча OA на угол 90° против часовой стрелки, то значение угла поворота β (см. соответствующий рисунок в пункте 2 табл. 16) равно +90° (или просто 90°). Если тот же угол AOB получен при повороте луча OA на угол 270° по часовой стрелке (понятно, что полный оборот — это 360°), то значение угла поворота γ равно (−270°). Этот же угол AOB можно получить также при повороте луча OA против часовой стрелки на 90° и еще на полный оборот; в этом случае значение угла поворота φ равно $90° + 360°$, то есть 450° и т. д.

Выбрав как значение угла поворота произвольное отрицательное или положительное число (градусов), мы всегда можем повернуть луч OA (по часовой стрелке или против нее) и получить соответствующий угол AOB. Таким образом, величина угла поворота (в градусах) может принимать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Для измерения углов принимают определенный угол за единицу измерения и с ее помощью измеряют другие углы.

За единицу измерения можно принять любой угол, например один градус ($1°$) — $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла.

В технике за единицу измерения углов принимают полный оборот (заметим, что 1 градус — это $\frac{1}{360}$ часть полного оборота).

В мореходстве за единицу измерения углов принимают румб, равный $\frac{1}{32}$ части полного оборота.

В математике и физике, кроме градусной меры углов, используется также *радианная мера углов*.

Если рассмотреть некоторую окружность, то

1 *радиан* — это центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности.

Таким образом, если угол AOB равен одному радиану (рис. 59), то это означает, что $\cup AB = OA = R$.

Установим связь между радианной и градусной мерами углов.

Центральному развернутому углу AOC (рис. 59), с градусной мерой $180°$, соответствует полуокружность, то есть дуга, длина которой равна πR, а углу в один радиан — дуга длиной R. Итак, радианная мера развернутого угла AOC равна $\frac{\pi R}{R} = \pi$ радиан. Таким образом, одному и тому же развернутому углу AOC соответствует градусная мера $180°$ и радианная мера π радиан. Это соответствие часто записывают так:

$$180° = \pi \text{ радиан.}$$

Отсюда получаем следующие соответствия:

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ радиан,}} \qquad \boxed{1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°}$$

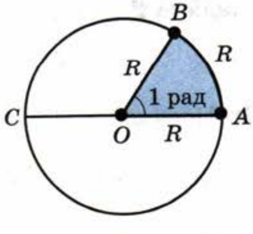


Рис. 59

Чтобы найти радианную меру x угла по его градусной мере $\varphi°$ (или наоборот), можно воспользоваться следующей пропорцией:

$$180° — \pi \text{ радиан,} \qquad \varphi° — x \text{ радиан.}$$

Из этой пропорции получаем формулы:

$$x = \frac{\varphi°}{180°} \cdot \pi \text{ (радиан);} \qquad \varphi° = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

Примеры решения задач

Задача 1 Выразите в радианах величины углов, градусная мера которых равна: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°.

▶ Поскольку 30° — это $\frac{1}{6}$ часть угла 180°, то из соответствия $180° = \pi$ (рад) получаем, что $30° = \frac{\pi}{6}$ (рад).

Аналогично можно вычислить и величины других углов.

В общем случае учитываем, что $1° = \frac{\pi}{180}$ радиан, тогда:

$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ (рад); $60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ (рад);

$90° = \frac{\pi}{2}$ (рад); $270° = \frac{3\pi}{2}$ (рад); $360° = 2\pi$ (рад). ◁

Поскольку радианными мерами рассмотренных углов приходится пользоваться достаточно часто, запишем полученные результаты в виде справочной таблицы:

Таблица 17

Градусная мера угла	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Замечание. Чаще всего при записи радианной меры углов наименование единицы измерения «радиан» (или сокращенно *рад*) не пишут, но подразумевают его. Например, вместо равенства $90° = \frac{\pi}{2}$ радиан пишут иногда $90° = \frac{\pi}{2}$.

Задача 2 Выразите в градусах величины углов, радианнная мера которых равна: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

▶ Поскольку $\frac{\pi}{10}$ — это $\frac{1}{10}$ часть угла π, то из соответствия $\pi = 180°$ получаем, что $\frac{\pi}{10} = 18°$. Аналогично можно вычислить и величины углов $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

В общем случае учитываем, что 1 радиан $= \frac{180°}{\pi}$, тогда:

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$; $5 = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{900°}{\pi} \approx 286°$. ◁

Отметим, что далее в этом разделе будет рассматриваться в основном радианная мера угла и утверждения будут доказаны для радианной меры угла. Однако их можно переформулировать и для градусной меры угла, пользуясь приведенными выше соотношениями.

Условимся далее вместо слов «угол, радианная мера которого равна α радиан» говорить коротко «угол α».

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно определить угол с помощью поворота луча. Как при таком определении измеряются углы?
2. Как вы понимаете такие утверждения: «Величина угла равна $450°$», «Величина угла равна $(-225°)$»? Изобразите эти углы.
3. Как можно определить угол в $1°$?
4. Дайте определение угла в 1 радиан.
5. Чему равна градусная мера угла в π радиан?
6. Объясните на примерах, как по радианной мере угла найти его градусную меру и наоборот — по градусной мере угла найти его радианную меру.

Упражнения

1°. Изобразите угол, образованный поворотом луча OA около точки O на:

1) $270°$; 2) $-270°$; 3) $720°$; 4) $-90°$;
5) $225°$; 6) $-45°$; 7) $540°$; 8) $-180°$;
9) $360°$; 10) $-60°$.

2°. Чему равны градусные и радианные меры углов поворота, показанных на рисунке 60?

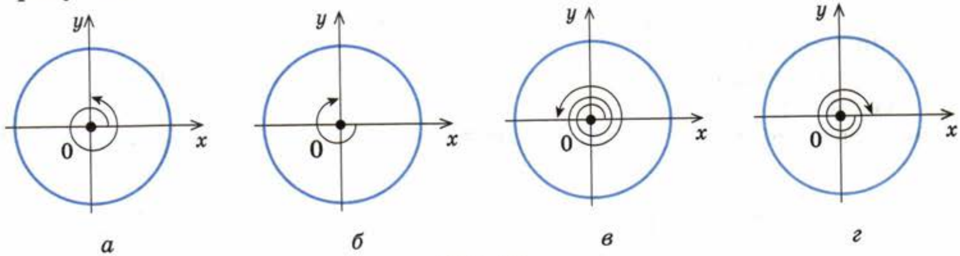


Рис. 60

3. Выразите в радианной мере величины углов, градусная мера которых равна:

1°) $225°$; 2°) $36°$; 3) $100°$; 4) $-240°$;
5) $-22{,}5°$; 6) $-150°$.

4. Выразите в градусной мере величины углов, радианная мера которых равна:

1) 3π; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$;
5) $-\frac{\pi}{18}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$; 8) 3.

5. С помощью калькулятора (или таблиц) найдите радианные меры углов, градусная мера которых равна:

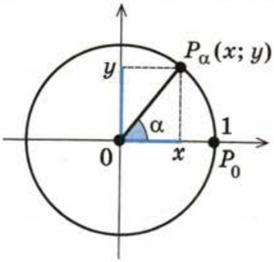
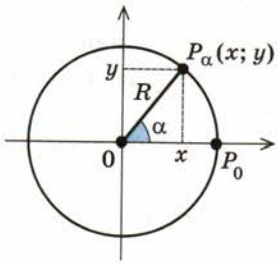
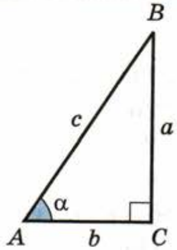
1) 27°; 2) 132°; 3) 43°; 4) 114°.

6. С помощью калькулятора (или таблиц) найдите градусные меры углов, радианная мера которых равна:

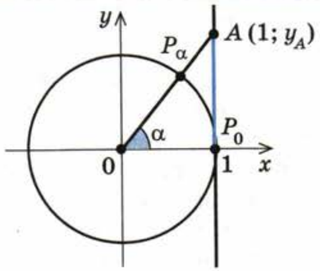
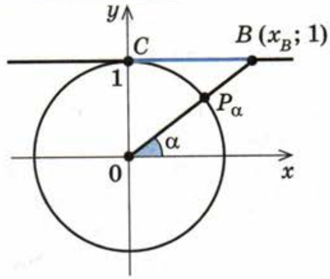
1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454.

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА И ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Таблица 18

1. Определение тригонометрических функций		
Через единичную окружность ($R = 1$)	Через произвольную окружность (R — радиус окружности)	Через прямоугольный треугольник (для острых углов)
		
$\mathbf{sin}\ \alpha = \boldsymbol{y}$ — ордината точки P_α $\mathbf{cos}\ \alpha = \boldsymbol{x}$ — абсцисса точки P_α $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ $\boxed{\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$	$\sin\alpha = \frac{y}{R}$ $\cos\alpha = \frac{x}{R}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$
2. Тригонометрические функции числового аргумента		
sin (числа α) = sin (угла в α радиан) cos (числа α) = cos (угла в α радиан) tg (числа α) = tg (угла в α радиан) ctg (числа α) = ctg (угла в α радиан)		

Продолж. табл. 18

3. Линии тангенсов и котангенсов	
 AP_0 — линия тангенсов ($AP_0 \parallel Oy$) $\operatorname{tg} \alpha = y_A$ — ордината соответствующей точки линии тангенсов	 CB — линия котангенсов ($CB \parallel Ox$) $\operatorname{ctg} \alpha = x_B$ — абсцисса соответствующей точки линии котангенсов

Объяснение и обоснование

1. Определение тригонометрических функций. Из курса геометрии вам известно определение тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике. Напомним их.

Синусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (рис. 61).

Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Тангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение длины противолежащего катета к длине прилежащего: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Котангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение длины прилежащего катета к длине противолежащего: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

В курсе геометрии было обосновано, что синус и косинус острого угла зависят только от величины угла и не зависят от длин сторон треугольника и его расположения, то есть синус и косинус (а таким образом, и тангенс, и котангенс) являются функциями величины угла, которые называются *тригонометрическими функциями*.

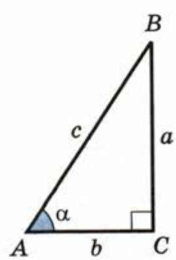


Рис. 61

Для сокращения формулировок мы будем использовать термин «тригонометрическая функция угла», понимая, что рассматривается «тригонометрическая функция величины угла» (при этом величина угла может быть выражена как в радианах, так и в градусах).

Также в курсе геометрии с использованием окружности с центром в начале координат было введено определение тригонометрических функций для углов от 0° до 180°. Эти определения можно применить для нахождения тригонометрических функций любых углов. Напомним их (но теперь будем рассматривать любые углы α от $-\infty$ до $+\infty$).

Возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат. Обозначим точку окружности на положительной полуоси абсцисс через P_0 (рис. 62). Необходимые нам углы будем образовывать поворотом радиуса OP_0 около точки O. Пусть в результате поворота на угол α около точки O радиус OP_0 займет положение OP_α (говорят, что при повороте на угол α радиус OP_0 переходит в радиус OP_α, а точка P_0 переходит в точку P_α). Напомним, что при $\alpha > 0$ радиус OP_0 поворачивается против часовой стрелки, а при $\alpha < 0$ — по часовой стрелке.

Пусть точка P_α имеет координаты $(x; y)$. Тогда:

синусом угла α называется отношение ординаты точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее радиусу: $\sin\alpha = \frac{y}{R}$;

косинусом угла α называется отношение абсциссы точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее радиусу: $\cos\alpha = \frac{x}{R}$;

тангенсом угла α называется отношение ординаты точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее абсциссе: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (конечно, при $x \neq 0$);

котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее ординате: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (при $y \neq 0$).

Как и для тригонометрических функций острых углов, значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят только от величины угла α и не зависят от радиуса R*. Удобно взять $R = 1$, что позволит несколько упростить приведенные определения тригонометрических функций.

Окружность радиуса 1 с центром в начале координат будем называть *единичной окружностью*.

Пусть при повороте на угол α точка $P_0(1; 0)$ переходит в точку $P_\alpha(x; y)$ (то есть при повороте на угол α радиус OP_0 переходит в радиус OP_α) (рис. 63).

Синусом угла α **называется ордината точки** $P_\alpha(x; y)$ **единичной окружности:**

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом угла α **называется абсцисса точки** $P_\alpha(x; y)$ **единичной окружности:**

$$\cos\alpha = x.$$

Тангенсом угла α **называется отношение ординаты точки** $P_\alpha(x; y)$ **единичной окружности к ее абсциссе, то есть отношение** $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

* Это следует из того, что две концентрические окружности гомотетичны (центр гомотетии — точка O, а коэффициент *гомотетии* k — отношение радиусов этих окружностей), тогда и точки P_α на этих окружностях также будут гомотетичны. Таким образом, при переходе от одной окружности к другой в определениях тригонометрических функций числитель и знаменатель соответствующей дроби умножаются на k, а значение дроби не изменяется.

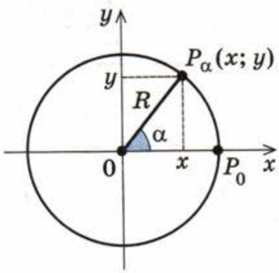


Рис. 62

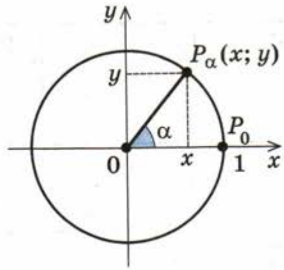


Рис. 63

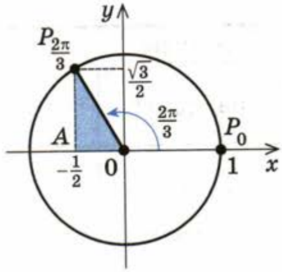


Рис. 64

Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (где $\cos\alpha \neq 0$).

Котангенсом угла α **называется отношение абсциссы точки** $P_\alpha(x;\ y)$ **единичной окружности к ее ординате, то есть отношение** $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Таким образом, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (где $\sin\alpha \neq 0$) .

Заметим, что при $\cos\alpha = 0$ значение функции $\operatorname{tg}\alpha$ не определено, а значение функции $\operatorname{ctg}\alpha$ не определено при $\sin\alpha = 0$.

Пример Пользуясь этими определениями, найдем синус, косинус, тангенс и котангенс угла $\dfrac{2\pi}{3}$ радиан.

► Рассмотрим единичную окружность (рис. 64). При повороте на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ радиус OP_0 переходит в радиус $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ (а точка P_0 переходит в точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$). Координаты точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ можно найти, используя свойства прямоугольного треугольника $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ (с углами 60° и 30° и гипотенузой 1): $x = -OA = -\dfrac{1}{2}$; $y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2};\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3};\ \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\ \triangleleft$$

Аналогично находятся значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов, градусные и радианные меры которых указаны в верхней строке таблицы 19 (с. 156).

Укажем, что таким образом можно найти тригонометрические функции только некоторых углов. Тригонометрические функции произвольного угла обычно находят с помощью калькулятора или таблиц.

2. Тригонометрические функции числового аргумента. Введенные определения позволяют рассматривать не только тригонометрические функции углов, но и тригонометрические функции числовых аргументов, если

Таблица 19

α									
α	градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

рассматривать тригонометрические функции числа α как соответствующие тригонометрические функции угла в α радиан. То есть:

синус числа α ***— это синус угла в*** α ***радиан;***
косинус числа α ***— это косинус угла в*** α ***радиан.***

Например: $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\text{ радиан}\right)=\sin 30°=\frac{1}{2}$ (см. также пункт 2 табл. 7).

3. Линии тангенсов и котангенсов. Для решения некоторых задач полезно иметь представление о линиях тангенсов и котангенсов.

Проведем через точку P_0 единичной окружности прямую AP_0, параллельную оси Oy (рис. 65). Эта прямая называется *линией тангенсов.*

Пусть α — произвольное число (или угол), для которого $\cos\alpha\neq 0$. Тогда точка P_α не лежит на оси Oy и прямая OP_α пересекает линию тангенсов в точке A. Поскольку прямая OP_α проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид $y=kx$. Но эта прямая проходит через точку P_α с координатами ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$), значит, координаты точки P_α удовлетворяют уравнению прямой $y = kx$, то есть $\sin\alpha=k\cos\alpha$. Отсюда $k=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Следовательно, прямая OP_α имеет уравнение $y=(\operatorname{tg}\alpha)\,x$. Прямая AP_0 имеет уравнение $x = 1$. Чтобы найти ординату точки A, достаточно в уравнение прямой OP_α подставить $x = 1$. Получаем $y_A=\operatorname{tg}\alpha$. Таким образом,

тангенс угла (числа) α ***— это ордината соответствующей точки на линии тангенсов.***

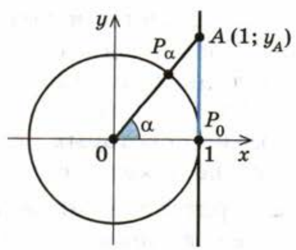


Рис. 65

Аналогично вводится и понятие *линии котангенсов*: это прямая CB (рис. 66), которая проходит через точку $C\,(0;\,1)$ единичной окружности параллельно оси Ox.

Если α — произвольное число (или угол), для которого $\sin\alpha \neq 0$ (то есть точка P_α не лежит на оси Ox), то прямая OP_α пересекает линию котангенсов в некоторой точке $B(x_B; 1)$.

Аналогично вышеизложенному обосновывается, что $x_B = \operatorname{ctg}\alpha$, таким образом,

котангенс угла (числа) α ***— это абсцисса соответствующей точки на линии котангенсов.***

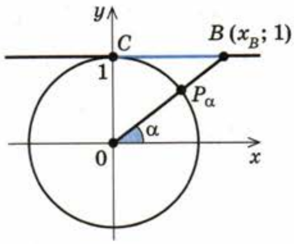


Рис. 66

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте определения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике.
2. Сформулируйте определения тригонометрических функций произвольного угла:
   а) используя окружность радиуса R с центром в начале координат;
   б) используя единичную окружность.
3. Что имеют в виду, когда говорят о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе числа α?

Упражнения

1°. Постройте на единичной окружности точку P_α, в которую переходит точка $P_0(1; 0)$ единичной окружности при повороте на угол α. В какой координатной четверти находится точка P_α в заданиях 3–6?

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

2. Найдите значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (если они существуют) при:

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

4) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; 5*) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$; 6*) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

3°. Пользуясь определением синуса и косинуса, с помощью единичной окружности укажите знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

4*. Пользуясь линией тангенсов, укажите знак $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$.

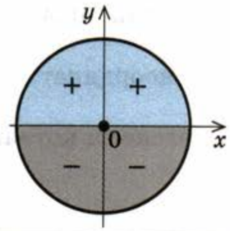
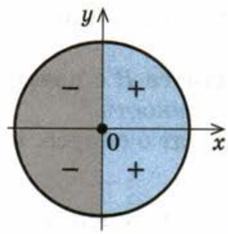
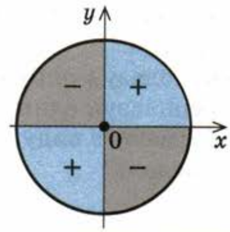
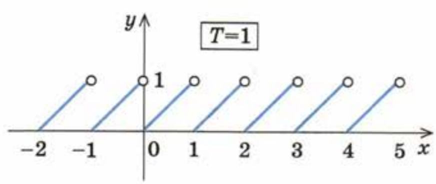
5*. Пользуясь линией котангенсов, укажите знак ctg α, если:

1) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{9\pi}{4}$.

§ 13. СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Таблица 20

<table>
<tr><td colspan="6">1. Знаки тригонометрических функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sin \alpha$
</td><td colspan="2">$\cos \alpha$
</td><td colspan="2">$\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$
</td></tr>
<tr><td colspan="6">2. Четность и нечетность</td></tr>
<tr><td colspan="3">Косинус — четная функция
$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$</td><td colspan="3">Синус, тангенс и котангенс — нечетные функции
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="6">3. Периодичность</td></tr>
<tr><td colspan="6">Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции числа $(x + T)$ и $(x - T)$ также принадлежат области определения и выполняется равенство
$$f(x + T) = f(x).$$</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">$y = \{x\}$ — дробная часть числа x
</td><td colspan="3">Через промежутки длиной T (на оси Ox) вид графика периодической функции повторяется</td></tr>
<tr><td colspan="3">Если T — период функции, то $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — также периоды этой функции ($k \in N$)</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 20

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ **$\cos(x + 2\pi) = \cos x$**	*Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *имеют период* $T = 2\pi$	$T = 2\pi$ — общий период для всех функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ **$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$**	*Функции* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *имеют период* $T = \pi$	

Объяснение и обоснование

1. Знаки тригонометрических функций легко определить, исходя из определения этих функций.

- Например, $\sin\alpha$ — это ордината соответствующей точки P_α единичной окружности. Поэтому значение $\sin\alpha$ будет положительным, если точка P_α имеет положительную ординату, а это будет тогда, когда точка P_α находится в I или II четверти (рис. 67). Если точка P_α находится в III или IV четверти, то ее ордината отрицательна, и поэтому $\sin\alpha$ тоже отрицателен. Аналогично, учитывая, что $\cos\alpha$ — это абсцисса соответствующей точки P_α, получаем, что $\cos\alpha > 0$ в I и IV четвертях (абсцисса точки P_α положительна) и $\cos\alpha < 0$ во II и III четвертях (абсцисса точки P_α отрицательна) (рис. 68).

  Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ там, где $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, то есть в I и III четвертях, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ там, где $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют разные знаки, то есть во II и IV четвертях (рис. 69). ○

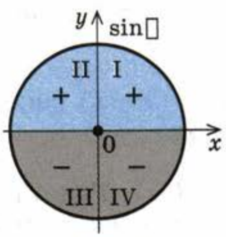


Рис. 67

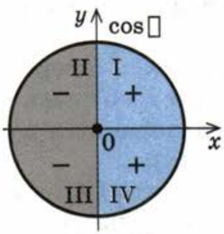


Рис. 68

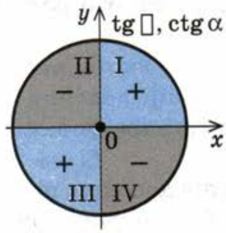


Рис. 69

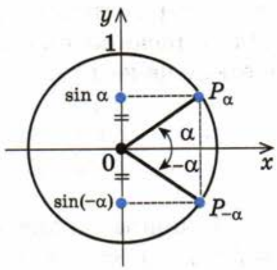


Рис. 70

2. Четность и нечетность тригонометрических функций.

- Чтобы исследовать тригонометрические функции на четность и нечетность, заметим, что на единичной окружности точки P_α и $P_{-\alpha}$ расположены симметрично относительно оси Ox (рис. 70). Следовательно, эти точки имеют одинаковые абсциссы и противоположные ординаты.

  Тогда $\cos(-\alpha) = x_{P_{-\alpha}} = x_{P_\alpha} = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = y_{P_{-\alpha}} = -y_{P_\alpha} = -\sin\alpha$.

  Таким образом, **$\cos x$ — четная функция, а $\sin x$ — нечетная.**

  Тогда $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

  Поэтому **$\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции.** ○

З а м е ч а н и е. Приведенное исследование четности и нечетности функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ неявно опирается на утверждение, что *точки* P_α *и* $P_{-\alpha}$ *будут расположены симметрично относительно оси* Ox *при любом значении* α. Приведем план возможного обоснования этого утверждения.

1) Если $\alpha \in [0;\ \pi]$ или $\alpha \in [-\pi;\ 0]$, то утверждение очевидно в силу симметрии единичной окружности относительно оси Ox, проходящей через центр окружности.
2) В силу этой же симметрии утверждение очевидно и при $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ или $\alpha \in [-2\pi;\ 0]$.
3) Для всех других значений угла используем утверждение (которое мы примем без доказательства), что его *радианную меру* α *можно записать в виде* $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, *где* α_0 *(радиан) удовлетворяет неравенству* $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 2\pi$, и, учитывая, что на единичной окружности углам α_0 и $\alpha_0 + 2\pi k$ (где $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$) соответствует одна и та же точка, сводим этот случай к случаю 2.

Четность и нечетность тригонометрических функций можно применять для вычисления значений тригонометрических функций отрицательных углов (чисел).

Например, ▶ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

3. Периодичность тригонометрических функций. Множество процессов и явлений, которые происходят в природе и технике, имеют повторяющийся характер (например, движение Земли вокруг Солнца, движение маховика). Для описания процессов такого рода используют так называемые периодические функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения функции числа $(x + T)$ и $(x - T)$ также принадлежат области определения и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Из приведенного определения получаем, что $f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x)$, то есть, если T — период функции $f(x)$, то и $-T$ тоже период этой функции. Также можно доказать, что $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — тоже периоды этой функции ($k \in \boldsymbol{N}$).

Учитывая, что на единичной окружности числам (углам) α и $\alpha + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка (рис. 71), получаем:

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha.$$

Тогда $2\pi k$ ($k \neq 0$) является периодом функций $\sin x$ и $\cos x$.

При $k = 1$ получаем, что $T = 2\pi$ — это период функций $\sin x$ и $\cos x$.

Докажем, что эти функции не могут иметь меньший положительный период. Чтобы доказать, что $T = 2\pi$ — наименьший положительный период косинуса, допустим, что $T > 0$ — период функции $\cos x$. Тогда для любого значения x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Взяв $x = 0$, получаем $\cos T = 1$. Но это означает, что на единичной окружности при повороте на угол T точка P_0 снова попадает в точку P_0, то есть $T = 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, любой период косинуса должен быть кратным 2π, а значит,

2π — наименьший положительный период косинуса. ○

● Чтобы обосновать, что $T = 2\pi$ — наименьший положительный период функции $\sin x$, достаточно в равенстве $\sin(x + T) = \sin x$, которое выполняется для любых значений x, взять $x = \frac{\pi}{2}$. Получаем $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Но это означает, что при повороте на угол $T + \frac{\pi}{2}$ точка P_0 попадает в точку $A\,(0;\,1)$ (рис. 71), то есть $T + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, таким образом, $T = 2\pi k$. Следовательно, любой период синуса должен быть кратным 2π, а значит,

2π — наименьший положительный период синуса. ○

● Если учесть, что на единичной окружности точки P_α и $P_{\alpha+\pi}$ являются диаметрально противоположными, то этим точкам соответствует одна и та же точка на линии тангенсов (рис. 72) или на линии котангенсов (рис. 73). Тогда $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$, также $\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$. То есть периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является πk ($k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

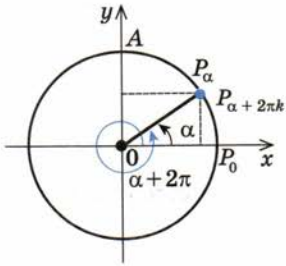


Рис. 71

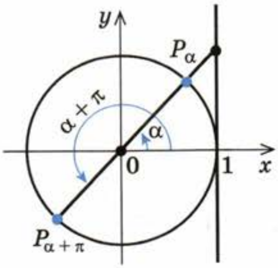


Рис. 72

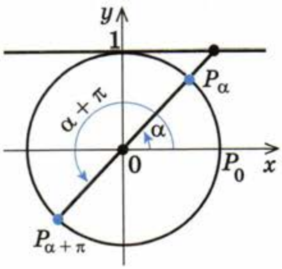


Рис. 73

Наименьшим положительным периодом для функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является $T = \pi$.

Чтобы доказать это, достаточно в равенстве $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ взять $x = 0$. Тогда получим $\operatorname{tg} T = 0$. Таким образом, $T = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Итак, любой период тангенса должен быть кратным π, а значит, π — наименьший положительный период тангенса. Аналогично в соответствующем равенстве для $\operatorname{ctg} x$ достаточно взять $x = \frac{\pi}{2}$. ○

● Чтобы иметь представление о поведении *графика периодической функции* $y = f(x)$, напомним, что по определению график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек M координатной плоскости, которые имеют координаты $(x;\, y) = (x;\, f(x))$. Первая координата для точек графика выбирается произвольно из области определения функции. Выберем как первую координату значение $x + T$ (или в обобщенном виде — значение $x + kT$ при целом значении k) и учтем, что для периодической функции $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (в общем случае $f(x + kT) = f(x)$). Тогда графику функции $y = f(x)$ будет принадлежать также точка M_1 координатной плоскости с координатами:

$$(x + T;\ y) = (x + T;\ f(x + T)) = (x + T;\ f(x)).$$

Точку $M_1(x + T;\ f(x))$ можно получить из точки $M(x;\ f(x))$ параллельным переносом вдоль оси Ox на T единиц (рис. 74). В общем случае точку $M_2(x + kT;\ f(x))$ можно получить из точки $M(x;\ f(x))$ параллельным переносом вдоль оси Ox на kT единиц. Таким образом, через промежуток T вид графика периодической функции будет повторяться. Поэтому **для построения графика периодической функции с периодом T достаточно построить график на любом промежутке длиной T (например, на промежутке $[0;\ T]$), а потом полученную линию параллельно перенести вправо и влево вдоль оси Ox на расстояние kT, где k — любое натуральное число.** ○

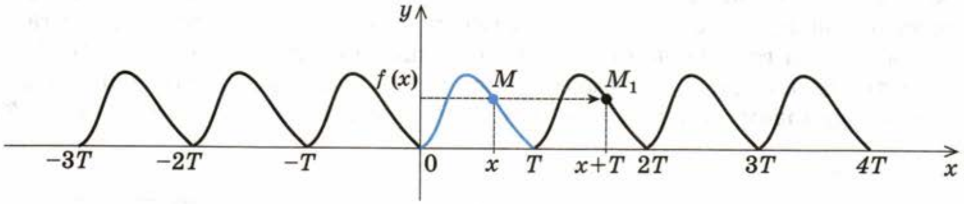


Рис. 74

Примеры решения задач

Задача 1 Пользуясь периодичностью, четностью и нечетностью тригонометрических функций, найдите:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(-570°)$.

Решение

1. ▶ $\sin\frac{21\pi}{2} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$
$= \sin\left(5\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$ ◁

2. ▶ $\cos(-405°) = \cos 405° =$
$= \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ ◁

Комментарий

1) Учитывая, что значение функции $\sin x$ повторяется через период 2π, выделим в заданном аргументе число, кратное периоду (то есть 10π), а потом воспользуемся равенством $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$).

2) Сначала учитываем четность косинуса: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а потом его периодичность с периодом $2\pi = 360°$:

$$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha.$$

3. ▶ $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$ ◁

3) Функция тангенс периодическая с периодом π, поэтому выделяем в заданном аргументе число, кратное периоду (то есть 5π), а потом используем равенство $\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$.

4. ▶ $\operatorname{ctg}(-570°)=-\operatorname{ctg}570°=$
$=-\operatorname{ctg}(540°+30°)=$
$=-\operatorname{ctg}(180°\cdot3+30°)=$
$=-\operatorname{ctg}30°=-\sqrt{3}.$ ◁

4) Сначала учитываем нечетность котангенса: $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, а потом его периодичность с периодом $\pi=180°$:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+180°\cdot k)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Задача 2* Докажите утверждение: **если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y=Af(kx+b)$ также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$ (A, k, b — некоторые числа и $k\neq0$).**

Доказательство

▶ Пусть $\varphi(x)=Af(kx+b)$ и $T_1=\frac{T}{|k|}$.
Тогда $\varphi(x+T_1)=Af(k(x+T_1)+b)=$
$=Af\left(k\left(x+\frac{T}{|k|}\right)+b\right)=Af(kx\pm T+b)=$
$=Af(kx+b\pm T)=Af(kx+b)=\varphi(x)$,
а это и означает, что функция $\varphi(x)=Af(kx+b)$ имеет период

$$T_1=\frac{T}{|k|}.$$ ◁

Комментарий

По определению функция $\varphi(x)=Af(kx+b)$ будет периодической с периодом $T_1=\frac{T}{|k|}$, если для любого значения x из области определения φ значения этой функции в точках x и $x+T_1$ равны, то есть $\varphi(x+T_1)=\varphi(x)$.
В ходе обоснования учитывается, что $k\cdot\frac{T}{|k|}$ при $k>0$ равно $k\cdot\frac{T}{k}=T$, а при $k<0$ равно $k\cdot\frac{T}{-k}=-T$. Также учтено, что функция $f(x)$ по условию периодическая с периодом T, и поэтому $f(x_1\pm T)=f(x_1)$, где $x_1=kx+b$.

Используем утверждение, доказанное в задаче 2, для нахождения периодов функций.

Например,

1) ▶ если функция $\sin x$ имеет период $T=2\pi$, то функция $\sin 4x$ имеет период

$$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};$$ ◁

2) ▶ если функция $\operatorname{tg}x$ имеет период $T=\pi$, то функция $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ имеет период

$$T_1=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi.$$ ◁

Вопросы для контроля

1. а) Назовите знаки тригонометрических функций в каждой из координатных четвертей.
   б*) Обоснуйте знаки тригонометрических функций в каждой из координатных четвертей.
2. а) Какие из тригонометрических функций являются четными, а какие нечетными? Приведите примеры использования четности и нечетности для вычисления значений тригонометрических функций.
   б*) Обоснуйте четность или нечетность соответствующих тригонометрических функций.
3. а) Какая функция называется периодической? Приведите примеры.
   б*) Обоснуйте периодичность тригонометрических функций. Укажите наименьший положительный период для синуса, косинуса, тангенса и котангенса и обоснуйте, что в каждом случае этот период действительно является наименьшим положительным периодом.

Упражнения

1. Пользуясь периодичностью, четностью и нечетностью тригонометрической функции, найдите:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 2) $\sin(-750°)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 945°$;

5) $\sin\frac{25\pi}{4}$; 6) $\cos(-3630°)$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{tg} 600°$.

2*. Среди данных функций найдите периодические и укажите наименьший положительный период для каждой из них:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sin 2x$; 3) $f(x) = |x|$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$; 5) $f(x) = 3$.

3. Найдите период каждой из данных функций:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} 5x$; 3) $y = \sin\frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{ctg} 3x$; 5) $y = \cos\frac{2x}{5}$.

4. На каждом из рисунков 75–78 приведена часть графика некоторой периодической функции с периодом T. Продолжите график на отрезке $[-2T; 3T]$.

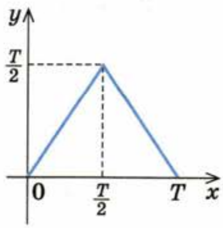


Рис. 75

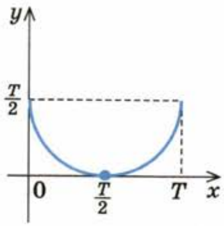


Рис. 76

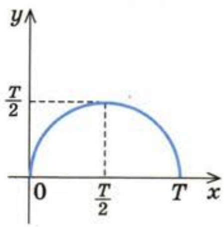


Рис. 77

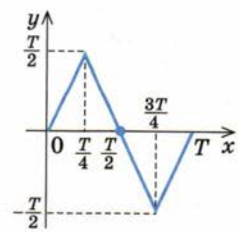


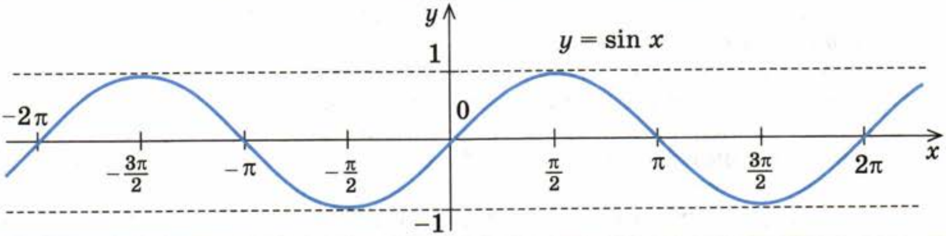
Рис. 78

§ 14. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА И ИХ ГРАФИКИ

14.1. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \sin x$ И ЕЕ ГРАФИК

Таблица 21

График функции $y = \sin x$ (*синусоида*)



Свойства функции $y = \sin x$

1. *Область определения*: $\boldsymbol{R}$ (x — любое действительное число).

$$\boxed{D(\sin x) = R}$$

2. *Область значений*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$

3. *Функция* ***нечетная***: $\sin(-x) = -\sin x$
(*график симметричен относительно начала координат*).

4. *Функция периодическая* с периодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

5. *Точки пересечения с осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

6. *Промежутки знакопостоянства*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x > 0 \text{ при } x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z \\ \sin x < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Промежутки возрастания и убывания*:

функция $\sin x$ возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$, и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

8. ***Наибольшее значение функции*** **равно 1 при** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Наименьшее значение функции равно **−1 при** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Объяснение и обоснование

Описывая свойства функций, мы будем чаще всего выделять такие их характеристики: 1) область определения; 2) область значений; 3) четность или нечетность; 4) периодичность; 5) точки пересечения с осями координат; 6) промежутки знакопостоянства; 7) промежутки возрастания и убывания*; 8) наибольшее и наименьшее значения функции.

З а м е ч а н и е. Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox (то есть те значения аргумента, при которых функция равна нулю) называют *нулями функции*.

Напомним, что значение синуса — это ордината соответствующей точки единичной окружности (рис. 79). Поскольку ординату можно найти для любой точки единичной окружности (в силу того, что через любую точку окружности всегда можно провести единственную прямую, перпендикулярную оси ординат), то *область определения* функции $y = \sin x$ — все действительные числа. Это можно записать так: $\boldsymbol{D}$ **(sin *x*) =** $\boldsymbol{R}$.

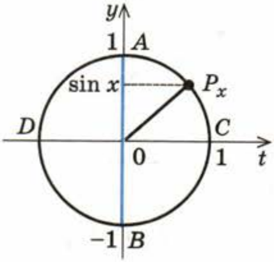


Рис. 79

Для точек единичной окружности ординаты находятся в промежутке $[-1; 1]$ и принимают все значения от -1 до 1, поскольку через любую точку отрезка $[-1; 1]$ оси ординат (который является диаметром единичной окружности) всегда можно провести прямую, перпендикулярную оси ординат, и получить точку окружности, которая имеет рассматриваемую ординату. Таким образом, для функции $y = \sin x$ *область значений*: $y \in [-1; 1]$. Это можно записать так: $\boldsymbol{E}$ **(sin *x*) = [−1; 1]**.

Как видим, *наибольшее значение* функции $\sin x$ равно единице. Это значение достигается только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка A, то есть при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьшее значение функции $\sin x$ равно минус единице. Это значение достигается только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка B, то есть при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Как было показано в § 13, синус — *нечетная функция*: $\sin(-x) = -\sin x$, поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

В § 13 было обосновано также, что синус — *периодическая* функция с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, таким образом, через промежутки длиной 2π вид графика функции $\sin x$ повторяется. Поэтому при построении графика этой функции достаточно построить график на любом промежутке длиной 2π, а потом полученную линию параллельно перенести вправо и влево вдоль оси Ox на расстояние $kT = 2\pi k$, где k — любое натуральное число.

---

* Промежутки возрастания и убывания функции иногда еще называют промежутками монотонности функции.

Чтобы найти *точки пересечения графика функции с осями координат*, напомним, что на оси Oy значение $x = 0$. Тогда соответствующее значение $y = \sin 0 = 0$, то есть график функции $y = \sin x$ проходит через начало координат.

На оси Ox значение $y = 0$. Поэтому необходимо найти такие значения x, при которых $\sin x$, то есть ордината соответствующей точки единичной окружности, равна нулю. Это будет тогда и только тогда, когда на единичной окружности будут выбраны точки C или D, то есть при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. рис. 79).

Промежутки знакопостоянства. Как было обосновано в § 13, значения функции синус положительны (то есть ордината соответствующей точки единичной окружности положительна) в I и II четвертях (рис. 80). Таким образом, $\sin x > 0$ при всех $x \in (0; \pi)$, а также, учитывая период, при всех $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значения функции синус отрицательны (то есть ордината соответствующей точки единичной окружности отрицательна) в III и IV четвертях, поэтому $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки возрастания и убывания

Учитывая периодичность функции $\sin x$ с периодом $T = 2\pi$, достаточно исследовать ее на возрастание и убывание на любом промежутке длиной 2π, например на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 81, *а*), то при увеличении аргумента x $(x_2 > x_1)$ ордината соответствующей точки единичной окружности увеличивается (то есть $\sin x_2 > \sin x_1$), следовательно, на этом промежутке функция $\sin x$ возрастает. Учитывая периодичность функции $\sin x$, делаем вывод, что она также возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

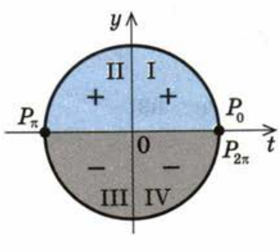
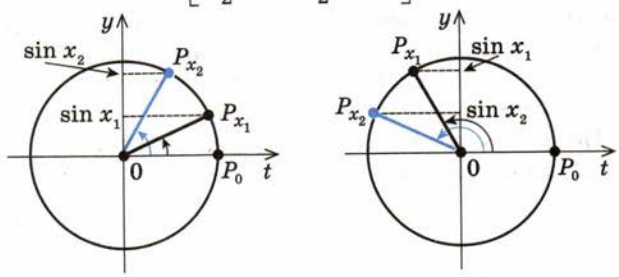


Рис. 80



а *б*

Рис. 81

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 81, *б*), то при увеличении аргумента x $(x_2 > x_1)$ ордината соответствующей точки единичной окружности уменьшается (то есть $\sin x_2 < \sin x_1$), таким образом, на этом промежутке функция $\sin x$ убывает. Учитывая периодичность функции $\sin x$, делаем вывод, что она также убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проведенное исследование позволяет обоснованно построить график функции $y = \sin x$. Учитывая периодичность этой функции (с периодом 2π), достаточно сначала построить график на любом промежутке длиной 2π, например на промежутке $[-\pi; \pi]$. Для более точного построения точек графика воспользуемся тем, что значение синуса — это ордината соответствующей точки единичной окружности. На рисунке 82 показано построение графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; \pi]$. Учитывая нечетность функции $\sin x$ (ее график симметричен относительно начала координат), для построения графика на промежутке $[-\pi; 0]$ отображаем полученную кривую симметрично относительно начала координат (рис. 83).

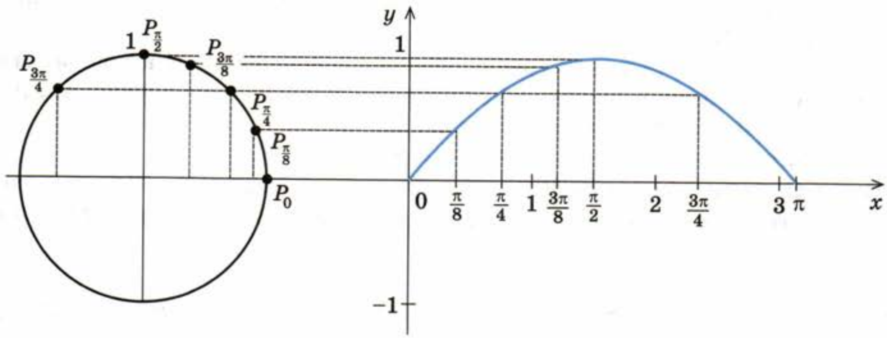


Рис. 82

Поскольку мы построили график на промежутке длиной 2π, то, учитывая периодичность синуса (с периодом 2π), повторяем вид графика на каждом промежутке длиной 2π (то есть переносим параллельно график вдоль оси Ox на $2\pi k$, где k — целое число).

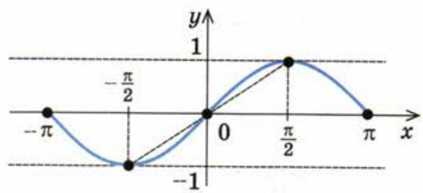


Рис. 83

Получаем график, который называется *синусоидой* (рис. 84).

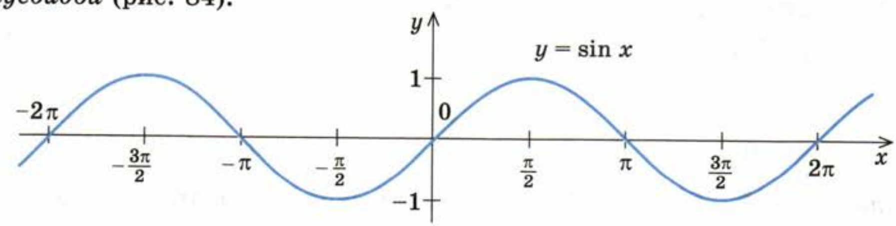


Рис. 84

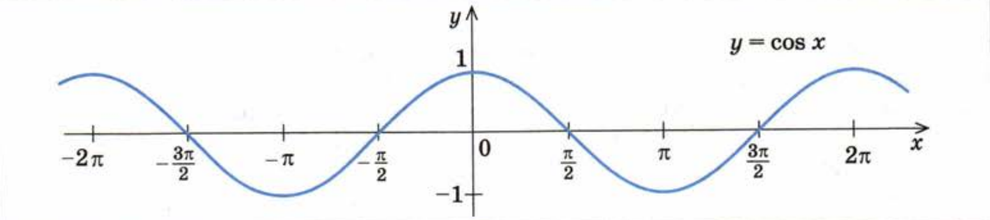
Замечание. Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, множество процессов, таких как колебания струны, маятника, напряжения в цепи переменного тока и т. п., описываются функцией, которая задается формулой $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*.

График функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ можно получить из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением ее вдоль координатных осей и параллельным переносом вдоль оси Ox. Чаще всего гармоническое колебание является функцией времени t. Тогда оно задается формулой $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

14.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \cos x$ И ЕЕ ГРАФИК

Таблица 22

График функции $y = \cos x$ (косинусоида)



Свойства функции $y = \cos x$

1. *Область определения*: $\boldsymbol{R}$ (x — любое действительное число).

$$\boxed{D(\cos x) = \boldsymbol{R}}$$

2. *Область значений*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\cos x) = [-1; 1]}$
3. *Функция* ***четная***: $\cos(-x) = \cos x$ (график симметричен относительно оси Oy).
4. *Функция периодическая* с периодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
5. *Точки пересечения с осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$
6. *Промежутки знакопостоянства*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z \\ \cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Промежутки возрастания и убывания*:

функция $\cos x$ возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$, и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$

8. ***Наибольшее значение функции*** **равно 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$.**
Наименьшее значение функции **равно −1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$**

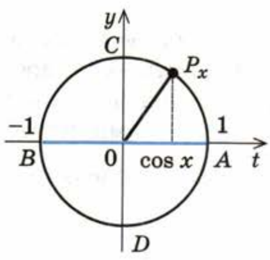


Рис. 85

Объяснение и обоснование

Напомним, что значение косинуса — это абсцисса соответствующей точки единичной окружности (рис. 85). Поскольку абсциссу можно найти для любой точки единичной окружности (в силу того, что через любую точку окружности, всегда можно провести единственную прямую, перпендикулярную оси абсцисс), то *область определения* функции $y = \cos x$ — все действительные числа. Это можно записать так: $\boldsymbol{D}(\cos x) = \boldsymbol{R}$.

Для точек единичной окружности абсциссы находятся в промежутке $[-1; 1]$ и принимают все значения от -1 до 1, поскольку через любую точку отрезка $[-1; 1]$ оси абсцисс (который является диаметром единичной окружности) всегда можно провести прямую, перпендикулярную оси абсцисс, и получить точку окружности, которая имеет рассматриваемую абсциссу. Следовательно, *область значений* функции $y = \cos x$: $y \in [-1; 1]$. Это можно записать так: $\boldsymbol{E}(\cos x) = [-1; 1]$.

Как видим, *наибольшее значение* функции $\cos x$ равно единице. Это значение достигается только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка A, то есть при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьшее значение функции $\cos x$ равно минус единице. Это значение достигается только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка B, то есть при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Как было показано в § 13, косинус — *четная функция*: $\cos(-x) = \cos x$, поэтому ее график симметричен относительно оси Oy.

В § 13 было обосновано также, что косинус — *периодическая* функция с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Таким образом, через промежутки длиной 2π вид графика функции $\cos x$ повторяется.

Чтобы найти *точки пересечения графика функции с осями координат*, напомним, что на оси Oy значение $x = 0$. Тогда соответствующее значение $y = \cos 0 = 1$. На оси Ox значение $y = 0$. Поэтому необходимо найти такие значения x, при которых $\cos x$, то есть абсцисса соответствующей точки единичной окружности будет равна нулю. Это будет тогда и только тогда, когда на единичной окружности будут выбраны точки C или D, то есть при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки знакопостоянства. Как было обосновано в § 13, значения функции косинус положительны (то есть абсцисса соответствующей точки единичной окружности положительна) в I и IV четвертях (рис. 86). Следовательно, $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также, учитывая период, при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значения функции косинус отрицательны (то есть абсцисса соответствующей точки единичной окружности отрицательна) во II и III четвертях, поэтому $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки возрастания и убывания

Учитывая периодичность функции $\cos x$ ($T = 2\pi$), достаточно исследовать ее на возрастание и убывание на любом промежутке длиной 2π, например на промежутке $[0; 2\pi]$.

Если $x \in [0; \pi]$ (рис. 87, *а*), то при увеличении аргумента x ($x_2 > x_1$) абсцисса соответствующей точки единичной окружности уменьшается (то есть $\cos x_2 < \cos x_1$), следовательно, на этом промежутке функция $\cos x$ убывает. Учитывая периодичность функции $\cos x$, делаем вывод, что она также убывает на каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Если $x \in [\pi; 2\pi]$ (рис. 87, *б*), то при увеличении аргумента x ($x_2 > x_1$) абсцисса соответствующей точки единичной окружности увеличивается (то есть $\cos x_2 > \cos x_1$), таким образом, на этом промежутке функция $\cos x$ возрастает. Учитывая периодичность функции $\cos x$, делаем вывод, что она возрастает также на каждом из промежутков

$$[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k],\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

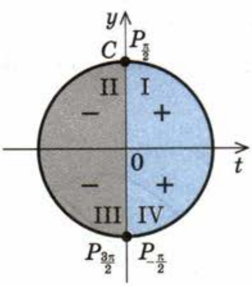
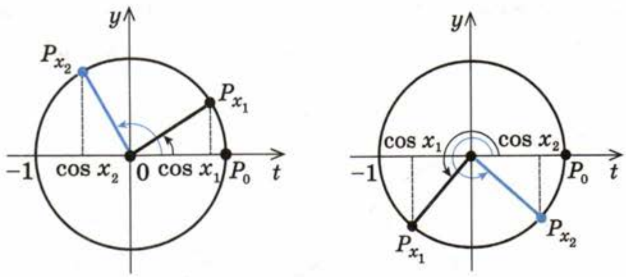


Рис. 86



а *б*

Рис. 87

Проведенное исследование позволяет построить график функции $y = \cos x$ аналогично тому, как был построен график функции $y = \sin x$. Но график функции $y = \cos x$ можно также получить с помощью геометрических преобразований графика функции $y = \sin x$, используя формулу

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x}$$

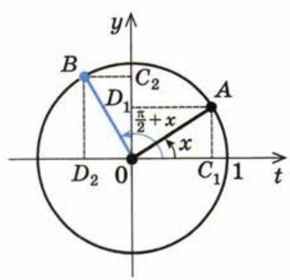


Рис. 88

Эту формулу можно обосновать, например, так. Рассмотрим единичную окружность (рис. 88), отметим на ней точки $A = P_x$ и $B = P_{\frac{\pi}{2}+x}$, а также абсциссы и ординаты этих точек. Так как $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, то при повороте прямоугольника OC_1AD_1 около точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки он перейдет в прямоугольник OC_2BD_2. Но тогда $OD_2 = OD_1$ и $OC_2 = OC_1$. Следовательно, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = y_B = OC_2 = OC_1 = t_A = \cos x$.

Укажем также формулы, которые нам понадобятся далее:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = t_B = -OD_2 = -OD_1 = -y_A = -\sin x.$$ Тогда,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x}\ .$$ ○

Учитывая, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, график функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$ его параллельным переносом вдоль оси Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 89). Полученный график называется *косинусоидой* (рис. 90).

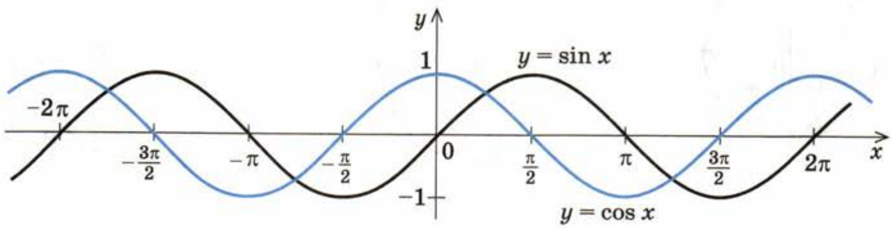


Рис. 89

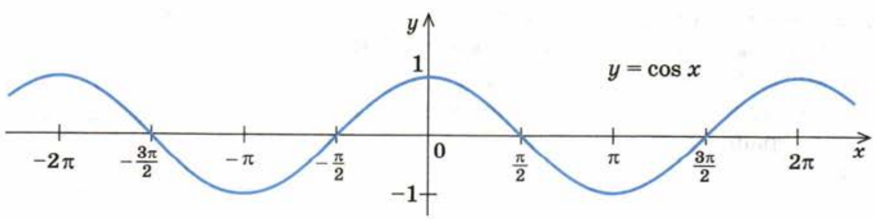
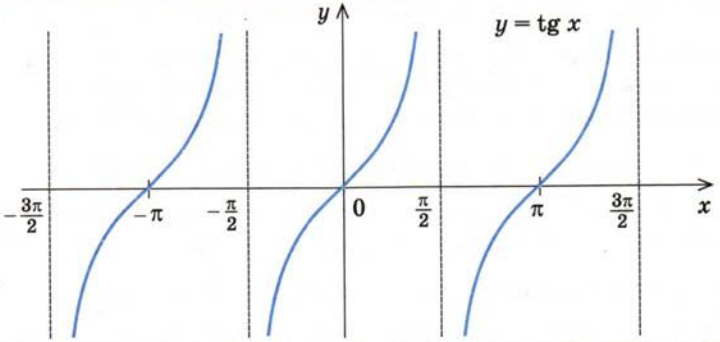


Рис. 90

14.3. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \mathrm{tg}\, x$ И ЕЕ ГРАФИК

Таблица 23

График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ (тангенсоида)



Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$

1. *Область определения*: $\boxed{D(\mathrm{tg}\, x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$

2. *Область значений*: R. $\boxed{E(\mathrm{tg}\, x) = R}$

3. *Функция **нечетная***: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$
(график симметричен относительно начала координат).

4. *Функция периодическая* с периодом $\boxed{T = \pi}$: $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$.

5. *Точки пересечения с осями координат*: *Oy* $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ **Ox** $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}$

6. *Промежутки знакопостоянства*:

$$\mathrm{tg}\, x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$$

$$\mathrm{tg}\, x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z$$

7. *Промежутки возрастания и убывания*:

функция tg x возрастает на каждом из промежутков своей области определения, то есть на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$

8. ***Наибольшего и наименьшего значений* функция *не имеет***

Объяснение и обоснование

Напомним, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Таким образом, *областью определения* функции $y = \operatorname{tg} x$ будут все значения аргумента, при которых $\cos x \neq 0$, то есть все значения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Получаем: $\boldsymbol{D}$ **(tg** $\boldsymbol{x}$**):** $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k}$, $\boldsymbol{k \in Z}$. Этот результат можно получить и геометрически. Значение тангенса — это ордината соответствующей точки T_x на линии тангенсов (рис. 91). Поскольку точки A и B единичной окружности лежат на прямых OA и OB, параллельных линии тангенсов, мы не сможем найти значение тангенса для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Для всех других значений аргумента мы можем найти соответствующую точку на линии тангенсов и ее ординату — тангенс. Следовательно, все значения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ входят в область определения функции $y = \operatorname{tg} x$.

Для точек единичной окружности (которые не совпадают с точками A и B) ординаты соответствующих точек на линии тангенсов принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку для любого действительного числа мы можем указать соответствующую точку на оси ординат, а значит, и соответствующую точку P_x на оси тангенсов. Учитывая, что точка O лежит внутри окружности, а точка P_x — вне ее (или на самой окружности), получаем, что прямая OP_x имеет с окружностью хотя бы одну общую точку (на самом деле их две). Следовательно, для любого действительного числа найдется аргумент x, такой, что $\operatorname{tg} x$ равен данному действительному числу. Поэтому *область значений* функции $y = \operatorname{tg} x$ — все действительные числа, то есть $\boldsymbol{R}$. Это можно записать так: $\boldsymbol{E}$ **(tg** $\boldsymbol{x}$**)** $= \boldsymbol{R}$. Отсюда следует, что *наибольшего* и *наименьшего значений* функция $\operatorname{tg} x$ не имеет.

Как было показано в § 13, тангенс — *нечетная* функция: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

Тангенс — *периодическая* функция с наименьшим положительным периодом $T = \pi$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ (см. § 13). Поэтому при построении графика этой функции достаточно построить график на любом промежутке длиной π, а потом полученную линию перенести параллельно вправо и влево вдоль оси Ox на расстояния $kT = \pi k$, где k — любое натуральное число.

Чтобы найти *точки пересечения графика функции с осями координат*, напомним, что на оси Oy значение $x = 0$. Тогда соответствующее значение $y = \operatorname{tg} 0 = 0$, то есть график функции $y = \operatorname{tg} x$ проходит через начало координат.

На оси Ox значение $y = 0$. Поэтому необходимо найти такие значения x, при которых $\operatorname{tg} x$, то есть ордината соответствующей точки линии тангенсов, равна нулю. Это будет тогда и только тогда, когда на единичной окружности будут выбраны точки C или D, то есть при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки знакопостоянства. Как было обосновано в § 13, значения функции тангенс положительны (то есть ордината соответствующей точки линии тангенсов положительна) в I и III четвертях. Следовательно, $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а также, учитывая период, при всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

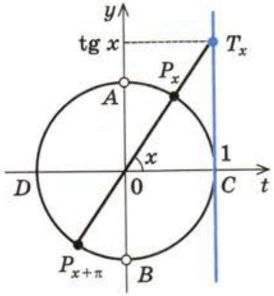


Рис. 91

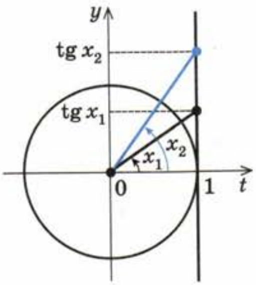


Рис. 92

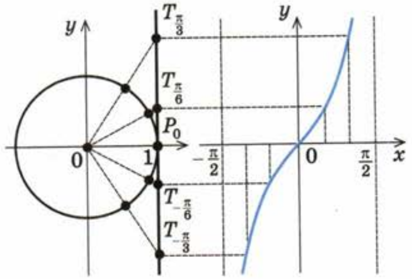


Рис. 93

Значения функции тангенс отрицательны (то есть ордината соответствующей точки линии тангенсов отрицательна) во II и IV четвертях. Таким образом, $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки возрастания и убывания

Учитывая периодичность функции $\operatorname{tg} x$ (период $T = \pi$), достаточно исследовать ее на возрастание и убывание на любом промежутке длиной π, например на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 92), то при увеличении аргумента x ($x_2 > x_1$) ордината соответствующей точки линии тангенсов увеличивается (то есть $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$). Таким образом, на этом промежутке функция $\operatorname{tg} x$ возрастает. Учитывая периодичность функции $\operatorname{tg} x$, делаем вывод, что она возрастает также на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проведенное исследование позволяет обоснованно построить график функции $y = \operatorname{tg} x$. Учитывая периодичность этой функции (с периодом π), сначала построим график на любом промежутке длиной π, например на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для более точного построения точек графика воспользуемся также тем, что значение тангенса — это ордината соответствующей точки линии тангенсов. На рисунке 93 показано построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, учитывая периодичность тангенса (с периодом π), повторяем вид графика на каждом промежутке длиной π (то есть параллельно переносим график вдоль оси Ox на πk, где k — целое число).

Получаем график, приведенный на рисунке 94, который называется *тангенсоидой*.

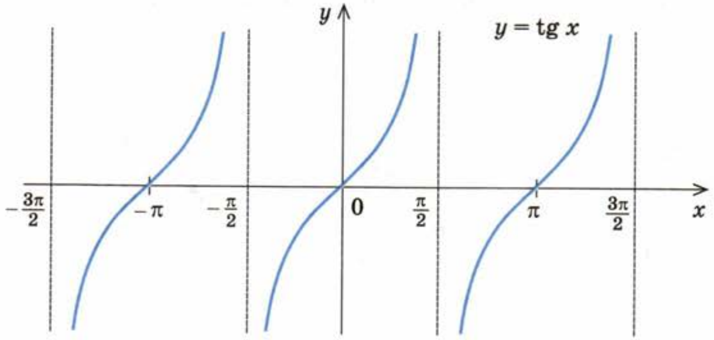
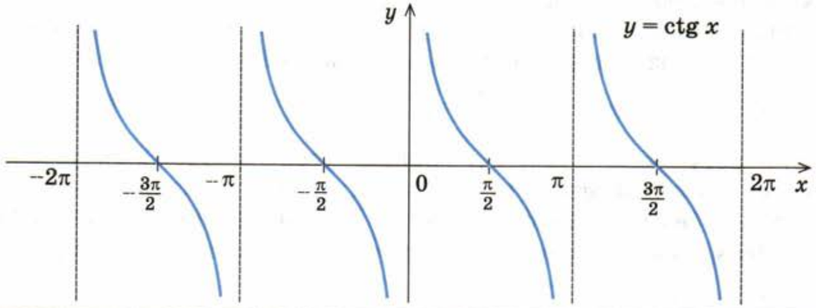


Рис. 94

14.4. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{ctg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

Таблица 24

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида)



Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. *Область определения*: $\boxed{D(\operatorname{ctg} x)\colon x \neq \pi k,\ k \in Z}$
2. *Область значений*: R. $\boxed{E(\operatorname{ctg} x) = R}$
3. *Функция* ***нечетная***: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
   (график симметричен относительно начала координат).
4. *Функция периодическая* с периодом $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. *Точки пересечения с осями координат*: *Oy* $\boxed{\text{нет}}$ *Ox* $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

Продолж. табл. 24

6. *Промежутки знакопостоянства:*

$$\mathbf{ctg}\ x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{ctg}\ x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$$

7. *Промежутки возрастания и убывания:*

функция ctg x убывает на каждом из промежутков своей области определения, то есть на каждом из промежутков (πk; $\pi + \pi k$), $k \in \mathbf{Z}$

8. ***Наибольшего и наименьшего значений* функция *не имеет***

Объяснение и обоснование

Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то *областью определения* котангенса будут все значения аргумента, при которых $\sin x \neq 0$, то есть $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом,

$$D(\operatorname{ctg} x)\colon x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Тот же результат можно получить, используя геометрическую иллюстрацию. Значение котангенса — это абсцисса соответствующей точки на линии котангенсов (рис. 95). Поскольку точки A и B единичной окружности лежат на прямых OA и OB, параллельных линии котангенсов, мы не можем найти значение котангенса для $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Для других значений аргумента мы можем найти соответствующую точку на линии котангенсов и ее абсциссу — котангенс. Поэтому все значения $x \neq \pi k$ входят в область определения функции $y = \operatorname{ctg} x$.

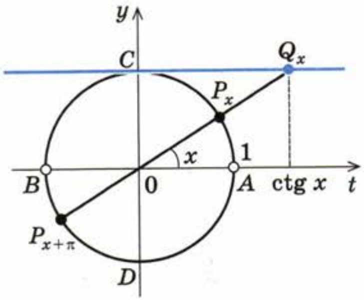


Рис. 95

Для точек единичной окружности (которые не совпадают с точками A и B) абсциссы соответствующих точек на линии котангенсов принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку для любого действительного числа мы можем указать соответствующую точку на оси абсцисс, а значит, и соответствующую точку Q_x на оси котангенсов. Учитывая, что точка O лежит внутри окружности, а точка Q_x — вне ее (или на самой окружности), получаем, что прямая OQ_x имеет с окружностью хотя бы одну общую точку (на самом деле их две). Следовательно, для любого действительного числа найдется аргумент x, такой, что ctg x равен данному действительному числу. Таким образом, *область значений* функции $y = \operatorname{ctg} x$ — все действительные числа, то есть $\mathbf{R}$. Это можно записать так: $\boldsymbol{E}$ **(ctg x)** = $\boldsymbol{R}$. Из приведенных рассуждений также вытекает, что *наибольшего и наименьшего значений* функция $\operatorname{ctg} x$ не имеет.

Как было показано в § 13, котангенс — *нечетная* функция: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

Там же было обосновано, что котангенс — *периодическая* функция с наименьшим положительным периодом $T = \pi$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, поэтому через промежутки длиной π вид графика функции $\operatorname{ctg} x$ повторяется.

Чтобы найти *точки пересечения графика функции с осями координат*, напомним, что на оси Oy значение $x = 0$. Но $\operatorname{ctg} 0$ не существует, значит, график функции $y = \operatorname{ctg} x$ не пересекает ось Oy.

На оси Ox значение $y = 0$. Поэтому необходимо найти такие значения x, при которых $\operatorname{ctg} x$, то есть абсцисса соответствующей точки линии котангенсов, равна нулю. Это будет тогда и только тогда, когда на единичной окружности будут выбраны точки C или D (рис. 95), то есть при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки знакопостоянства. Как было обосновано в § 13, значения функции котангенс положительны (то есть абсцисса соответствующей точки линии котангенсов положительна) в I и III четвертях (рис. 96). Тогда $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая период, получаем, что $\operatorname{ctg} x > 0$ при всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значения функции котангенс отрицательны (то есть абсцисса соответствующей точки линии котангенсов отрицательна) во II и IV четвертях, таким образом, $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

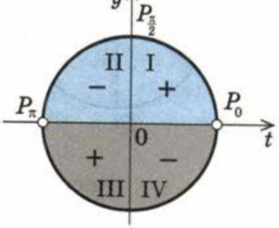


Рис. 96

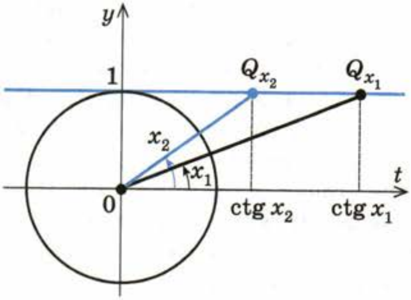


Рис. 97

Промежутки возрастания и убывания

Учитывая периодичность функции $\operatorname{ctg} x$ (наименьший положительный период $T = \pi$), достаточно исследовать ее на возрастание и убывание на любом промежутке длиной π, например на промежутке $(0; \pi)$.

Если $x \in (0; \pi)$ (рис. 97), то при увеличении аргумента x $(x_2 > x_1)$ абсцисса соответствующей точки линии котангенсов уменьшается (то есть

$\operatorname{ctg} x_2 < \operatorname{ctg} x_1$), следовательно, на этом промежутке функция ctg x убывает. Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{ctg} x$, делаем вывод, что она также убывает на каждом из промежутков $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. ○

Проведенное исследование позволяет построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ аналогично тому, как был построен график функции $y = \operatorname{tg} x$. Но график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить также с помощью геометрических преобразований графика функции $y = \operatorname{tg} x$. По формуле, приведенной на с. 172, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$, то есть $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ параллельным переносом вдоль оси Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и симметричным отображением полученного графика относительно оси Ox. Получаем график, который называется *котангенсоидой* (рис. 98).

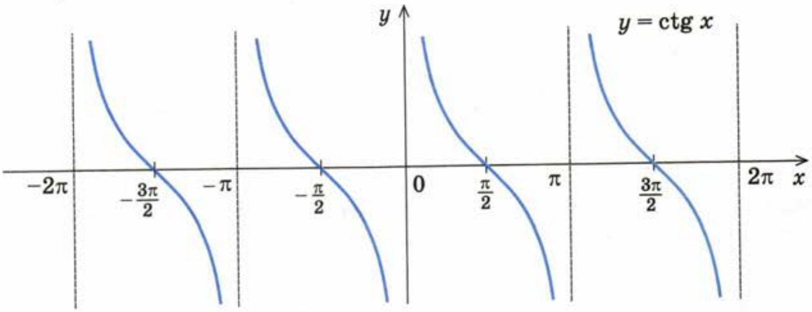


Рис. 98

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции и укажите нули функции и промежутки знакопостоянства: 1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = \sin 2x$.

Комментарий

Графики всех данных функций можно получить с помощью геометрических преобразований графика функции $f(x) = \sin x$ (табл. 4). Таким образом, графиком каждой из этих функций будет синусоида, полученная :

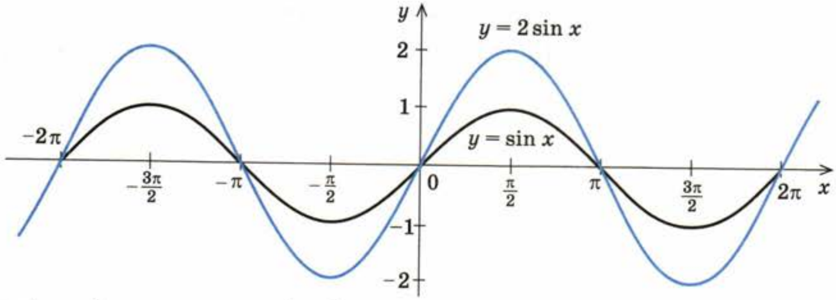
1) $y = 2 \sin x = 2f(x)$ растяжением графика $y = \sin x$ вдвое вдоль оси Oy;
2) $y = \sin 2x = f(2x)$ сжатием графика $y = \sin x$ вдвое вдоль оси Ox.

Нули функции — это абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.

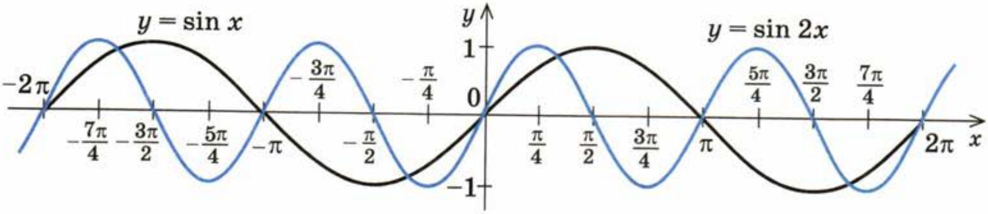
Чтобы записать промежутки знакопостоянства функции, заметим, что функция $y = 2 \sin x$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, а функция $y = \sin 2x$ периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Поэтому для каждой функции достаточно выяснить на одном периоде, где значения функции положительны (график находится выше оси Ox) и где отрицательны (график находится ниже оси Ox), а потом полученные промежутки повторить через период.

Решение

1) ▶График функции $y = 2\sin x$ получаем из графика функции $y = \sin x$ растяжением его вдвое вдоль оси Oy.
Нули функции: $x = \pi k$, $k \in Z$.
Промежутки знакопостоянства: $2\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $2\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. ◁



2) ▶График функции $y = \sin 2x$ получаем из графика функции $y = \sin x$ сжатием его вдвое вдоль оси Ox.



Нули функции: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Промежутки знакопостоянства: $\sin 2x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

$\sin 2x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in Z$. ◁

Задача 2 Расположите в порядке возрастания числа:
$\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Комментарий

Для расположения данных чисел в порядке их возрастания выясним, какие из них положительны, а какие отрицательны, а затем сравним между собой отдельно положительные числа и отдельно отрицательные, учитывая известные промежутки возрастания и убывания функции $\sin x$.

Решение

▶ Числа $\sin 1{,}9$ и $\sin 3$ положительны, так как точки $P_{1,9}$ и P_3 находятся во II четверти. Числа $\sin(-1)$ и $\sin(-1{,}5)$ отрицательны, так как точки P_{-1} и $P_{-1,5}$ находятся в IV четверти.

Учитывая, что $\frac{\pi}{2} < 1{,}9 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ и что функция $\sin x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ убывает, из неравенства $1{,}9 < 3$ получаем $\sin 1{,}9 > \sin 3$.

Также $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, $-\frac{\pi}{2} < -1{,}5 < 0$. Функция $\sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ возрастает. Учитывая, что $-1 > -1{,}5$, получаем $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$.

Таким образом, в порядке возрастания эти числа располагаются так: $\sin(-1{,}5)$, $\sin(-1)$, $\sin 3$, $\sin 1{,}9$. ◁

Замечание. Для сравнения данных чисел можно также изобразить точки $P_{1,9}$, P_3, P_{-1}, $P_{-1,5}$ на единичной окружности и сравнить соответствующие ординаты (выполните такое решение самостоятельно).

Задача 3 Постройте график функции: 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin|x|$.

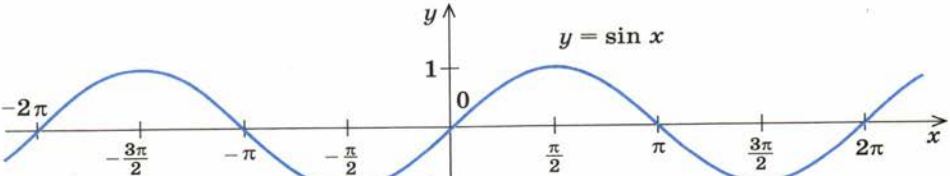
Комментарий

Графики данных функций можно получить с помощью геометрических преобразований графика функции $f(x) = \sin x$. Напомним соответствующие преобразования:

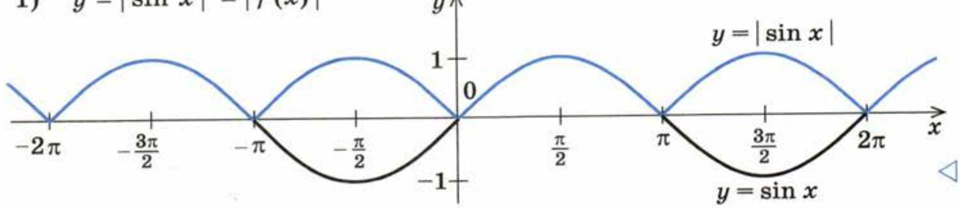
1) $y = |\sin x| = |f(x)|$ — выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = \sin x$ остается без изменений, часть графика, расположенная ниже оси Ox, отображается симметрично относительно оси Ox;
2) $y = \sin|x| = f(|x|)$ — справа от оси Oy (и на самой оси) график функции $y = \sin x$ остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.

Решение

▶ Построим сначала график функции $y = f(x) = \sin x$:

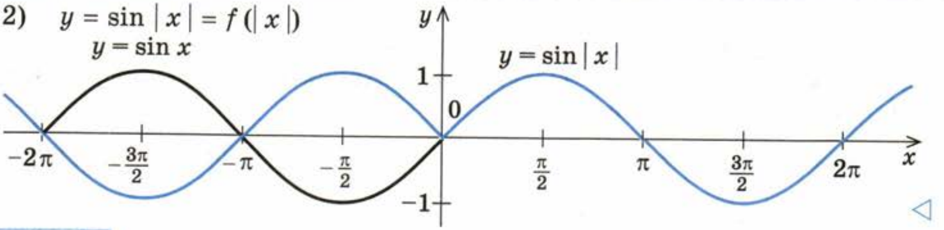


1) $y = |\sin x| = |f(x)|$



◁

2) $y = \sin|x| = f(|x|)$



◁

Задача 4 Постройте график функции и укажите промежутки ее убывания и возрастания:

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = -\operatorname{tg} x$.

Комментарий

Графики данных функций можно получить с помощью геометрических преобразований графиков функций:

1) $f(x) = \cos x$; 2) $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

Тогда получаем графики функций:

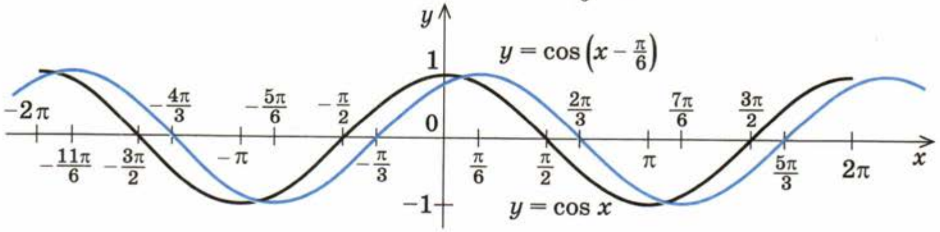
1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ — параллельным переносом графика функции $f(x)$ вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц;

2) $y = -\operatorname{tg} x = -\varphi(x)$ — симметрией графика функции $\varphi(x)$ относительно оси Ox.

Чтобы записать промежутки убывания и возрастания функций, отметим, что функция $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, а функция $y = -\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом $T = \pi$. Поэтому для каждой из функций достаточно выяснить на одном периоде, где она убывает и где возрастает, а затем полученные промежутки повторить через период.

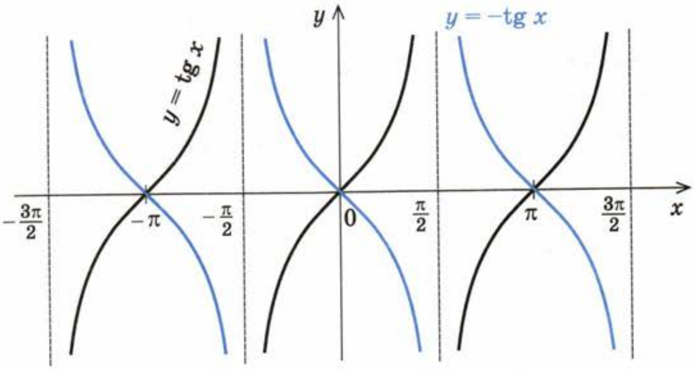
Решение

1) ▶График функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ получаем из графика функции $y = \cos x$ параллельным переносом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц.



Функция убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, и возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

2) ▶График функции $y = -\mathrm{tg}\, x$ получаем симметричным отображением графика функции $y = \mathrm{tg}\, x$ относительно оси Ox.



Функция убывает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Вопросы для контроля

1. а) Постройте график функции $y = \sin x$. Пользуясь графиком, охарактеризуйте свойства этой функции.
   б*) Обоснуйте свойства функции $y = \sin x$.
2. а) Постройте график функции $y = \cos x$. Пользуясь графиком, охарактеризуйте свойства этой функции.
   б*) Обоснуйте свойства функции $y = \cos x$.
3. а) Постройте график функции $y = \mathrm{tg}\, x$. Пользуясь графиком, охарактеризуйте свойства этой функции.
   б*) Обоснуйте свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$.
4. а) Постройте график функции $y = \mathrm{ctg}\, x$. Пользуясь графиком, охарактеризуйте свойства этой функции.
   б*) Обоснуйте свойства функции $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Упражнения

1. Пользуясь свойствами функции $y = \sin x$, сравните числа:

1°) $\sin 100°$ и $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ и $\sin 1$; 3°) $\sin\frac{21\pi}{5}$ и $\sin\frac{12\pi}{5}$.

2. Пользуясь свойствами функции $y = \cos x$, сравните числа:

1°) $\cos 10°$ и $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ и $\cos(-3)$; 3°) $\cos\frac{3\pi}{7}$ и $\cos\frac{6\pi}{7}$.

3. Пользуясь свойствами функции $y = \mathrm{tg}\, x$, сравните числа:

1°) $\mathrm{tg}\, 15°$ и $\mathrm{tg}\, 140°$; 2°) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}$ и $\mathrm{tg}\frac{10\pi}{9}$; 3) $\mathrm{tg}(-1{,}2\pi)$ и $\mathrm{tg}(-0{,}1\pi)$.

4. Пользуясь свойствами функции $y = \mathrm{ctg}\, x$, сравните числа:

1) $\mathrm{ctg}\, 3°$ и $\mathrm{ctg}\, 5°$; 2) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{10}$ и $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{10}$; 3) $\mathrm{ctg}(-1)$ и $\mathrm{ctg}(-1{,}2)$.

5. Расположите числа в порядке их возрастания:

1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$;

3) $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} 0{,}5$, $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$.

Постройте график функции и укажите нули функции и промежутки знакопостоянства **(6–9)**.

6. 1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 2°) $y=\sin\frac{x}{3}$; 3) $y=\sin(-x)$; 4°) $y=-\sin x$; 5°) $y=3\sin x$; 6) $y=-|\sin x|$; 7*) $y=\sin x+|\sin x|$.

7. 1) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; 2°) $y=\cos 3x$; 3) $y=\cos(-x)$; 4°) $y=-\cos x$; 5°) $y=2\cos x$; 6) $y=|\cos x|$; 7*) $y=\cos x-|\cos x|$.

8. 1) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\operatorname{tg} 2x$; 3) $y=\operatorname{tg}(-x)$; 4) $y=\operatorname{tg}|x|$; 5) $y=|\operatorname{tg} x|$.

9. 1) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=\operatorname{ctg}(-x)$; 3) $y=-\operatorname{ctg} x$; 4) $y=3\operatorname{ctg} x$.

Постройте график функции и укажите промежутки возрастания и убывания функции **(10–13)**.

10. 1°) $y=\sin 3x$; 2°) $y=3\sin x$; 3°) $y=\sin x+1$; 4*) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. 1°) $y=\cos\frac{x}{2}$; 2°) $y=\cos x-1$; 3) $y=\cos|x|$; 4*) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

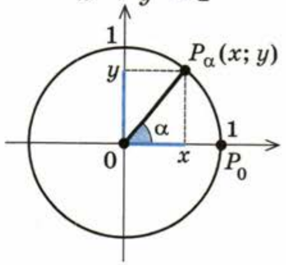
12. 1) $y=\operatorname{tg} 4x$; 2) $y=\operatorname{tg} x+3$; 3) $y=-2\operatorname{tg} x$; 4*) $y=\operatorname{tg} x+|\operatorname{tg} x|$.

13. 1) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; 2) $y=-2\operatorname{ctg} x$; 3) $y=|\operatorname{ctg} x|$; 4*) $y=\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}|x|$.

§ 15. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Таблица 25

$x^2+y^2=1$



$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1}$$

Объяснение и обоснование

● На рисунке в таблице 25 изображена единичная окружность, то есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Уравнение этой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть при повороте на угол α точка $P_0(1; 0)$ единичной окружности переходит в точку $P_\alpha(x; y)$ (то есть при повороте на угол α радиус OP_0 переходит в радиус OP_α). Напомним, что синусом α называется ордината точки $P_\alpha(x; y)$ единичной окружности, то есть $\sin\alpha = y$, а косинусом α называется абсцисса этой точки, то есть $\cos\alpha = x$. Координаты точки P_α удовлетворяют уравнению окружности, тогда $y^2 + x^2 = 1$, следовательно,

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$ ○

Это соотношение называют *основным тригонометрическим тождеством*. Напомним также, что:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\text{где } \cos\alpha \neq 0); \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\sin\alpha \neq 0).$$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, то есть

$$\mathbf{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1} \ (\sin\alpha \neq 0 \text{ и } \cos\alpha \neq 0).$$

С помощью этих соотношений и основного тригонометрического тождества получаем:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ то есть}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\cos\alpha \neq 0).$$

Аналогично получаем: $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, то есть

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \ (\sin\alpha \neq 0).$$

Примеры решения задач

Задача 1 Зная значение одной из тригонометрических функций и интервал, в котором находится α, найдите значения трех остальных тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $90° < \alpha < 180°$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение

1) ▶Из равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получаем: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Отсюда $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Поскольку $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha < 0$,

Комментарий

1) Равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ связывает $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и позволяет выразить одну из этих функций через другую. Например, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Тогда $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

а значит, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{3}{4}. \triangleleft$$

2) ▶ Из равенства $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ получаем $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3$. Подставляем в равенство $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ значение $\operatorname{tg}\alpha$ и получаем:

$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Отсюда $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$.

Поскольку $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, тогда $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

◁

Учитывая, в какой четверти находится α, мы можем определить знак, который необходимо взять в правой части формулы (это знак косинуса во II четверти).

Зная $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Укажем, что после нахождения $\operatorname{tg}\alpha$ значение $\operatorname{ctg}\alpha$ можно также найти из соотношения $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

2) Равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ связывает $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ и позволяет выразить одну из этих функций через другую как обратную величину.

Равенство $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ связывает $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$ и позволяет выразить одну из этих функций через другую.

Например, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Тогда $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$. Зная, в какой четверти находится α, мы можем определить знак, который необходимо взять в правой части формулы (это знак косинуса в III четверти).

Для нахождения $\sin\alpha$ можно воспользоваться соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha.$$

Задача 2 Упростите выражение $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Решение

▶ $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha.$ ◁

Комментарий

Для преобразования числителя данной дроби из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

находим:

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Затем, используя определение тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, упрощаем полученную дробь.

Задача 3 Упростите выражение $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$.

Комментарий

Для преобразования тригонометрических выражений наряду с тригонометрическими формулами используют также алгебраические формулы, в частности формулы сокращенного умножения. Так, выражение $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ можно рассматривать как разность квадратов: $(\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$. Тогда его можно разложить на множители (на произведение суммы и разности $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$), а затем применить основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Решение

▶ $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = 1\cdot(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. ◁

Задача 4* Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Комментарий

Сначала используем определение тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а после преобразования знаменателя дроби — основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, далее упрощаем полученную дробь. В конце учитываем, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Для раскрытия знака модуля находим знак косинуса в заданном промежутке и учитываем, что при $a < 0$ значение $|a| = -a$.

Решение

▶ $$\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}} = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}} =$$

$= \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha| = -\cos\alpha$, поскольку во II четверти $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ $\cos\alpha < 0$. ◁

Задача 5 Докажите тождество $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} = 2$.

Комментарий

Докажем, что левая часть равенства равна правой. Для этого в знаменателе используем формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а в числителе возведем выражение в скобках в квадрат и используем формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Напомним, что *тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях букв, входящих в него*. Поэтому данное равенство является тождеством только при условии $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$.

Решение

▶ $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha} = \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2.$$

$2 = 2$. Таким образом, данное равенство является тождеством. ◁

Замечание. При доказательстве тождеств чаще всего используют такие приемы:

1) с помощью тождественных преобразований доказывают, что одна часть равенства равна другой;
2) рассматривают разность левой и правой частей тождества и доказывают, что эта разность равна нулю (этот прием используют в тех случаях, когда планируется преобразовывать обе части тождества).

Вопросы для контроля

1. Запишите соотношение между тригонометрическими функциями одного аргумента.
2*. Докажите соотношение между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Упражнения

1. Существует ли число α, одновременно удовлетворяющее условиям:

1°) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2°) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 3°) $\sin\alpha = 0{,}7$, $\cos\alpha = 0{,}3$;

4°) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{3}$; 5°) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{4}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2-\sqrt{3}$?

2. Зная значение одной из тригонометрических функций и интервал, в котором содержится α, вычислите значения трех остальных тригонометрических функций:

1°) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 2°) $\cos\alpha = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}2$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Упростите выражение:

1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$; 3°) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

4°) $\sin^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;

8) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right)$;

9*) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$;

10*) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Докажите тождество:

1°) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2\alpha$;

2°) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

3°) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha} = \cos^2\alpha$;

5) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

6) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

9*) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

10*) $\dfrac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

5*. 1) Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$. Найдите: а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

§ 16. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

16.1. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Таблица 26

1. Косинус разности и суммы	
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	
2. Синус суммы и разности	
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	
3. Тангенс суммы и разности	
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Объяснение и обоснование

1. Косинус разности и суммы

Чтобы получить формулу для $\cos(\alpha - \beta)$, сначала рассмотрим случай, когда α и β находятся в промежутке $[0; \pi]$ и $\alpha > \beta$. На единичной окружности обозначим точки P_α и P_β и изобразим векторы $\overline{OP_\alpha}$ и $\overline{OP_\beta}$ (рис. 99). Эти векторы имеют те же координаты, что и точки P_α и P_β, то есть

$$\overline{OP_\alpha}(\cos\alpha; \sin\alpha), \quad \overline{OP_\beta}(\cos\beta; \sin\beta).$$

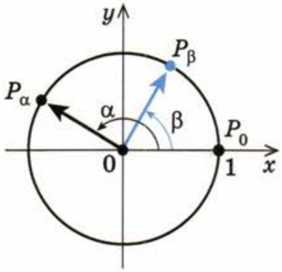


Рис. 99

Длины (модули) этих векторов равны единице: $\left|\overline{OP_\alpha}\right| = 1$, $\left|\overline{OP_\beta}\right| = 1$, а угол между ними равен $\alpha - \beta$ (то есть $\angle P_\alpha O P_\beta = \alpha - \beta$).

Напомним, что в курсе геометрии при изучении скалярного произведения векторов на плоскости рассматривалось его нахождение через длины (модули) векторов и угол между ними и через координаты соответствующих векторов*.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{OP_\alpha}$ и $\overline{OP_\beta}$ двумя способами:

1) как сумму произведений одноименных координат:

$$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

2) как произведение длин (модулей) векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \left|\overline{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overline{OP_\beta}\right| \cdot \cos\angle P_\alpha O P_\beta = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Таким образом,

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (1)$$

Полученное равенство называют *формулой косинуса разности*. Словесно ее можно сформулировать так:

косинус разности двух углов (чисел) равен произведению косинуса первого угла (числа) на косинус второго плюс произведение синуса первого на синус второго.

Чтобы обосновать эту формулу в общем случае, напомним, что по определению угол между векторами ($\angle P_\alpha O P_\beta$) может быть только в пределах от 0 до π. Поэтому при $\alpha > \beta$ угол между векторами $\overline{OP_\alpha}$ и $\overline{OP_\beta}$ может равняться $\alpha - \beta$ (рис. 99), или $2\pi - (\alpha - \beta)$ (рис. 100), или принимать значения, отличные от этих значений на целое число оборотов (то есть на $2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$).

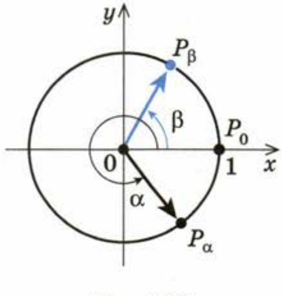


Рис. 100

Учитывая периодичность (с периодом 2π) и четность функции косинус, получаем, что в любом случае $\cos\angle P_\alpha O P_\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Таким образом, приведенное обоснование остается верным для любых значений α и β.

* См., например, учебник «Геометрия. 7–9» А.В. Погорелова, § 10.

С помощью формулы (1) легко вывести *формулу косинуса суммы*:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$ Таким образом,

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \quad (2)$$

Косинус суммы двух углов (чисел) равен произведению косинуса первого угла (числа) на косинус второго минус произведение синуса первого на синус второго. ○

2. Синус суммы и разности

● Выведем теперь формулы синуса суммы и синуса разности.

Сначала по формуле (1) получим два полезных соотношения, а именно:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi=0\cdot\cos\varphi+1\cdot\sin\varphi=\sin\varphi.$$

Перепишем полученную формулу справа налево:

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \quad (3)$$

Если подставить в формулу (3) $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, то получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \quad (4)$$

Применяя формулы (3), (1) и (4), имеем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$ Таким образом,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.} \quad (5)$$

Синус суммы двух углов (чисел) равен произведению синуса первого угла (числа) на косинус второго плюс произведение косинуса первого на синус второго.

Для синуса разности имеем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$ Таким образом,

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.}$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла (числа) на косинус второго минус произведение косинуса первого на синус второго. ○

3. Тангенс суммы и разности

● С помощью формул сложения для синуса (5) и косинуса (2) легко получить формулы сложения для тангенса или котангенса. Например,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$ (при условии, что $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$) и получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},}$$ где $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Для тангенса разности имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},}$$ где $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$. ○

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите: 1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 15°$.

Решение

1) ▶ $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ◁

2) ▶ $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ◁

3) ▶ $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) =$

$$=\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}.$$ ◁

Комментарий

Представим $15°$ как разность:

$$15° = 45° - 30°,$$

а значения тригонометрических функций углов $45°$ и $30°$ мы знаем. Поэтому, записав синус $15°$ как синус разности, получим значение $\sin 15°$. Аналогично найдем $\cos 15°$ и $\operatorname{tg} 15°$.

Заметим, что для нахождения $\operatorname{tg} 15°$ можно применить также формулу $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

В задании 3 после подстановки тангенса в данное выражение $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ удобно избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, что значительно упрощает ответ.

Задача 2 Упростите выражение $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Комментарий

Для преобразования числителя и знаменателя дроби применим формулы косинуса суммы и косинуса разности и приведем подобные члены.

Решение

▶ $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=1.$ ◁

Задача 3 Найдите значение выражения $\cos 37^\circ\cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$.

Решение

▶ $\cos 37^\circ\cos 23^\circ - \sin 37^\circ\cos 23^\circ =$

$=\cos(37^\circ+23^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$ ◁

Комментарий

Используем формулу косинуса суммы справа налево:

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta).$

Задача 4 Докажите тождество:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

Комментарий

Для обоснования этих тождеств докажем, что их правые части равны левым, применяя формулы синуса суммы и синуса разности:

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$

Доказательства

1) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=\sin\alpha+\cos\alpha;$ ◁

2) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=\sin\alpha-\cos\beta.$ ◁

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы сложения: а) косинус суммы и косинус разности; б) синус суммы и синус разности; в) тангенс суммы и тангенс разности.
2*. Докажите формулы сложения: а) косинус суммы и косинус разности; б) синус суммы и синус разности; в) тангенс суммы и тангенс разности.

Упражнения

1. Вычислите:

1) $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \cos 13^\circ \sin 17^\circ$; 2) $\sin 16^\circ \cos 29^\circ + \sin 29^\circ \cos 16^\circ$;
3) $\sin 78^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 78^\circ$; 4) $\sin 63^\circ \cos 33^\circ - \sin 33^\circ \cos 63^\circ$;
5) $\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \sin 66^\circ \sin 6^\circ$; 6) $\cos 71^\circ \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \sin 26^\circ$;
7) $\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ$; 8) $\cos 18^\circ \cos 12^\circ - \sin 18^\circ \sin 12^\circ$;
9) $\dfrac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 35^\circ}$; 10) $\dfrac{\operatorname{tg} 73^\circ - \operatorname{tg} 13^\circ}{1 + \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg} 13^\circ}$; 11) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 67^\circ \operatorname{tg} 7^\circ}{\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 7^\circ}$.

2. Упростите:

1°) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \cos 5\alpha \sin 3\alpha$; 2) $\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha$;
3) $\sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta$; 4) $\cos\alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin(\alpha + \beta)$;
5°) $\dfrac{\cos 7\alpha \cos 4\alpha + \sin 7\alpha \sin 4\alpha}{\sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha}$; 6°) $\dfrac{\sin 8\alpha \cos 2\alpha - \cos 8\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha - \sin 2\alpha \sin 4\alpha}$;
7°) $\dfrac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$; 8°) $\dfrac{\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$;
9) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$; 10) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta}$.

3. С помощью формул сложения вычислите:

1) $\sin 75^\circ$; 2) $\cos 75^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$; 4) $\sin 105^\circ$; 5) $\cos 105^\circ$; 6) $\operatorname{tg} 105^\circ$.

4. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;
2) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$;
3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$; 4) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$;
5) $\sin(30^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $\sin(30^\circ - \alpha) + \sin(30^\circ + \alpha) = \cos\alpha$;
7*) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha - 1$; 8*) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$;
9*) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; 10*) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

16.2. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

Таблица 27

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Объяснение и обоснование

Чтобы получить формулы двойного аргумента, достаточно в формулах сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}$$

взять $\beta=\alpha$. Получим тождества:

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, то есть

$$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.}$$

$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, то есть

$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\text{ то есть}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Из формулы $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, используя основное тригонометричное тождество $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, можно получить формулы, которые позволяют выразить $\cos 2\alpha$ только через $\sin\alpha$ или только через $\cos\alpha$.

Действительно, из основного тригонометрического тождества получаем $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Тогда

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$, то есть

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \tag{1}$$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, то есть

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) можно получить следствия, которые полезно запомнить:

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},\qquad \boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Эти формулы называют *формулами понижения степени.*

Если в последних формулах обозначить $2\alpha=x$, то есть $\alpha=\frac{x}{2}$, то можно записать такие формулы:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\qquad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Заметим, что формулы синуса и косинуса двойного аргумента справедливы для любых значений аргумента, тогда как формула тангенса двойного аргумента справедлива только для тех значений аргумента α, для которых определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, то есть только при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$.

Необходимо отметить, что полученные формулы можно применить как слева направо, так и справа налево. Например, вместо выражения $2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$ можно записать $\sin(2\cdot 3\alpha)=\sin 6\alpha$, а вместо выражения $\cos^2 1{,}5\alpha-\sin^2 1{,}5\alpha$ записать $\cos 3\alpha$.

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите: 1) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15°\cos 15°$.

Решение

1) ► $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

2) ► $\sin 15°\cos 15°=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15°=$

$=\frac{1}{2}\sin(2\cdot 15°)=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$. ◁

Комментарий

В первом задании достаточно «узнать» правую часть формулы косинуса двойного аргумента и записать результат. Во втором задании следует обратить внимание на то, что заданное выражение отличается от правой части формулы синуса двойного аргумента только отсутствием двойки. Поэтому, если это выражение умножить и разделить на 2, то оно не изменится, и тогда по формуле получим:

$2\sin 15°\cos 15°=\sin(2\cdot 15°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

Задача 2 Докажите тождество $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Комментарий

Докажем, что левая часть тождества равна правой. Заметим, что в числителе дроби находится выражение, которое можно непосредственно преобразовать по формуле (3). Но применение этой формулы уменьшает аргумент вдвое: $1+\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$. Желательно и в знаменателе дроби перейти к тому же аргументу 2α. Для этого рассмотрим $\sin 4\alpha$ как синус двойного аргумента (относительно аргумента 2α): $\sin 4\alpha = \sin(2\cdot 2\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$.

Доказательство

► $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$. ◁

Задача 3* Сократите дробь $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Комментарий

Преобразовывая тригонометрические выражения, следует помнить не только тригонометрические, но и алгебраические формулы. В частности, если в знаменателе дроби применить формулу косинуса двойного аргумента: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, то получим выражение, которое является разностью квадратов $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Его можно разложить на множители как произведение суммы и разности $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Учитывая вид выражения, полученного в знаменателе, в числителе представим выражение $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ как удвоенное произведение $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$. Тогда для получения квадрата суммы этих выражений нам необходима еще сумма $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, которую по основному тригонометрическому тождеству дает единица, стоящая в числителе.

Решение

▶ $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$. ◁

Задача 4 Зная, что $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ и что $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, вычислите:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Решение

▶ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{9}{25}$, то есть $\sin^2\alpha=\dfrac{16}{25}$. Таким образом,

$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ или $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

Учитывая, что $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, получаем $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$. Тогда:

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=$

$$=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{24}{25};$$ ◁

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$

$$=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25};$$ ◁

3) $\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=\dfrac{24}{7}$; ◁

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{7}{24}$. ◁

Комментарий

Чтобы найти значение $\sin 2\alpha$ по формуле синуса двойного аргумента $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, необходимо, кроме данного значения $\cos\alpha$, иметь еще и значение $\sin\alpha$, которое легко находится с использованием основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha.$$

Напомним, что для нахождения $\sin\alpha$ следует также учесть знак синуса в заданном промежутке (по условию α находится в IV четверти, где синус отрицателен).

Заметим, что $\cos 2\alpha$ можно найти также по формуле

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

не вычисляя $\sin\alpha$, а $\operatorname{ctg} 2\alpha$ — по формуле $\operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, подставив найденное значение $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы синуса, косинуса и тангенса двойного аргумента.
2*. Докажите формулы синуса, косинуса и тангенса двойного аргумента.

Упражнения

1°. Вычислите:

1) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$; 2) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$; 3) $(\cos 15°+\sin 15°)^2$;

4) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$; 5) $\dfrac{2\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 6) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

Докажите тождество (2–3).

2°. 1) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$; 2) $\sin 5x\cos 5x=\frac{1}{2}\sin 10x$;

3) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$; 4) $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$.

3. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}=\cos\alpha\cos 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 4\alpha}{4\cos\alpha}=\sin\alpha\cos 2\alpha$;

3) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$;

5) $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

4. Упростите выражение:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha$; 2°) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$; 4*) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

5. Зная, что $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, вычислите:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

6. Зная, что $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, вычислите:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

7. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, вычислите:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

8. Зная, что $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, вычислите:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

9*. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$.

10*. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\cos 2\alpha-|\cos\alpha|$.

11. Постройте график функции:

1) $y=\sin x\cos x$; 2) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; 3*) $y=\operatorname{tg}x\sin 2x$.

16.3. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Таблица 28

Формулами приведения называют формулы, с помощью которых тригонометрические функции от аргументов вида $k\pi\pm\alpha$ и $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ приводят к тригонометрическим функциям от аргумента α.

Продолж. табл. 28

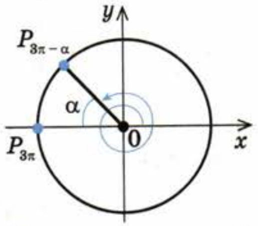
<table>
<tr><th>Ориентир</th><th>Примеры</th></tr>
<tr><td>

1. Если к числу α прибавляется число $k\pi$, $k \in Z$ (то есть число, которое изображается на горизонтальном диаметре единичной окружности), то название заданной функции не меняется, а если прибавляется число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (то есть число, которое изображается на вертикальном диаметре единичной окружности), то название заданной функции меняется на соответствующее (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и котангенс на тангенс).

</td><td>

1. Упростите по формулам приведения $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)$.

▶ $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. ◁

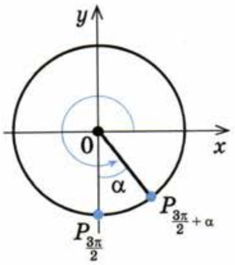


Комментарий

Название заданной функции не меняется, поскольку число 3π изображается на горизонтальном диаметре (слева) единичной окружности. Если условно считать угол α острым, то угол $3\pi - \alpha$ находится во II четверти, где тангенс отрицателен, поэтому в правой части формулы ставится знак «–».

</td></tr>
<tr><td>

2. Знак полученного выражения определяется знаком исходного выражения, если условно считать угол α острым.



</td><td>

2. Упростите $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$. ◁

Комментарий

Название заданной функции меняется, поскольку число $\frac{3\pi}{2}$ изображается на вертикальном диаметре (внизу) единичной окружности. Если условно считать угол α острым, то угол $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ находится в IV четверти, где косинус положителен, поэтому в правой части формулы ставится знак «+».

</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

- Формулы сложения позволяют обосновать формулы приведения, по которым тригонометрические функции от аргументов вида $k\pi \pm \alpha$ и

$(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$ приводят к тригонометрическим функциям от аргумента α.

Рассмотрим несколько примеров.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=(-1)\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=\frac{\cos(6\pi-\alpha)}{\sin(6\pi-\alpha)}=\frac{\cos 6\pi\cos\alpha+\sin 6\pi\sin\alpha}{\sin 6\pi\cos\alpha-\cos 6\pi\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

(конечно, в последнем случае тот же результат можно получить, используя периодичность и нечетность функции котангенса);

как было показано на с. 191 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{7\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для анализа полученных результатов составим такую таблицу:

Таблица 29

Вид аргумента	Полученная формула	Изменение названия заданной функции	Четверть (если условно считать угол α острым)	Знак заданной функции в соответствующей четверти
$k\pi\pm\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	нет	II	+
	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	нет	III	–
	$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	нет	IV	–
$(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	есть	I	+
	$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	есть	IV	+
	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$	есть	IV	–

Аналогично можно обосновать, что во всех случаях тригонометрические функции от аргументов вида $k\pi\pm\alpha$ и $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$ можно привести к тригонометрическим функциям от аргумента α по такому о р и е н т и р у:

если к числу α прибавляется число $k\pi$, $k \in Z$ (то есть число, которое изображается на горизонтальном диаметре единичной окружности), то название заданной функции не меняется, а если прибавляется число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (то есть число, которое изображается на вертикальном диаметре единичной окружности), то название заданной функции меняется на соответствующее (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и котангенс на тангенс).

Знак полученного выражения определяется знаком исходного выражения, если условно считать угол α острым. ○

В таблице 30 приведены *основные формулы приведения*. Все другие случаи могут быть приведены к ним с помощью использования периодичности соответствующих тригонометрических функций.

Таблица 30

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\text{tg}\, x$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$
$\text{ctg}\, x$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$

Укажем, что по формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{tg}\,\alpha$, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{ctg}\,\alpha$. Если последние формулы записать справа налево, то получим полезные соотношения, которые часто называют *формулами дополнительных аргументов* (аргументы α и $\frac{\pi}{2}-\alpha$ дополняют друг друга до $\frac{\pi}{2}$):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\text{tg}\,\alpha=\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \text{ctg}\,\alpha=\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Например, $\sin 60°=\cos(90°-60°)=\cos 30°$; $\cos 89°=\sin(90°-89°)=\sin 1°$.

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите с помощью формул приведения:

1) $\cos 210°$; 2) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$.

Решение

1) ▶ $\cos 210° = \cos(180° + 30°) =$

$$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$ ◁

2) ▶ $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\text{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -1.$ ◁

Комментарий

Представим заданные аргументы так, чтобы можно было применить формулы приведения (то есть выделим в аргументе такие части, которые изображаются на горизонтальном или вертикальном диаметре единичной окружности). Например, $210° = 180° + 30°$. Конечно, можно представить аргумент и так: $210° = 270° - 60°$ и также применить формулы приведения.

Задача 2* Докажите тождество

$$\frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\text{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos 2\alpha.$$

Комментарий

Докажем, что левая часть тождества равна правой. Сначала используем формулы приведения, а потом упростим полученные выражения, применяя формулы: $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$ и $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$. При упрощении выражений $\cos(3\pi - \alpha)$ и $\text{tg}(\pi + \alpha)$ можно использовать как непосредственно формулы приведения, так и периодичность соответствующих функций. Например, учитывая, что периодом функции $\cos x$ является 2π, получаем:

$$\cos(3\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Решение

▶ $$\frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\text{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{(-\cos\alpha) \cdot \cos\alpha}{(-\text{ctg}\,\alpha) \cdot \text{tg}\,\alpha} - (-\sin\alpha)^2 =$$

$$= \frac{-\cos^2\alpha}{-1} - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$ ◁

Вопросы для контроля

1. Проиллюстрируйте на примерах применение формул приведения. Объясните полученный результат.

2*. Докажите несколько формул приведения.

Упражнения

1. Вычислите с помощью формул приведения:

1) $\sin 240°$; 2) $\text{tg}\,300°$; 3) $\cos 330°$; 4) $\text{ctg}\,315°$;

5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 7) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$; 8) $\text{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Вычислите:

1) $\cos 8° \cos 37° - \cos 82° \cos 53°$; 2) $\sin 68° \sin 38° - \sin 52° \cos 112°$.

3. Упростите выражение:

1°) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 2°) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$; 3°) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}$; 5*) $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87°\cdot\operatorname{tg}88°\cdot\operatorname{tg}89°$.

4. Докажите тождество:

1°) $2\sin(90°+\alpha)\sin(180°+\alpha) = -\sin 2\alpha$; 2°) $\operatorname{ctg}20°\cdot\operatorname{ctg}70° = 1$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$; 4*) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

16.4. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

Таблица 31

1. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

2. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Объяснение и обоснование

1. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

- По формулам сложения

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y;$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y. \tag{1}$$

Если обозначить

$$x + y = \alpha, \tag{2}$$
$$x - y = \beta, \tag{3}$$

то, складывая и вычитая равенства (2) и (3), имеем: $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тогда из равенства (1) получаем формулу *преобразования суммы синусов в произведение:*

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{4}$$

Словесно ее можно сформулировать так:

Сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности.

Если заменить в формуле (4) β на $(-\beta)$ и учесть нечетность синуса: $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, то получим формулу:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.}$$

Разность синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих аргументов на косинус их полусуммы.

Аналогично, складывая почленно равенства

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \tag{5}$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y, \tag{6}$$

получаем

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y, \tag{7}$$

и, выполняя замены (2) и (3), имеем

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.}$$

Сумма косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности.

Если вычесть почленно из равенства (5) равенство (6), то получим

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y. \tag{8}$$

Тогда $$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.}$$

Разность косинусов двух аргументов равна: минус двойное произведение синуса полусуммы этих аргументов на синус их полуразности.

Для обоснования формулы преобразования суммы (разности) тангенсов достаточно применить определение тангенса и формулы сложения:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.} \qquad (9)$$

Если в формуле (9) заменить β на $(-\beta)$ и учесть нечетность тангенса ($\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$) и четность косинуса ($\cos(-\beta)=\cos\beta$), то получим

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.} \qquad (10)$$

Отметим, что формулы (9) и (10) справедливы только тогда, когда $\cos\alpha\neq0$ и $\cos\beta\neq0$. ○

2. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

● Укажем, что в процессе обоснования формул преобразования суммы и разности синусов и косинусов в произведение мы фактически получили и формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму. Действительно, если разделить обе части равенства (1) на 2 и записать полученное равенство справа налево, то получим:

$$\boxed{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).} \qquad (11)$$

Аналогично из формулы (7) получим

$$\boxed{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)),} \qquad (12)$$

а из формулы (8) (после деления на -2) формулу

$$\boxed{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)).} \qquad (13)$$

Заменяя в формулах (11–13) значение x на α, а y на β, получаем запись этих формул, приведенную в таблице 31. ○

Примеры решения задач

Задача 1 Преобразуйте заданную сумму или разность в произведение и, если возможно, упростите: 1) $\sin 75°+\sin 15°$; 2*) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

Комментарий

1) В первом задании можно непосредственно применить формулу

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

а потом использовать табличные значения $\sin 45°$ и $\cos 30°$.

2) Во втором задании выражение $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ можно рассмотреть как разность квадратов и разложить его на множители, а затем к каждому из полученных выражений применить формулы преобразования разности или суммы косинусов в произведение. Для дальнейшего упрощения полученного выражения используем формулу синуса двойного аргумента:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta) \text{ и } 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin(\alpha-\beta).$$

Решение

1) ▶ $\sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

2) ▶ $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$ ◁

Задача 2 Преобразуйте в произведение $\sin\alpha+\cos\beta$.

Комментарий

Мы умеем преобразовывать в произведение сумму синусов или косинусов. Для перехода к таким выражениям достаточно вспомнить, что $\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ $\left(\text{или } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

Решение

▶ $$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$ ◁

Задача 3 Упростите выражение $\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}$.

Комментарий

Для упрощения заданной дроби можно попытаться сократить ее: для этого представим числитель и знаменатель в виде произведений, которые содержат одинаковые выражения. В числителе используем формулы преобразования разности синусов и косинусов в произведение (а также нечетность синуса: $\sin(-3\alpha) = -\sin 3\alpha$), а в знаменателе воспользуемся формулой $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

Решение

▶ $$\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 5\alpha\cdot(-2)\sin 5\alpha\sin(-3\alpha)}{2\sin^2 3\alpha}=$$

$$=2\cos 5\alpha\sin 5\alpha=\sin 10\alpha.$$ ◁

Задача 4* Докажите тождество $4\sin 70^\circ - \frac{1}{\sin 10^\circ} = -2.$

Комментарий

Докажем, что левая часть тождества равна правой. После приведения к общему знаменателю преобразуем произведение синусов в разность косинусов, а потом учтем, что $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, а $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$ (поскольку $80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$).

Решение

▶ $$4\sin 70^\circ - \frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{4\sin 70^\circ \sin 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) - 1}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2} - 2\cos 80^\circ - 1}{\sin 10^\circ} = \frac{-2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{-2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = -2.$$ ◁

Задача 5* Докажите, что если A, B, C — углы треугольника, то

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Комментарий

Если A, B, C — углы треугольника, то $A + B + C = \pi$. Тогда $C = \pi - (A + B)$, и по формулам приведения $\sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B)$. После преобразования суммы синусов $\sin A + \sin B$ в произведение замечаем, что аргумент $(A + B)$ вдвое больше, чем аргумент $\frac{A+B}{2}$. Это позволяет записать $\sin(A + B)$ по формуле синуса двойного аргумента и в полученной сумме вынести за скобки $2\sin\frac{A+B}{2}$, а затем в скобках преобразовать сумму косинусов в произведение. Далее следует учесть, что $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, и применить формулы приведения.

Решение

▶ Учитывая, что для углов треугольника $C = \pi - (A + B)$, получаем

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(\pi - (A + B)) =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi - C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$ ◁

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы преобразования суммы и разности синусов или сум-

мы и разности косинусов в произведение. Приведите примеры применения этих формул.

2*. Запишите формулы преобразования суммы и разности тангенсов. Приведите примеры применения этих формул.

3*. Докажите формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

4. Приведите примеры применения формул:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)); \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$

5*. Докажите формулы, приведенные в вопросе 4.

6*. Используя определение возрастания и убывания функции и формулы преобразования разности тригонометрических функций в произведение, обоснуйте аналитически указанные в § 14 промежутки возрастания и убывания функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Упражнения

1. Преобразуйте сумму (или разность) тригонометрических функций в произведение и упростите:

1°) $\cos 152° + \cos 28°$; 2°) $\cos 48° - \cos 12°$; 3) $\cos 20° - \sin 20°$;

4) $\dfrac{\sin 25° + \sin 15°}{\sin 25° - \sin 15°}$; 5*) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; 6*) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

7*) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

2. Докажите тождество:

1°) $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\cos 75° - \cos 15°} = -\sqrt{3}$; 2°) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 3) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 8\alpha} = 2\sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$; 5) $\dfrac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha} = \sin 4\alpha$;

6*) $\dfrac{\sin \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha - \sin \beta} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 7*) $\dfrac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. Преобразуйте в сумму:

1) $\cos 45° \cos 15°$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$; 3) $\sin 20° \sin 10°$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

4. Вычислите:

1) $2\cos 20° \cdot \cos 40° - \cos 20°$; 2*) $4\sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°$.

5*) Докажите, что при $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ выполняется равенство:

1) $\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma = 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

16.5. ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТОВ. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Таблица **32**

1. Формулы тройного аргумента	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{6}(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$
2. Формулы понижения степени	
$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
3. Формулы половинного аргумента	
(Знак перед корнем выбирается в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.)	
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$
$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha},\ \alpha \neq 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
4. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента	
$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	$\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	

Объяснение и обоснование

1. Формулы тройного аргумента. Используя формулы сложения, формулы двойного аргумента, основное тригонометрическое тождество и формулу $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, получаем следующие формулы:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+$$
$$+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$ Таким образом,

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\,.}$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$ Следовательно,

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$ Тогда

$$\boxed{\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.}$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}=\frac{1-\frac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\frac{3}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}}=\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha-3)\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Следовательно, $$\boxed{\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.}$$

Замечание. Функции $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ существуют при любых значениях α, а функция $\operatorname{tg}3\alpha$ существует только тогда, когда $3\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Отсюда $\alpha\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, то есть $\alpha\neq\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Аналогично функция $\operatorname{ctg}3\alpha$ существует только тогда, когда $3\alpha\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, то есть при $\alpha\neq\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

2. Формулы понижения степени. Из формул $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ и $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ получаем формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad(1)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.\qquad(2)$$

3. Формулы половинного аргумента. Если в формулах (1) и (2) вместо α взять аргумент $\frac{\alpha}{2}$, то получим:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) получаем формулы половинного аргумента для синуса и косинуса:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},} \qquad (5)$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.} \qquad (6)$$

В этих формулах знак перед корнем выбирается в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.

Если почленно разделить формулы (5) и (6) и учесть, что $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, то получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},} \qquad (7)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.} \qquad (8)$$

В формулах (7) и (8) знак перед корнем также выбирается в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.

Отметим, что формулы (5) и (6) можно применять при любых значениях α, а формулы (7) и (8) только тогда, когда существуют значения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ соответственно. Таким образом, формулу (7) можно применять, если $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, то есть если $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, а формулу (8) — если $\frac{\alpha}{2}\neq\pi k$, то есть если $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Заметим, что для тангенса и котангенса половинного аргумента можно получить формулы, которые не содержат квадратных корней. Например,

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.} \qquad (9)$$

Действительно, если учесть, что аргумент α вдвое больше аргумента $\frac{\alpha}{2}$, то $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Естественно, формулу (9) можно применять только при $1+\cos\alpha\neq 0$, то есть при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Аналогично обосновывается формула

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.} \tag{10}$$

$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha\neq 0$, то есть формулу (10) можно применять при $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Учитывая, что $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, получаем формулы:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},}\quad \alpha\neq 2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\qquad \boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},}\quad \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

4. **Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.** Чтобы получить соответствующие формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, запишем каждое из этих выражений по формулам двойного аргумента и разделим на $1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Затем, чтобы перейти к тангенсам, разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (разумеется, при условии, что $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$, то есть при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$).

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.} \tag{11}$$

$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$. Поэтому

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \pi + 2\pi k,\ k \in Z.} \quad (12)$$

Если почленно разделить равенства (11) и (12), то получим формулы:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ \alpha \ne \pi + 2\pi k,\ k \in Z.} \quad (13)$$

$$\boxed{\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \pi k,\ k \in Z.}$$

Заметим, что формулу (13) можно получить и по формуле тангенса двойного аргумента, поскольку $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$.

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором: 1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\mathrm{tg}\,15°$.

Решение

1) ▶ $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ◁

2) ▶ $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; ◁

3) ▶ $\mathrm{tg}\,15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$. ◁

Комментарий

Поскольку аргумент $15°$ равен половине аргумента $30°$, а косинус $30°$ известен, то можно найти искомые значения по формулам половинного аргумента. Учитывая, что аргумент $15°$ находится в I четверти (где значения всех тригонометрических функций положительны), в формулах (5) и (6) перед знаком квадратного корня ставится знак «+». Для нахождения тангенса $15°$ можно применить любую из формул (7), (9) или (10), но удобнее применить формулы (9) или (10), запись которых не содержит квадратных корней. После нахождения $\sin 15°$ и $\cos 15°$ можно использовать также формулу $\mathrm{tg}\,15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$.

Замечание. Записи ответов для $\sin 15°$ и $\cos 15°$ можно несколько упростить, выделяя под знаком внешнего квадратного корня квадрат двучлена. Чтобы представить, например, $2-\sqrt{3}$ в виде квадрата двучлена, умножим и разделим это выражение на 2 (и рассмотрим выражение $2\sqrt{3}$ как удвоенное произведение чисел $\sqrt{3}$ и 1). Получаем:

$$2-\sqrt{3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2},\quad 2+\sqrt{3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}.$$

Тогда $\sin 15°=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Выполняя аналогичные преобразования, получаем $\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы тройного и половинного аргументов и формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента. Проиллюстрируйте на примерах применение этих формул.
2. Обоснуйте формулы тройного и половинного аргументов и формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента.

Упражнения

1. Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором:
   1) $\sin 22°30'$; 2) $\cos 22°30'$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$.
2. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:
   1) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.
3. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$.
4. Вычислите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
5. Вычислите $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.
6. Вычислите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.
7. Вычислите $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.
8. Учитывая, что $\sin 36° = \cos 54°$, вычислите $\sin 18°$.

16.6. ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ $a \sin \alpha + b \cos \alpha$

Таблица 33

$$\boxed{a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi),}$$

где аргумент φ определяется из соотношений

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Объяснение и обоснование

Сначала докажем следующее утверждение: *если для чисел m и n выполняется соотношение $m^2 + n^2 = 1$, то одно из этих чисел можно считать синусом, а другое косинусом некоторого аргумента φ.*

Рассмотрим точку M координатной плоскости с координатами $(m; n)$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ (поскольку по условию $m^2 + n^2 = 1$). Итак, точка M находится на единичной окружности, и ее абсцисса является косинусом угла φ, который радиус OM образует с положительным направлением оси Ox, а ордината — синусом этого угла φ. То есть $m = \cos \varphi$, $n = \sin \varphi$.

Если взять $m = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $n = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$. Тогда для некоторого угла φ получаем: $m = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi$, $n = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi$.

Теперь мы можем доказать, что правая часть формулы $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi)$ равна левой:

$$\sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \left(\sin \alpha \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos \alpha \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = a \sin \alpha + b \cos \alpha,$$

что и требовалось доказать. Таким образом,

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi),$$

где аргумент φ определяется из соотношений

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Замечание. В полученной формуле аргумент φ определяется с точностью до 2π, но чаще всего выбирают значение, наименьшее по модулю.

Например, для выражения $\sin \alpha + \cos \alpha$ имеем $a = 1$, $b = 1$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, аргумент φ находится в I четверти и как значение φ можно взять $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\boxed{\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).}$

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

Комментарий

Выражение $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$ можно преобразовать по формуле

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, тогда $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4} = 2$. Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, аргумент φ находится в IV четверти и как значение φ можно взять, например, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Используя метод оценки для нахождения наибольшего и наименьшего значений выражения, учитываем, что необходимо не только оценить значение выражения с помощью нестрогих неравенств $\left(-2 \leqslant 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2\right)$, *но и убедиться, что знак равенства в этих неравенствах достигается.*

Решение

▶ По формуле $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$

получаем $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Учитывая, что $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$, имеем, что $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ принимает все значения из промежутка $[-2; 2]$. Таким образом, наибольшее значение заданного выражения равно 2, а наименьшее — (-2). ◁

Задача 2 Постройте график функции $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Комментарий

Выражение $\sin x + \cos x$ можно записать в виде $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда график заданной функции можно построить с помощью геометрических преобразований графика функции $y = \sin x$.

Решение

▶ $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

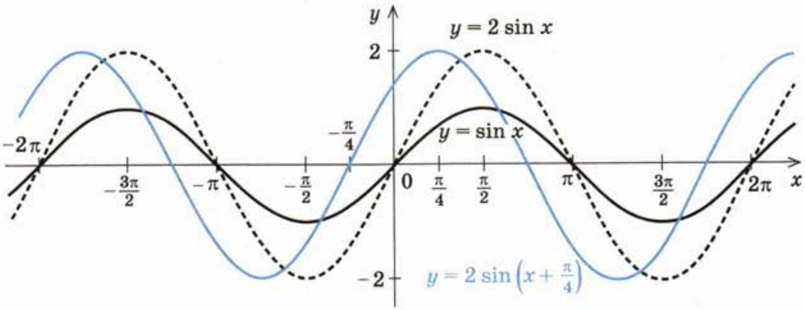


График заданной функции получаем из графика функции $y = \sin x$ растяжением в 2 раза вдоль оси Oy и параллельным переносом полученного графика вдоль оси Ox на $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулу преобразования выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ в выражение вида $c\sin(x+\varphi)$. Проиллюстрируйте на примере применение этой формулы.
2. Обоснуйте формулу преобразования выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ в выражение вида $c\sin(x+\varphi)$.

Упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;

3) $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$; 4) $\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$.

2. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$; 2) $y = \sin 2x - \cos 2x$;

3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$; 4) $y=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$.

3. Найдите область значений функции:

1) $y = 3\sin x + 4\cos x$; 2) $y = 5\sin 3x - 12\cos 3x$;

3) $y = \sin 7x - \cos 7x$; 4) $y=8\sin\frac{x}{3}+15\cos\frac{x}{3}$.

4. Существуют ли такие значения x, при которых выполняется равенство:

1) $3\sin x - 4\cos x = 6$; 2) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 15$;

3) $\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x=\sqrt{5}$; 4) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1{,}5$?

5. Докажите формулу $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\psi)$, где

$\cos\psi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 2

Упростите выражение (1–2).

1. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$; 2) $\sqrt{\sin^2\beta(1+\operatorname{ctg}\beta)+\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}\beta)}$;

3) $(3\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$; 4) $\dfrac{\cos\beta\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}\beta\cos\beta$.

2. 1) $2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\pi) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Докажите тождество (3–4).

3. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\beta$; 2) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$.

4. 1) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\dfrac{\alpha}{4}$ при $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

5 (ГАСБУ). Докажите равенство:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{8}$; 2) $\operatorname{tg} 20° - 4\sin 20°\cdot\sin 50° = -2\sin 20°$;

3) $\dfrac{1}{\sin 10°} - 4\sin 70° = 2$; 4) $\cos 20° + 2\sin 55° - \sqrt{2}\sin 65° = 1$.

6. Докажите, что верно неравенство:

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{13}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)} + 2\sin\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 2\sqrt{3}$;

3) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)(\sin\varphi+\cos\varphi-1) \leqslant 1$;
4) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha + \cos 6\alpha \geqslant -1$.

7. Вычислите:

1) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$, если $\sin 2\alpha = \dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = m$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

4) $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Слово «тригонометрия» впервые встречается (1505 г.) в названии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое: «тригонон» — треугольник, «метрио» — мера. Иными словами, тригонометрия — наука об измерении треугольников. Множество понятий и фактов, которые теперь относят к тригонометрии, были известны еще две тысячи лет назад. Фактически разные отношения отрезков треугольника и окружности (собственно говоря, и тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н. э. в работах великих математиков Древней Греции — Евклида и Архимеда.

Длительное время тригонометрия развивалась как часть геометрии, то есть факты, которые мы теперь формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировали и доказывали с помощью геометрических понятий и утверждений. Вероятно, наибольшие стимулы для развития тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии, что представляло большой практический интерес (например, для решения задач по определению местонахождения судна, предсказания солнечных и лунных затмений и т. п.).

Современный вид тригонометрии придал великий математик XVIII в. Л. Эйлер (1707—1783), швейцарец по происхождению, который долгое время работал в России и был членом Петербургской академии наук. Именно Эйлер первым ввел известные определения тригонометрических функций, начал рассматривать функции произвольного угла, вывел формулы приведения. После Эйлера тригонометрия приняла формы исчисления: разные факты начали доказывать формальным применением тригонометрических формул, доказательства стали намного компактнее.

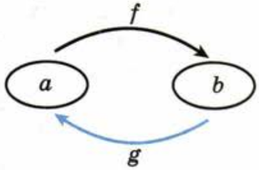
Раздел 3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 17. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Таблица 34

1. Понятие обратной функции

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение в единственной точке ее области определения, то можно задать функцию $y = g(x)$, которая называется *обратной к функции* $y = f(x)$:

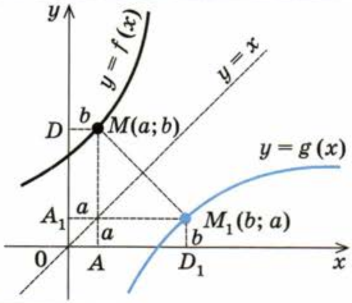


$$\boxed{\begin{gathered}\text{для каждого } a \in D(f),\\ \text{если } f(a) = b, \text{ то } g(b) = a\end{gathered}}$$

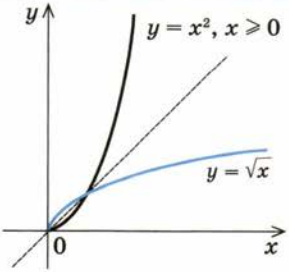
$$\boxed{E(f) = D(g);\ D(f) = E(g)}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные

2. Свойства обратной функции



1) **Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.**



2) **Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то она имеет обратную функцию на этом промежутке, которая возрастает, если $f(x)$ возрастает, и убывает, если $f(x)$ убывает.**

Продолж. табл. 34

3. Практический прием нахождения формулы функции, обратной к функции $y = f(x)$	
Алгоритм	Пример
1. **Выяснить, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения:** для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение $y = f(x)$ единственный корень относительно переменной x. **Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция** (например, это может быть промежуток, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает). 2. **Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.** 3. **В полученной формуле ввести традиционные обозначения: аргумент обозначить через x, а функцию — через y.**	Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$. ▶ Из равенства $y = 2x + 4$ можно однозначно выразить x через y: $x = \frac{1}{2}y - 2.$ Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y. Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Понятие обратной функции. Известно, что зависимость пути от времени движения тела, которое движется равномерно с постоянной скоростью v_0, выражается формулой $S = v_0t$. Из этой формулы можно найти обратную зависимость — времени от пройденного пути $t = \frac{S}{v_0}$. Функцию $t(S) = \frac{S}{v_0}$ называют *обратной к функции* $S(t) = v_0t$. Отметим, что в рассмотренном примере каждому значению t ($t \geqslant 0$) соответствует единственное значение S и, наоборот, каждому значению S ($S \geqslant 0$) соответствует единственное значение t.

Рассмотрим процедуру получения обратной функции в общем виде.

Пусть функция $f(x)$ принимает каждое свое значение в единственной точке ее области определения (такая функция называется *обратимой*). Тогда для каждого числа $y_0 = b$ (из области значений функции $f(x)$) существует единственное значение $x_0 = a$, такое, что $f(a) = b$. Рассмотрим новую функцию $g(x)$, которая каждому числу b из области значений функции $f(x)$ ставит в соответствие число a, то есть $g(b) = a$ для каждого числа b из области значений функции $f(x)$. В этом случае функция $g(x)$ называется обратной к функции $f(x)$, а функция $f(x)$ — обратной к функции $g(x)$. Поэтому говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные.

Из определения обратной функции вытекает, что область значений прямой функции $E(f)$ является областью определения обратной функции $D(g)$, а область определения прямой функции $D(f)$ является областью значений обратной функции $E(g)$.

То есть:

$$E(f) = D(g),\ D(f) = E(g).$$

2. Свойства обратной функции.

Свойство 1. Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Учитывая приведенную выше процедуру построения функции, обратной к функции $y = f(x)$, имеем: если $f(a) = b$, то по определению графика функции точка M с координатами $(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Аналогично, поскольку $g(b) = a$, то точка M_1 с координатами $(b;\ a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Точки $M\ (a;\ b)$ и $M_1\ (b;\ a)$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 101). Действительно, прямая $y = x$ является осью симметрии системы координат. Таким образом, при симметрии относительно этой прямой ось Ox отображается на ось Oy, а ось Oy — на ось Ox. Тогда (например, при $a > 0$ и $b > 0$) прямоугольник $OAMD$ со сторонами $OA = a$ и $OD = b$ на осях координат отображается на прямоугольник $OA_1M_1D_1$ со сторонами на осях координат $OA_1 = OA = a$ и $OD_1 = OD = b$. Следовательно, при симметрии относительно прямой $y = x$ точка $M\ (a;\ b)$ отображается в точку $M_1\ (b;\ a)$ (а точка M_1 — в точку M). Таким образом, при симметрии относительно прямой $y = x$ любая точка $M\ (a;\ b)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, имеет соответствующую точку $M_1\ (b;\ a)$, принадлежащую графику функции $y = g(x)$, а любая точка $M_1\ (b;\ a)$, которая принадлежит графику функции $y = g(x)$, имеет соответствующую точку $M\ (a;\ b)$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$. То есть графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

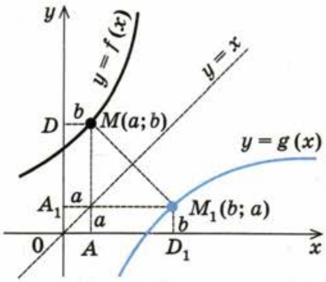


Рис. 101

Свойство 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором множестве D, а E – область значений этой функции, то она имеет обратную функцию $g(x)$, которая определена и возрастает на E, если $f(x)$ возрастает (и убывает на E, если $f(x)$ убывает).

Действительно, если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором множестве $\boldsymbol{D}$, а $\boldsymbol{E}$ – область значений этой функции, то по свойству возрастающей (убывающей) функции каждое свое значение она принимает в единственной точке из множества $\boldsymbol{D}$ (с. 21). Поэтому функция $f(x)$ имеет обратную функцию $g(x)$ с областью определения E. Обосновать, что функция $g(x)$ возрастает, если $f(x)$ возрастает, можно методом от противного.

Пусть числа a_1 и a_2 входят в область определения функции $f(x)$ и

$$a_2 > a_1. \tag{1}$$

Обозначим $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(a_2) > f(a_1)$, то есть $b_2 > b_1$. По определению обратной функции $g(x)$ числа b_1 и b_2 входят в ее область определения и

$$g(b_1) = a_1,\ g(b_2) = a_2. \tag{2}$$

Если допустить, что функция $g(x)$ не является возрастающей, то из неравенства $b_2 > b_1$ не может вытекать неравенство $g(b_2) > g(b_1)$ (иначе функция $g(x)$ будет возрастающей), таким образом, для некоторых b_2 и b_1 может выполняться неравенство $g(b_2) \leqslant g(b_1)$. Но тогда по формулам (2) получаем $a_2 \leqslant a_1$, что противоречит условию (1). Таким образом, наше предположение неверно, и функция $g(x)$ возрастает, если функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично обосновывается, что в случае, когда функция $f(x)$ убывает, обратная к ней функция $g(x)$ тоже убывает. ○

3. Практический прием нахождения формулы функции, обратной к функции $y = f(x)$. Из определения обратной функции следует, что для получения обратной зависимости необходимо знать, как значение x выражается через значение y. Это можно сделать, решив уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x. Если заданная функция обратима, то уравнение будет иметь единственное решение для всех y из области значений функции $f(x)$, и мы получим формулу $x = g(y)$, которая задает обратную функцию. Но в этой формуле аргумент обозначен через y, а функция — через x. Если поменять обозначения на традиционные, то получим запись функции, обратной к функции $y = f(x)$.

Эти рассуждения вместе с соответствующим алгоритмом приведены в таблице 34 и реализованы в решении следующих задач.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x-1}$.

Решение

▶ Область определения: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y = \frac{1}{x-1}$ имеем

$$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x = \frac{y+1}{y}.$$

Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим функцию $y = \frac{x+1}{x}$, обратную к заданной. ◁

Комментарий

На всей области определения ($x \neq 1$) заданная функция обратима, поскольку из уравнения $y = \frac{1}{x-1}$ можно однозначно выразить x через y ($y \neq 0$ в области значений заданной функции). Полученная формула $x = \frac{y+1}{y}$ задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

Задача 2 Найдите функцию, обратную к функции $y = x^2$.

Решение

▶ Из равенства $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ получаем $x = \pm\sqrt{y}$. Тогда при $y > 0$ одному значению y соответствуют два значения x. Таким образом, на всей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$ функция $y = x^2$ не является обратимой, и для нее нельзя найти обратную функцию. ◁

Комментарий

Область значений заданной функции: $y \geqslant 0$. Но при $y > 0$ из равенства $y = x^2$ нельзя однозначно выразить x через y. Например, при $y = 4$ получаем $x = \pm 2$. Вследствие этого мы не можем значению $y = 4$ поставить в соответствие единственное число, чтобы построить обратную функцию.

Задача 3 Найдите функцию, обратную к функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$.

Решение

▶ Из равенства $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ получаем $x = \pm\sqrt{y}$. Учитывая, что по условию $x \geqslant 0$, имеем $x = \sqrt{y}$.

Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим, что функцией, обратной к функции $y = x^2$, которая задана только при $x \geqslant 0$, будет функция $y = \sqrt{x}$. ◁

Комментарий

Множество значений заданной функции: $y \geqslant 0$. При $x \geqslant 0$ заданная функция $y = x^2$ возрастает, таким образом, на промежутке $x \geqslant 0$ она имеет обратную функцию, а значит, на этом промежутке уравнение $x^2 = y$ мы сможем решить однозначно: при $x \geqslant 0$ имеем $x = \sqrt{y}$.

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

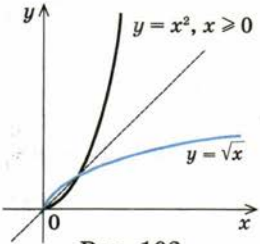


Рис. 102

Замечание. В примерах 2 и 3 мы фактически рассматриваем различные функции (они имеют разные области определения), хотя в обоих случаях эти функции задаются одной и той же формулой. Как известно, графиком функции $y = x^2$ (пример 2) является парабола, а графиком функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ (пример 3) является только правая ветвь этой параболы (рис. 102).

Вопросы для контроля

1. При каком условии для заданной функции $y = f(x)$ можно построить обратную функцию?
2. Объясните построение графика обратной функции на примере функции $y = f(x)$, которая задана таблицей:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте обратную функцию $y = g(x)$ с помощью таблицы:

x				
$g(x)$				

3. Как расположены графики прямой и обратной функций, если они построены в одной системе координат? Проиллюстрируйте соответствующее свойство графиков на примере.
4*. Обоснуйте взаимное расположение графиков прямой и обратной функций.
5. Существует ли обратная функция к функции $y = x^2$, где $x \leqslant 0$? Объясните ответ, опираясь на соответствующие свойства обратной функции. Если обратная функция существует, то задайте ее формулой вида $y = g(x)$.

Упражнения

1. Запишите формулу, которая задает функцию $y = g(x)$, обратную к заданной. Укажите область определения и множество значений функции $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

2. На одном рисунке постройте графики данной функции и функции, обратной к данной:

1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$.

3. Найдите функцию, обратную к данной на заданном промежутке, и постройте на одном рисунке графики данной функции и функции, обратной к данной:

1) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \geqslant 0$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \leqslant 0$;

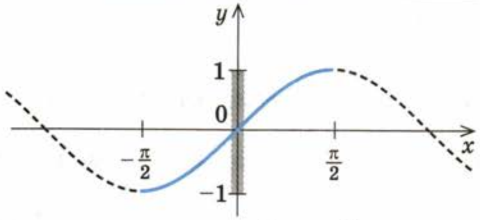
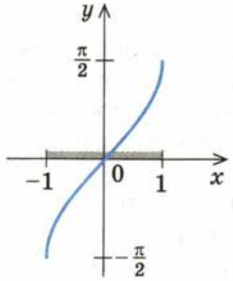
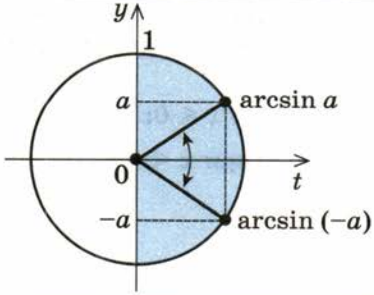
3) $y = (x-2)^2$ при $x \geqslant 2$; 4) $y = x^2 - 2$ при $x \leqslant 0$.

§ 18. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для получения обратных тригонометрических функций для каждой тригонометрической функции выделяется промежуток, на котором она возрастает (или убывает). Для обозначения обратных тригонометрических функций перед соответствующей функцией ставится буквосочетание «arc» (читается: «арк»).

18.1. ФУНКЦИЯ $y = \arcsin x$

Таблица 35

1. График	
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
 На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x$ возрастает	
2. Значение $\arcsin a$ ($\lvert a \rvert \leqslant 1$)	
$\arcsin a$ — это такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. $\arcsin a = \varphi$, если $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \varphi = a \end{cases}$	$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Нечетность функции $y = \arcsin x$	
	**$\arcsin(-a) = -\arcsin a$**

Объяснение и обоснование

1. График функции y = arcsin x. Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все значения от -1 до 1. Следовательно, на этом промежутке функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию, которая обозначается $y = \arcsin x$, с областью определения $[-1; 1]$ и областью значений $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. По свойству обратной функции (с. 222) функция $y = \arcsin x$ также возрастает, и ее график можно получить из графика функции $y = \sin x$ (на заданном промежутке) с помощью симметричного отображения относительно прямой $y = x$ (рис. 103).

2. Значение arcsin a. По определению обратной функции (на выбранном промежутке), если $\sin \varphi = a$, то $\arcsin a = \varphi$, причем $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $|a| \leqslant 1$.

Таким образом, запись $\arcsin a = \varphi$ ($|a| \leqslant 1$) означает, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \varphi = a$, то есть

arcsin a — это такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Например, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Аналогично $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, поскольку $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Нечетность функции y = arcsin x. Для нахождения арксинусов отрицательных чисел можно также пользоваться нечетностью функции $\arcsin x$, то есть формулой: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

● Это следует из того, что график функции $y = \arcsin x$ (рис. 103) симметричен относительно начала координат, а также из того, что точки a

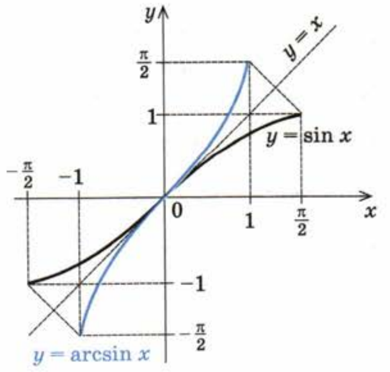


Рис. 103

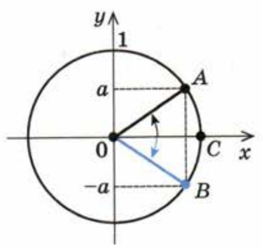


Рис. 104

и $(-a)$ на оси Oy (рис. 104) симметричны относительно оси Ox. Тогда и соответствующие точки A и B на единичной окружности (на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) также будут симметричными относительно оси Ox. Таким образом, $\angle COA = \angle COB$. Но $\arcsin a = \angle COA$, а $\arcsin(-a) = -\angle COB$ (рисунок 104 приведен для случая $a > 0$). Получаем

$$\mathbf{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

Например, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Пример. Найдите: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение

1) Пусть $\arcsin\frac{1}{3} = \varphi$, тогда по определению арксинуса получаем, что

$$\sin\varphi = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \sin\frac{1}{3}.$$

2) Пусть $\arcsin\frac{3}{5} = \varphi$. По определению арксинуса получаем, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Учитывая, что $\cos\varphi \geqslant 0$, имеем:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Таким образом,

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos\varphi = \frac{4}{5}.$$

Комментарий

1) Так как запись $\varphi = \arcsin a$ ($|a| \leqslant 1$) означает, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\varphi = a$, то всегда выполняется равенство

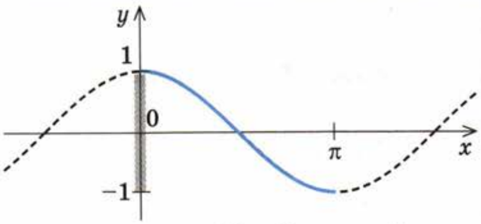
$$\boxed{\sin(\arcsin a) = a,\ |a| \leqslant 1.}$$

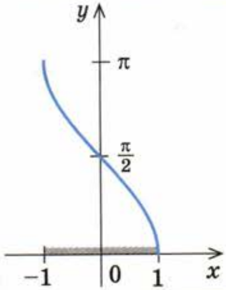
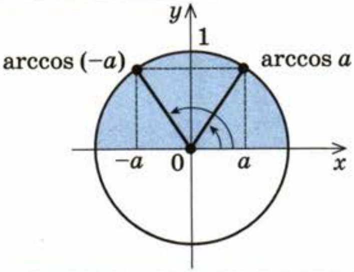
Эту формулу можно не запоминать: достаточно *обозначить выражение в скобках через* φ *и применить определение арксинуса*.

2) Если обозначить выражение в скобках через φ, то по требованию задачи необходимо найти $\cos\varphi$. Использовав определение арксинуса, получаем стандартную задачу: зная синус угла, найти его косинус, если угол находится на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Так как $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то на этом промежутке $\cos\varphi \geqslant 0$, таким образом, $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

18.2. ФУНКЦИЯ $y = \arccos x$

Таблица 36

<table>
<tr><td colspan="2">1. График</td></tr>
<tr><td>$y = \cos x$</td><td>$y = \arccos x$</td></tr>
<tr><td>

На промежутке $[0;\ \pi]$ $\cos x$ убывает</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значение $\arccos a$ ($|a| \leqslant 1$)</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$\arccos a$ — это такое число из промежутка $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a.
$\arccos a = \varphi$, если $\begin{cases} \varphi \in [0; \pi], \\ \cos\varphi = a \end{cases}$</td><td>$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как
$\frac{\pi}{4} \in [0;\ \pi]$ и $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Формула для $\arccos(-a)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. График функции $y = \arccos x$. Функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0;\ \pi]$ и принимает все значения от 1 до −1. Таким образом, на этом промежутке функция $y = \cos x$ имеет обратную функцию, которая обозначается $y = \arccos x$, с областью определения $[-1;\ 1]$ и областью значений $[0;\ \pi]$. По свойству обратной функции (с. 222) функция $y = \arccos x$ также убывает, и ее график можно получить из графика функции $y = \cos x$ (на заданном промежутке) с помощью симметричного отображения его относительно прямой $y = x$ (рис. 105).

2. Значение arccos *a*. По определению обратной функции (на выбранном промежутке), если $\cos \varphi = a$, то $\arccos a = \varphi$, причем $\varphi \in [0; \pi]$ и $|a| \leqslant 1$. Таким образом, запись $\arccos a = \varphi$ ($|a| \leqslant 1$) означает, что $\varphi \in [0; \pi]$ и $\cos \varphi = a$, то есть

arccos a — это такое число из промежутка [0; π], косинус которого равен a.

Например, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Аналогично $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, поскольку $\frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Формула для arccos (−*a*). Для нахождения арккосинусов отрицательных чисел можно также пользоваться формулой $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Это следует из того, что точки a и $(-a)$ на оси Ox (рис. 106) являются симметричными относительно оси Oy. Тогда и соответствующие точки A и B на единичной окружности (на промежутке $[0; \pi]$) также будут симметричными относительно оси Oy. Таким образом, $\angle COA = \angle DOB$, значит, $\angle COB = \pi - \angle DOB = \pi - \angle COA$. Но $\arccos a = \angle COA$, а $\arccos(-a) = \angle COB = \pi - \angle COA$. Получаем

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a.}$$

Например, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что равенство $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ означает, что функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной.

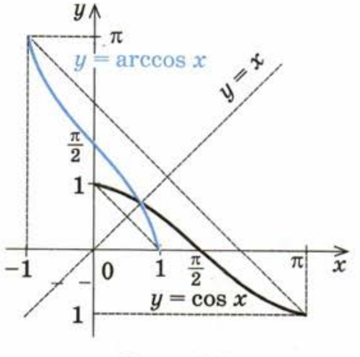


Рис. 105

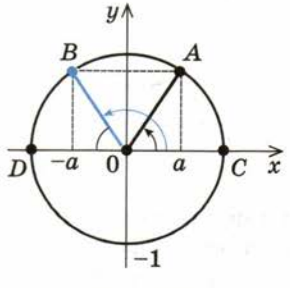


Рис. 106

Пример. Найдите $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Решение

▶ Пусть $\arccos\frac{2}{3}=\varphi$, тогда по определению арккосинуса получаем, что $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Таким образом,

$$\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}. \quad ◁$$

Комментарий

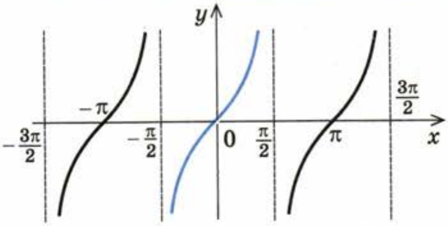
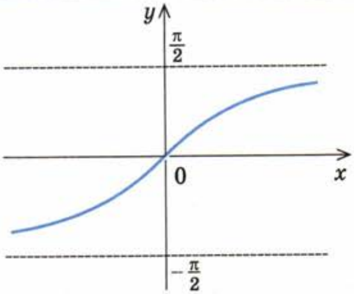
Поскольку запись $\varphi = \arccos a$ ($|a| \leqslant 1$) означает, что $\varphi \in [0; \pi]$ и $\cos\varphi = a$, то всегда выполняется равенство

$$\boxed{\cos(\arccos a) = a, \ |a| \leqslant 1.}$$

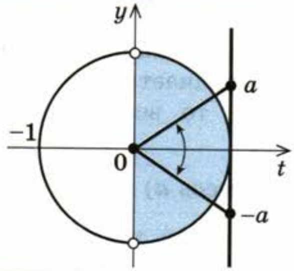
Эту формулу можно не запоминать: достаточно *обозначить выражение в скобках через φ и применить определение арккосинуса.*

18.3. ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{arctg} x$

Таблица 37

1. График	
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
 На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ возрастает	
2. Значение $\operatorname{arctg} a$	
Ориентир	Пример
$\operatorname{arctg} a$ — это такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. $\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi, \text{ если } \begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\varphi = a \end{cases}}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Продолж. табл. 37

3. Нечетность функции $y = \text{arctg}\, x$	
	$\boxed{\text{arctg}\,(-a) = -\text{arctg}\, a}$

Объяснение и обоснование

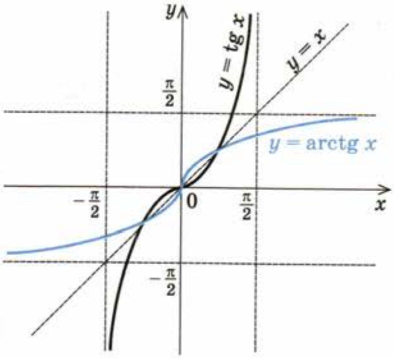


Рис. 107

1. График функции $y = \text{arctg}\, x$. Функция $y = \text{tg}\, x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, на этом промежутке функция $y = \text{tg}\, x$ имеет обратную функцию, которая обозначается $y = \text{arctg}\, x$, с областью определения $(-\infty; +\infty)$ и множеством значений $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. По свойству обратной функции (с. 222) функция $y = \text{arctg}\, x$ также возрастает, и ее график можно получить из графика функции $y = \text{tg}\, x$ (на заданном промежутке) с помощью симметричного отображения относительно прямой $y = x$ (рис. 107).

2. Значение arctg a. По определению обратной функции (на выбранном промежутке), если $\text{tg}\, \varphi = a$, то $\text{arctg}\, a = \varphi$, причем $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, запись $\text{arctg}\, a = \varphi$ означает, что $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\, \varphi = a$. То есть

arctg a — *это такое число из промежутка* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, *тангенс которого равен* a.

Например, $\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Аналогично $\text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

3. Нечетность функции $y = \text{arctg}\, x$. Для нахождения арктангенсов отрицательных чисел можно также пользоваться нечетностью функции $\text{arctg}\, x$, то есть формулой $\text{arctg}\,(-a) = -\text{arctg}\, a$.

Это следует из того, что график функции $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 107) симметричен относительно начала координат, а также из того, что точки a и $(-a)$ на линии тангенсов являются симметричными относительно оси Ox (рис. 108). Тогда и соответствующие точки A и B на единичной окружности (на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) также будут симметричными относительно оси Ox. Таким образом, $\angle COA = \angle COB$. Но $\operatorname{arctg} a = \angle COA$, а $\operatorname{arctg}(-a) = -\angle COB$. Получаем

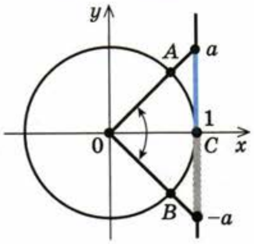


Рис. 108

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Например, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Пример Найдите $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$.

Решение

▶ Пусть $\operatorname{arctg} 4 = \varphi$, тогда по определению арктангенса получаем, что

$$\operatorname{tg}\varphi = 4.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4) = \operatorname{tg}\varphi = 4. \triangleleft$$

Комментарий

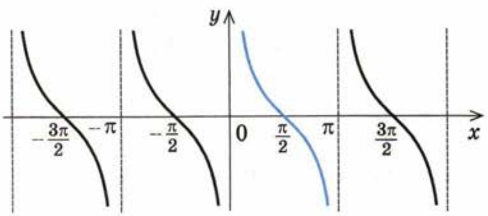
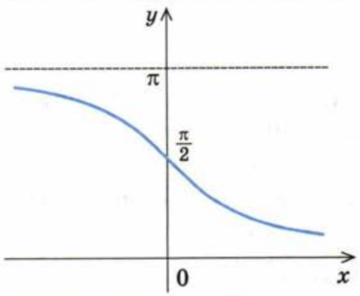
Поскольку запись $\varphi = \operatorname{arctg} a$ означает, что $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\varphi = a$, то всегда выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.}$$

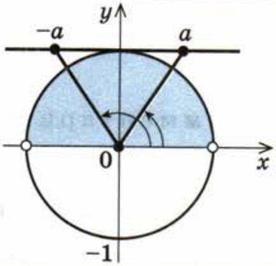
Эту формулу можно не запоминать: *достаточно обозначить выражение в скобках через φ и применить определение арктангенса.*

18.4. ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{arcctg} x$

Таблица 38

1. График	
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
 На промежутке $(0; \pi)$ $\operatorname{ctg} x$ убывает	

Продолж. табл. 38

2. Значение arcctg a	
Ориентир	Пример
arcctg a — это такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. $\operatorname{arcctg} a = \varphi$, если $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} \varphi = a \end{cases}$	$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, так как $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$
3. Формула для **arcctg $(-a)$**	
	$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$

Объяснение и обоснование

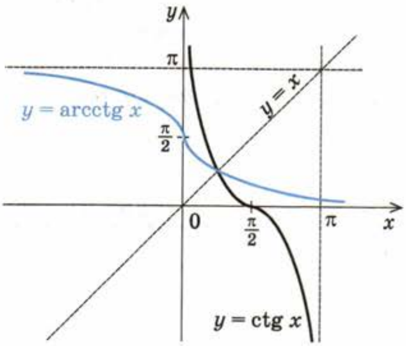


Рис. 109

1. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$ и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, на этом промежутке функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет обратную функцию, которая обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$, с областью определения $(-\infty; +\infty)$ и областью значений $(0; \pi)$. По свойству обратной функции (с. 222) функция $y = \operatorname{arcctg} x$ также убывает, и ее график можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ (на заданном промежутке) с помощью симметричного отображения его относительно прямой $y = x$ (рис. 109).

2. Значение arcctg a. По определению обратной функции (на выбранном промежутке), если $\operatorname{ctg} \varphi = a$, то $\operatorname{arcctg} a = \varphi$, причем $\varphi \in (0; \pi)$. Таким образом, запись $\operatorname{arcctg} a = \varphi$ означает, что $\varphi \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} \varphi = a$. То есть

arcctg a — *это такое число из промежутка* $(0; \pi)$, *котангенс которого равен* a.

Например, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Аналогично $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$, поскольку $\frac{2\pi}{3}\in(0;\pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Формула для arcctg $(-a)$. Для нахождения арккотангенсов отрицательных чисел можно также пользоваться формулой $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$.

● Это следует из того, что точки a и $(-a)$ на линии котангенсов (рис. 110) являются симметричными относительно оси Oy. Тогда и соответствующие точки A и B на единичной окружности (на промежутке $(0;\pi)$) также будут симметричными относительно оси Oy. Таким образом, $\angle COA=\angle DOB$, значит, $\angle COB=\pi-\angle DOB=\pi-\angle COA$.
Но $\operatorname{arcctg} a=\angle COA$, а $\operatorname{arcctg}(-a)=\angle COB=\pi-\angle COA$.
Получаем

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a}.$$

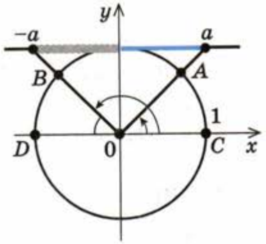


Рис. 110

Например, $\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Отметим, что равенство $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$ означает, что функция $y=\operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной.

Задача 1 Найдите $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 7)$.

Решение

▶ Пусть $\operatorname{arcctg} 7=\varphi$, тогда по определению арккотангенса получаем, что $\operatorname{ctg}\varphi=7$.
Таким образом,
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 7)=\operatorname{ctg}\varphi=7$. ◁

Комментарий

Поскольку запись $\varphi=\operatorname{arcctg} a$ означает, что $\varphi\in(0;\pi)$ и $\operatorname{ctg}\varphi=a$, то всегда выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a}.$$

Эту формулу можно не запоминать: *достаточно обозначить выражение в скобках через φ и применить определение арккотангенса.*

Задача 2* Докажите, что $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$.

Решение

▶ Пусть $\varphi=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$.

1) Поскольку $\operatorname{arcctg} a\in(0;\pi)$, то $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Если $\operatorname{arcctg} a=\beta$, то $\operatorname{ctg}\beta=a$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}-\beta$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta=a.$$

Комментарий

Запишем заданное равенство в виде $\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$. Если обозначить $\varphi=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$, то для доказательства равенства $\operatorname{arctg} a=\varphi$ по определению арктангенса достаточно доказать, что:

1) $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и 2) $\operatorname{tg}\varphi=a$.

По определению арктангенса получаем $\operatorname{arctg} a = \varphi$.

Таким образом, $\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$, а это и означает, что

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}. \triangleleft$$

При доказательстве следует также учесть определение арккотангенса: если

$\operatorname{arcctg} a = \beta$, то

$\beta \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} \beta = a$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, какое число обозначает выражение: а) $\arcsin a$; б) $\arccos a$; в) $\operatorname{arctg} a$; г) $\operatorname{arcctg} a$. При каких значениях a существуют эти выражения? Проиллюстрируйте объяснение примерами.
2. Объясните, как можно получить графики обратных тригонометрических функций.
3*. Изобразите графики обратных тригонометрических функций, укажите и обоснуйте их простейшие свойства (область определения, множество значений, возрастание или убывание, четность, нечетность):
а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$.
4. Обоснуйте формулы:
а) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; б) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;
в) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; г) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Упражнения

Вычислите **(1–9)**.

1°. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2°. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} 1$; 3) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

3°. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4°. 1) $\operatorname{arcctg} 0$; 2) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin \frac{2}{7}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{5}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$.

6. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7)$; 2*) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 4*) $\cos\left(\operatorname{arctg} \sqrt{2}\right)$.

7. 1) $\cos\left(\arccos \frac{2}{7}\right)$; 2*) $\sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{1}{5}\right)$.

8. 1) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{7}\right)$; 2*) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arcctg} 5)$; 4*) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

9*. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 7)$; 3) $\arccos\left(\cos\frac{21\pi}{5}\right)$; 4) $\arccos(\cos 8)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; 7) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{9}\right)$; 8) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 10)$.

10*. Докажите, что $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ при $|a| \leqslant 1$.

§ 19. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения
$$\cos x = a,\ \sin x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

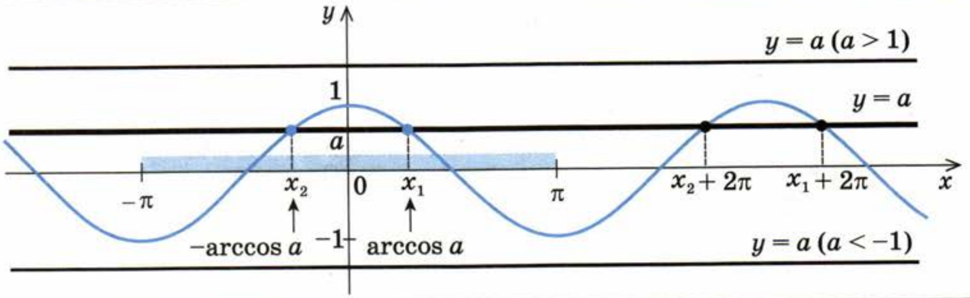
Чтобы рассуждения по нахождению корней этих уравнений были более наглядными, воспользуемся графиками соответствующих функций.

19.1. Уравнение $\cos x = a$

Таблица 39

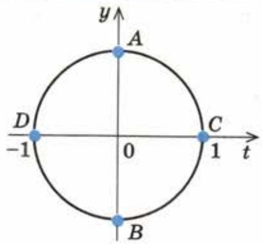
1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\cos x = a$

Графическая иллюстрация



Решения	Примеры
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert > 1$: **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1$. ◁

Продолж. табл. 39

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$	
	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Объяснение и обоснование

1. Корни уравнения $\cos x = a$. При $|a| > 1$ уравнение не имеет корней, поскольку $|\cos x| \leqslant 1$ для любого x (прямая $y = a$ на рисунке из пункта 1 таблицы 39 при $a > 1$ или при $a < -1$ не пересекает график функции $y = \cos x$).

Пусть $|a| \leqslant 1$. Тогда прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \cos x$ (рис. из пункта 1 табл. 39). На промежутке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает от 1 до -1. Но убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения (см. с. 21), поэтому уравнение $\cos x = a$ имеет на этом промежутке только один корень, который по определению арккосинуса равен: $x_1 = \arccos a$ (и для этого корня $\cos x = a$).

Косинус — четная функция, поэтому на промежутке $[-\pi; 0]$ уравнение $\cos x = a$ также имеет только один корень — число, противоположное x_1, то есть $x_2 = -\arccos a$.

Таким образом, на промежутке $[-\pi; \pi]$ (длиной 2π) уравнение $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$ имеет только корни $x = \pm\arccos a$.

Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, поэтому все остальные корни отличаются от найденных на $2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). Получаем следующую формулу корней уравнения $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.} \qquad (1)$$

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$.

- Полезно помнить специальные записи корней уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, которые можно легко получить, используя как ориентир единичную окружность.

Поскольку косинус равен абсциссе соответствующей точки единичной окружности, получаем, что $\cos x = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка A или точка B (рис. из пункта 2 табл. 39). Тогда

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Аналогично $\cos x = 1$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка C, следовательно, $x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Также $\cos x = -1$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка D, таким образом, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ○

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение

▶ $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\cos x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (1).

Для вычисления $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Тогда

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулу (1) нельзя применить).

Задача 3 Решите уравнение $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ:

$$\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1).

Учитывая, что $\arccos\frac{1}{3}$ не является табличным значением, для получения ответа достаточно после нахождения $4x$ по формуле (1) обе части последнего уравнения разделить на 4.

Задача 4 Решите уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение

▶ $2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ n\in Z,$

$$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$

$$x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$$

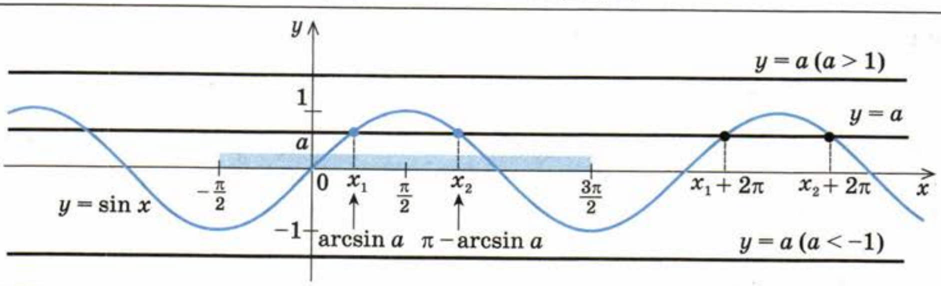
Ответ: $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$ ◁

Комментарий

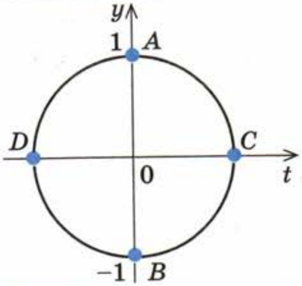
Поскольку $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$, то можно воспользоваться формулой (1) для нахождения значения выражения $2x-\frac{\pi}{3}$, стоящего под знаком косинуса. После этого из полученного линейного уравнения находим x.

19.2. УРАВНЕНИЕ $\sin x = a$

Таблица 40

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\sin x = a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Графическая иллюстрация</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Решения</td><td>Примеры</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\sin x = a}$
$|a|>1$ → $\boxed{\text{Корней нет}}$
$|a|\leqslant 1$ → $\boxed{x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z}$</td><td>1. ▶ $\sin x=\frac{1}{2}$,
$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z.$
$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$ ◁
2. ▶ $\sin x=\sqrt{3}$.
Корней нет, так как $\sqrt{3}>1$. ◁</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 40

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$	
	$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Объяснение и обоснование

1. Корни уравнения $\sin x = a$. При $|a| > 1$ уравнение не имеет корней, поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ для любого x (прямая $y = a$ на рисунке 111 при $a > 1$ или при $a < -1$ не пересекает график функции $y = \sin x$).

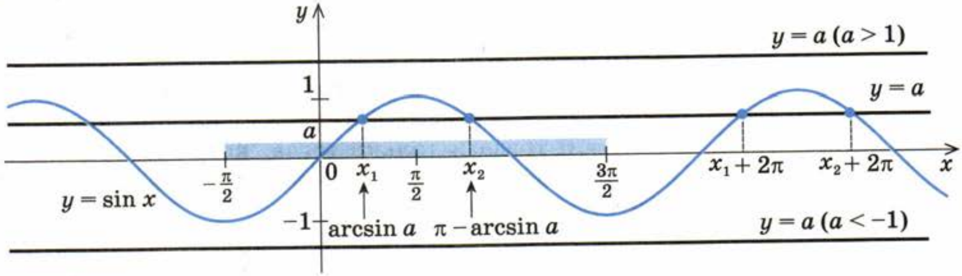


Рис. 111

Пусть $|a| \leqslant 1$. Тогда прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sin x$ (рис. 111). На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до 1. Но возрастающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения (см. с. 21), поэтому уравнение $\sin x = a$ имеет на этом промежутке только один корень, который по определению арксинуса равен: $x_1 = \arcsin a$ (и для этого корня $\sin x = a$).

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до -1. Но убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения, поэтому уравнение $\sin x = a$ имеет на этом промежутке также только один корень $x_2 = \pi - \arcsin a$ (рис. 111). Для проверки правильности записи значения второго корня x_2 заметим, что $x_2 = \pi - x_1$, тогда $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$. То есть x_2 — корень уравнения $\sin x = a$.

Таким образом, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (длиной 2π) уравнение $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$ имеет только корни $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, поэтому все остальные корни отличаются от найденных на $2\pi k$ ($k \in Z$). Получаем следующие формулы корней уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$x = \arcsin a + 2\pi k; \tag{1}$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z. \tag{2}$$

Все значения корней уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$, которые дают формулы (1) и (2), можно записать с помощью одной формулы

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.} \tag{3}$$

Действительно, из формулы (3) при четном $n = 2k$ получаем $x = \arcsin a + 2\pi k$ — формулу (1), а при нечетном $n = 2k + 1$ — формулу $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, то есть формулу (2).

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$

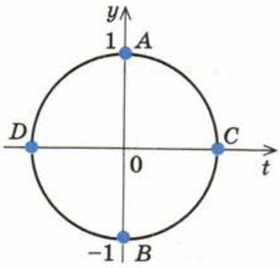


Рис. 112

Полезно помнить специальные записи корней при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, которые можно легко получить, используя как ориентир единичную окружность (рис. 112).

Учитывая, что синус равен ординате соответствующей точки единичной окружности, получаем, что $\sin x = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка C или точка D. Тогда

$$x = \pi k,\ k \in Z.$$

Аналогично $\sin x = 1$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка A, следовательно,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Также $\sin x = -1$ тогда и только тогда, когда соответствующей точкой единичной окружности является точка B, таким образом,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z. \bigcirc$$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение

▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\sin x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (3).

Для вычисления $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Тогда

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Замечание. Ответ к задаче 1 часто записывают в виде $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, но такая запись не является обязательной.

Задача 2 Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулой (3) нельзя воспользоваться).

Задача 3 Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение

▶ $2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z},$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

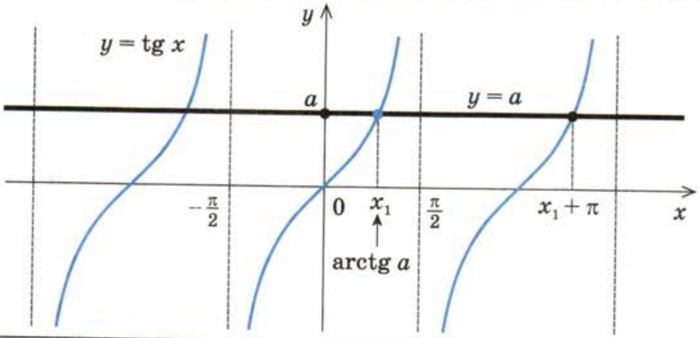
Комментарий

Поскольку $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (3) для нахождения значения выражения $2x + \frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найти переменную x.

19.3. УРАВНЕНИЯ $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

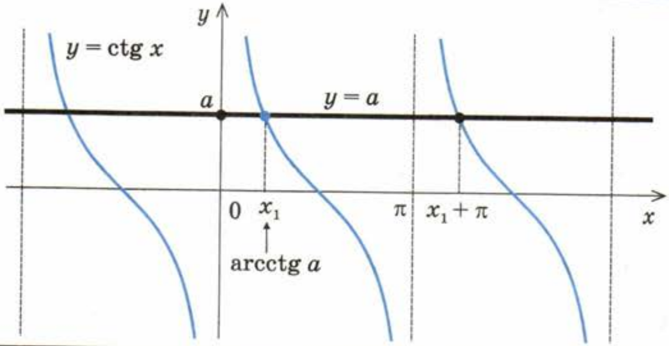
Таблица 41

1. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$



Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = a \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{tg} x = 1$ ▶ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

2. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$



Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = a \\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{ctg} x = 7$ ▶ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Объяснение и обоснование

1. Корни уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

● Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = a$. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает (от $-\infty$ до $+\infty$). Но возрастающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения (см. с. 21), поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ при любом значении a имеет на этом промежутке только один корень, который по определению арктангенса равен: $x_1 = \operatorname{arctg} a$ и для этого корня $\operatorname{tg} x = a$ (рисунок из пункта 1 табл. 41).

Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, поэтому все остальные корни отличаются от найденного на πn ($n \in \boldsymbol{Z}$). Получаем следующую формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (1)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arctg} 0 = 0$, таким образом, уравнение

$\operatorname{tg} x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ○

● Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. На промежутке $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает (от $+\infty$ до $-\infty$). Но убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения (см. с. 21), поэтому уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ при любом значении a имеет на этом промежутке только один корень, который по определению арккотангенса равен: $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ (см. также рисунок из пункта 2 табл. 41). Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π, поэтому все остальные корни отличаются от найденного на πn ($n \in \boldsymbol{Z}$). Получаем такую формулу корней уравнения $\operatorname{ctg} x = a$:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (2)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, таким образом, уравнение

$\operatorname{ctg} x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ○

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение

▶ $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (1):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для нахождения $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можно применить формулу

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тогда

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

Решение

▶ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Сначала по формуле (1) найдем значение выражения $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x.

Задача 3 Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = 5.$

Решение

▶ $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (2):

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{arcctg} 5$ не является табличным значением (см. табл. 19, приведенную на с. 156), полученная формула дает окончательный ответ.

Задача 4 Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1.$

Решение

▶ $3x+\frac{\pi}{6}=\operatorname{arcctg}(-1)+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+\pi n,$$

$$x=\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Сначала по формуле (2) найдем значение выражения $3x+\frac{\pi}{6}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x.

Для нахождения $\operatorname{arcctg}(-1)$ можно воспользоваться формулой

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$. Тогда

$$\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Вопросы для контроля

1. Какие уравнения называют простейшими тригонометрическими?
2. Запишите формулы решения простейших тригонометрических уравнений. В каких случаях нельзя найти корни простейшего тригонометрического уравнения по этим формулам?
3*. Выведите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

4*. Обоснуйте формулы решения простейших тригонометрических уравнений для частных случаев (для $\sin x = a$ и $\cos x = a$ случаи $a = 0;\ 1;\ -1$, для $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ случай $a = 0$).

Упражнения

Решите уравнение **(1–11)**.

1°. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \sqrt{3}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2°. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3°. 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

4°. 1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

5. 1) $\sin x = -0{,}6$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x = 2{,}5$.

6. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x = 0$; 3) $\operatorname{tg} 3x = 1$; 4) $\operatorname{tg} 4x = 3$.

7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7} = 1$.

8°. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x = 0$.

9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

3) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

Найдите корни уравнения на заданном промежутке **(12–13)**.

12*. 1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0,\ 2\pi]$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi,\ \pi]$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi,\ 3\pi]$; 4) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0,\ \pi]$.

13*. 1) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $[-4,\ 4]$; 2) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12,\ 18]$;

3) $\cos x = 1$, $[-6,\ 16]$; 4) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1,\ 7]$.

§ 20. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ОТ ПРОСТЕЙШИХ

Как правило, решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений с помощью преобразований тригонометрических выражений, разложения на множители и замены переменных.

20.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Следует помнить общий ориентир, когда замена переменных может выполняться без преобразования данных тригонометрических выражений.

Если в уравнение, неравенство или тождество переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).

Задача 1 Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение

▶ Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Комментарий

Анализируя вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\sin x = t$.

После решения квадратного уравнения необходимо выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

Замечание. Записывая решения задачи 1, можно при введении замены $\sin x = t$ учесть, что $|\sin x| \leqslant 1$, и записать ограничения $|t| \leqslant 1$, а далее заметить, что один из корней $t = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leqslant 1$, и после этого обратную замену выполнять только для $t = \frac{1}{2}$.

Задача 2 Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$.

Комментарий

В заданное уравнение переменная входит только в виде $\operatorname{tg} 2x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\operatorname{tg} 2x = t$. После выполнения обратной замены и решения полученных простейших тригонометрических уравнений следует в ответ записать все полученные корни.

Решение

▶ Пусть $\operatorname{tg} 2x = t$. Тогда получаем $t^3 - t = 0$. Отсюда $t(t^2 - 1) = 0$, то есть $t = 0$ или $t^2 - 1 = 0$. Из последнего уравнения имеем $t^2 = 1$, тогда $t = 1$ или $t = -1$. Выполняем обратную замену:

1. При $t = 0$ имеем $\operatorname{tg} 2x = 0$, тогда $2x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. При $t = 1$ имеем $\operatorname{tg} 2x = 1$, тогда $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Следовательно,
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbf{Z}.$$
3. При $t = -1$ имеем $\operatorname{tg} 2x = -1$, тогда $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Отсюда $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

При поиске плана решения более сложных тригонометрических уравнений можно воспользоваться таким ориентиром.

1. *Пробуем привести все тригонометрические функции* ***к одному аргументу.***
2. *Если удалось привести к одному аргументу, то пробуем все тригонометрические выражения привести* ***к одной функции.***
3. *Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции — нет, тогда пробуем привести уравнение* ***к однородному.***
4. *В других случаях переносим* ***все члены в одну сторону*** *и пробуем* ***получить произведение*** *или используем* ***специальные приемы решения.***

20.2. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИВЕДЕНИЕМ К ОДНОЙ ФУНКЦИИ (С ОДИНАКОВЫМ АРГУМЕНТОМ)

Задача 1 Решите уравнение $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Решение

▶ Используя формулу косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получаем:
$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0,$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0,$$
$$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0.$$
Замена $\sin x = t$ дает уравнение
$$-2t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Комментарий

Все тригонометрические функции приводим к одному аргументу x, используя формулу
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$
Потом все тригонометрические выражения приводим к одной функции $\sin x$ (учитываем, что
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x).$$

Тогда $2t^2 + 5t + 2 = 0$,

$$t_1 = -2,\ t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Выполняем обратную замену.

1. При $t = -2$ имеем $\sin x = -2$ — корней нет, поскольку $|-2| > 1$.
2. При $t = -\frac{1}{2}$ имеем $\sin x = -\frac{1}{2}$. Тогда $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$,

$$x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

В полученное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\sin x$, поэтому удобно выполнить замену $\sin x = t$.

Замечание. При желании ответ можно записать в виде

$$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Решение

▶ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Замена $\operatorname{tg} x = t$ дает уравнение $t + \frac{2}{t} = 3$.

При $t \neq 0$ получаем равносильное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Выполняем обратную замену:

1. При $t = 1$ имеем $\operatorname{tg} x = 1$, тогда
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$
2. При $t = 2$ имеем $\operatorname{tg} x = 2$, тогда
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

Все аргументы уже одинаковые (x), поэтому приводим все тригонометрические выражения к одной функции $\operatorname{tg} x$ (учитываем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

В полученное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\operatorname{tg} x$, поэтому удобно выполнить замену $\operatorname{tg} x = t$.

20.3. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К ОДНОРОДНОМУ

Рассмотрим уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$. (1)

Для поиска плана решения этого уравнения (но не для его решения) выполним замены: $\sin x = u$, $\cos x = v$. Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0. \quad (2)$$

Все одночлены, стоящие в левой части этого уравнения, имеют степень 2 (напомним, что степень одночлена uv также равна 2). В этом случае уравнение (2) (и соответственно уравнение (1)) называется однородным, и для распознавания таких уравнений и их решения можно применять такой ориентир.

> ***Если все члены уравнения,*** *в левой и правой частях которого стоят многочлены от двух переменных (или от двух функций одной переменной),* ***имеют одинаковую суммарную степень*, то уравнение называется однородным.*** *Решается однородное уравнение делением на наибольшую степень одной из переменных.*

Замечание. Придерживаясь этого ориентира, приходится делить обе части уравнения на выражение с переменной. При этом можно потерять корни (если корнями являются те числа, при которых делитель равен нулю). Чтобы избежать этого, необходимо отдельно рассмотреть случай, когда выражение, на которое мы собираемся делить обе части уравнения, равно нулю, и только после этого выполнять деление на выражение, не равное нулю.

Задача 1 Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение

▶ При $\cos x = 0$ уравнение не имеет корней, поэтому разделим обе его части на $\cos^2 x \neq 0$.

Получаем:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

то есть $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0$.

Тогда $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Замена: $\operatorname{tg} x = t$.

Комментарий

Данное уравнение однородное, поскольку все его члены имеют одинаковую суммарную степень 2. Его можно решить делением обеих частей на $\sin^2 x$ или на $\cos^2 x$.

Если мы будем делить на $\cos^2 x$, то, чтобы не потерять корни, случай $\cos x = 0$ рассмотрим отдельно.

Подставляя $\cos x = 0$ в данное уравнение, получаем $\sin x = 0$. Но одновременно $\sin x$ и $\cos x$ не могут равняться нулю (поскольку

---

* Конечно, если уравнение имеет вид $f = 0$, речь идет только о степени членов многочлена f, поскольку нуль-многочлен (то есть 0) степени не имеет.

Получаем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$,

$$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

Выполняем обратную замену:

1) При $t = -1$ имеем $\operatorname{tg} x = -1$, тогда

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

2) При $t = 2$ имеем $\operatorname{tg} x = 2$, тогда

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$

$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$ ◁

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Таким образом, те значения переменной x, для которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения. А при $\cos x \neq 0$ можно разделить обе части данного уравнения на $\cos^2 x \neq 0$ и получить уравнение, равносильное заданному (при этом учесть, что

$$\left.\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x\right).$$

В полученное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\operatorname{tg} x$, поэтому удобно выполнить замену $\operatorname{tg} x = t$.

Задача 2 Решите уравнение $\sin 3x = 5 \cos 3x$.

Решение

▶ При $\cos 3x = 0$ уравнение не имеет корней, поэтому разделим обе его части на $\cos 3x \neq 0$.

Получаем $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 5$,

то есть $\operatorname{tg} 3x = 5$. Тогда

$$3x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m,$$

$$x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \mathbf{Z}.$ ◁

Комментарий

Данное уравнение однородное, поскольку все его члены имеют одинаковую степень 1. Его можно решить делением обеих частей на $\sin 3x$ или на $\cos 3x$.

Если мы будем делить на $\cos 3x$, то, чтобы не потерять корни, случай $\cos 3x = 0$ рассмотрим отдельно.

Подставляя $\cos 3x = 0$ в данное уравнение, получаем $\sin 3x = 0$. Но одновременно $\sin 3x$ и $\cos 3x$ не могут равняться нулю. Таким образом, при $\cos 3x = 0$ уравнение не имеет корней. А при $\cos 3x \neq 0$ можно разделить обе части данного уравнения на $\cos 3x \neq 0$ и получить уравнение, равносильное заданному (при этом учесть, что

$$\left.\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x\right).$$

Задача 3 Решите уравнение $6\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos^2 x=2$.

Решение

▶ Используя формулу синуса двойного аргумента, имеем

$$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2. \quad (1)$$

Запишем это уравнение так:

$$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2\cdot 1$$

и учтем, что $1=\sin^2 x+\cos^2 x$.

Тогда $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=$

$$=2(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Отсюда

$$4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0. \quad (2)$$

При $\cos x=0$ уравнение не имеет корней, поэтому разделим обе его части на $\cos^2 x\neq 0$. Получаем

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos x}-3=0,$$

$$4\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3=0. \quad (3)$$

Замена: $\operatorname{tg} x=t$. Получаем уравнение $4t^2+t-3=0$,

$$t_1=-1,\ t_2=\frac{3}{4}.$$

Выполняем обратную замену:

1. При $t=-1$ имеем $\operatorname{tg} x=-1$, тогда

$$x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi n,$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

2. При $t=\frac{3}{4}$ имеем $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, тогда

$$x=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}$. ◁

Комментарий

Сначала приведем все тригонометрические функции к одному аргументу x, используя формулу

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Теперь в левой части уравнения (1) *стоит однородное выражение второй степени, а в правой части — число* 2. *Если домножить* 2 *на* 1, *а единицу расписать по основному тригонометрическому тождеству* $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, *то в левой и правой частях полученного уравнения все выражения будут второй степени, то есть получим однородное уравнение* (2), которое можно решить делением обеих частей или на $\sin^2 x$, или на $\cos^2 x$.

Если мы будем делить на $\cos^2 x$, то, чтобы не потерять корни, случай $\cos^2 x=0$ рассмотрим отдельно.

Подставляя $\cos x=0$ в уравнение (2), получаем $\sin x=0$. Но одновременно $\sin x$ и $\cos x$ не могут равняться нулю (поскольку $\sin^2 x+\cos^2 x=1$). Таким образом, при $\cos x=0$ уравнение (2) не имеет корней.

А при $\cos x\neq 0$ можно разделить обе части этого уравнения на $\cos^2 x\neq 0$ (и учесть при этом, что $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$).

В полученное уравнение (3) переменная входит в одном и том же виде $\operatorname{tg} x$, поэтому удобно выполнить замену $\operatorname{tg} x=t$.

20.4. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $f(x) = 0$ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Задача 1 Решите уравнение $\sin 7x = \sin 5x$.

Решение

▶ $\sin 7x - \sin 5x = 0$, тогда

$$2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2}=0,$$

$$2\sin x\cos 6x = 0.$$

Получаем:

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos 6x = 0.$$

Решая последние простейшие тригонометрические уравнения, имеем:

$x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $6x=\frac{\pi}{2}+\pi m$,

то есть $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: πn, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

Достаточно трудно все тригонометрические функции в этом уравнении привести к одному аргументу.

В таком случае приходится пользоваться четвертым пунктом ориентира, приведенного на с. 249: *переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем получить произведение, равное нулю.*

Для этого воспользуемся формулой преобразования разности синусов в произведение:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные множители имеют смысл. В данном случае все данные и полученные выражения имеют смысл на всем множестве действительных чисел. В конце учитываем, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x = 0$ или $\cos 6x = 0$, и поэтому в ответе должны быть записаны все корни каждого из этих уравнений.

Задача 2 Решите уравнение $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$.

Решение

▶ $2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}-\sin 4x=0,$

$$2\sin 2x\cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x = 0,$$

$$2\sin 2x(\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \text{ или } \cos x - \cos 2x = 0.$$

Комментарий

Сразу воспользуемся четвертым пунктом ориентира, приведенного на с. 249: *переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем получить произведение, которое равно нулю.*

Для этого применим формулу преобразования суммы синусов, Из первого из этих уравнений:

$$2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Второе уравнение преобразуем так:

$$-2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2} = 0,$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Отсюда $\sin\frac{3x}{2} = 0$ или $\sin\frac{x}{2} = 0$.

Из этих уравнений получаем:

$$\frac{3x}{2} = \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},\text{ или } \frac{x}{2} = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$x = \frac{2\pi m}{3}\text{ или } x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};\quad \frac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z};$ $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

стоящей в левой части уравнения, в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(и учтем, что $\cos(-x) = \cos x$).

Для того чтобы вынести какое-то выражение за скобки и получить произведение, достаточно записать $\sin 4x$ как синус двойного аргумента (тогда за скобки выносится $\sin 2x$).

Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

Во втором из полученных уравнений преобразуем разность косинусов в произведение. В конце учитываем, что все данные и полученные выражения существуют на всем множестве действительных чисел. Таким образом, данное уравнение на этом множестве равносильно совокупности уравнений:

$$\sin 2x = 0,\text{ или } \sin\frac{3x}{2} = 0,$$

$$\text{или } \sin\frac{x}{2} = 0,$$

и поэтому в ответ необходимо записать все корни каждого из этих уравнений.

Замечание. Запись ответа можно сократить. Так, если изобразить все найденные решения на единичной окружности, то можно увидеть, что решение $x = 2\pi k$ дает те же точки, что и формула $x = \frac{\pi n}{2}$ при n, кратном 4 ($n = 4k$), или формула $x = \frac{2}{3}\pi m$ при m, кратном 3 ($m = 3k$). Таким образом, формула $x = 2\pi k$ не дает новых корней в сравнении с формулами $x = \frac{\pi n}{2}$ или $x = \frac{2\pi m}{3}$, и поэтому ответ может быть записан в виде только двух последних формул. Но такое сокращение ответа не является обязательным.

20.5. ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Если при решении тригонометрических уравнений необходимо выполнять отбор корней, то чаще всего это делается так:

находят (желательно наименьший) общий период всех тригонометрических функций, входящих в запись уравнения (конечно, если этот общий период существует); **потом на этом периоде отбирают корни (отбрасывают посторонние), а те, которые остаются, периодически продолжают.**

Пример Решите уравнение

$$\sin 4x \operatorname{tg} x = 0. \qquad (1)$$

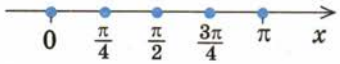
I способ решения

Решение

$\sin 4x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 0$.

Тогда $4x = \pi n$ (то есть $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$) или $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Функция $y = \sin 4x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а функция $y = \operatorname{tg} x$ — период $T_2 = \pi$. Тогда $T = \pi$ является общим периодом для обеих функций. Обозначим все полученные корни на одном периоде, например на промежутке $[0; \pi]$:



При $x = \frac{\pi}{2}$ значение $\operatorname{tg} x$ не существует, таким образом, $x = \frac{\pi}{2}$ не является корнем данного уравнения.

При значениях 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π получаем равенство $0 = 0$. Следовательно, эти значения являются корнями уравнения (1).

Тогда решениями данного уравнения будут:

$$x = \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

Комментарий

Если число x является корнем уравнения (1), то при этом значении x равенство (1) обращается в верное числовое равенство. Произведение двух чисел может равняться нулю только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Таким образом, каждый корень уравнения (1) будет корнем совокупности уравнений $\sin 4x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 0$.

Заменив уравнение (1) на эту совокупность, мы не потеряем корни данного уравнения, но можем получить посторонние для него корни. Например, такие, при которых первый множитель равен нулю, а второй не существует.

Чтобы отбросить такие значения, выполним проверку полученных корней подстановкой в исходное уравнение на одном периоде — промежутке длиной π.

На этом периоде отбираем корни (отбрасываем посторонние), а те, которые остаются, периодически повторяем (то есть добавляем к полученным корням πk, $k \in \boldsymbol{Z}$).

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Замечание. При решении уравнения (1) мы не следили за равносильностью выполненых преобразований, но выполняли преобразования, не приводящие к потере корней. Тогда говорят (см. § 3), что мы пользовались уравнениями-следствиями (*если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого*). В этом случае мы могли получить посторонние для данного уравнения корни (то есть те корни последнего уравнения, которые не являются корнями данного). Чтобы этого не случилось, можно пользоваться следующим **ориентиром**.

Если при решении уравнения мы пользовались уравнениями-следствиями, то проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является обязательной составной частью решения.

Если для решения этого же уравнения (1) мы будем использовать равносильные преобразования, то отбор корней будет организован немного иначе. А именно, нам придется учесть *ОДЗ уравнения*, то есть общую область определения для всех функций, входящих в запись уравнения.

II способ решения уравнения $\sin 4x \operatorname{tg} x = 0$.

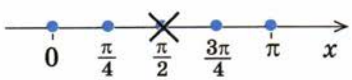
Решение

▶ ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

$\sin 4x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 0.$

Тогда $4x = \pi n$, то есть $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Функция $y = \sin 4x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а функция $y = \operatorname{tg} x$ — период $T_2 = \pi$. Тогда $T = \pi$ является общим периодом для обеих функций. Обозначим все полученные корни на одном периоде, например на промежутке $[0;\ \pi]$, и на этом же промежутке обозначим ограничения ОДЗ:



Комментарий

Все равносильные преобразования уравнений выполняются на их области допустимых значений (ОДЗ), поэтому необходимо учесть ОДЗ.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а второй множитель имеет смысл. На ОДЗ оба множителя имеют смысл, поэтому на ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin 4x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 0$.

Те корни совокупности, которые входят в ОДЗ, достаточно отобрать на одном периоде — промежутке длиной π, а потом полученные решения периодически повторить.

Ответ: πk; $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Значение $x=\frac{\pi}{2}$ не принадлежит ОДЗ, поэтому оно не является корнем данного уравнения.

Значения 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π входят в ОДЗ, следовательно, эти значения являются корнями данного уравнения.

Вопросы для контроля

1. Какие способы используют при решении тригонометрических уравнений? Приведите примеры.
2. Какую замену переменных можно выполнить при решении уравнения $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$? Какое уравнение получим после замены?
3. а) Объясните, почему уравнение $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$ является однородным. б*) Как можно решить это однородное уравнение?
4. Как можно выполнить отбор корней тригонометрического уравнения? Проиллюстрируйте отбор корней тригонометрического уравнения на примере.

Упражнения

Решите уравнение **(1–20)**.

1. 1°) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; 2) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;

3°) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$; 4) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

2. 1°) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;

3°) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$; 4) $2\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$.

3. 1°) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 2) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

3°) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$; 4) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

4. 1°) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{ctg}^2 2x - 6\operatorname{ctg} 2x + 5 = 0$;

3°) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; 4) $7\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 5$.

5. 1) $3\cos 2x = 7\sin x$; 2) $2\cos 2x = 7\cos x$.

6. 1) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

2) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

3) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

4) $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

7. 1) $\cos\frac{x}{2}=1+\cos x$; 2) $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=1$;

3) $5\cos x+12\sin x=13$; 4) $3\cos x-2\sin 2x=0$.

8. 1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $\cos 2x=2\frac{1}{3}\sin x$; 4) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$.

9. 1) $\cos x+\sin x=0$; 2) $\cos^2 x-3\sin x\cos x=-1$;

3) $3\cos^2 x=4\sin x\cos x-\sin^2 x$; 4) $4\cos^2 x-7\sin 2x=2$.

10. 1) $\frac{5}{3\cos x+4}=2$; 2) $\frac{5}{3\sin x+4}=2$; 3) $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x-1}=1$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{2}\cos x-1}=1$.

11. 1) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x+8}=1$; 2) $\frac{3}{5\operatorname{ctg} x+8}=1$; 3) $\frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x+5}=\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+5}=\frac{1}{4}$.

12. 1) $\frac{2\sin x+7}{1{,}5\sin x+3}=2$; 2) $\frac{2\cos x+7}{1{,}5\cos x+3}=2$;

3) $\frac{6}{\operatorname{tg} x+2}=3-\operatorname{tg} x$; 4) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$.

13. 1) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; 2) $\frac{15}{\cos x+1}=11-2\cos x$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}=2\operatorname{ctg} x-1$; 4) $\frac{10}{\operatorname{tg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$.

14. 1) $\sin x+\sin 3x=0$; 2) $\sin 5x-\sin x=0$;

3) $\cos 2x-\cos 6x=0$; 4) $\cos 4x+\cos 2x=0$.

15*. 1) $|\sin x|=|\cos x|$; 2) $|\sin 2x|=\left|\sqrt{3}\cos 2x\right|$.

16*. 1) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{6}-2x\right)=0$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{47\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

17*. 1) $\sin^2 x-5\cos x=\sin x\cos x-5\sin x$;

2) $\cos^2 x-7\sin x+\sin x\cos x=7\cos x$.

18. 1) $\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos^2 x=0$;

2) $\sin^2 3x+3\cos^2 3x-4\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$;

3) $\sin^2 x+2\sin(\pi-x)\cos x-3\cos^2(2\pi-x)=0$;

4) $\sin^2(2\pi-3x)+5\sin(\pi-3x)\cos 3x+4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0$.

19. 1) $3\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=2$;

2) $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)+7\sin^2\frac{x}{2}=3$;

3) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)+3\cos^2(\pi+x)=3;$

4) $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi+x)+2\sin^2(x-\pi)=2.$

20. 1) $2\sin^2(\pi+x)-5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2=0;$ 2) $2\cos^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4=0;$

3) $2\cos^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1=0;$ 4) $5-5\sin 3(\pi-x)=\cos^2(\pi-3x).$

§ 21. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы тригонометрических уравнений решаются с помощью тех же методов, что и алгебраические системы (см. табл. 2 на с. 457), в частности это исключение неизвестных и замена переменных. Исключить неизвестные можно с помощью одного из двух приемов: из одного уравнения выразить какое-то неизвестное (или функцию от него) и подставить его в другие или преобразовать данные уравнения и потом составить из них комбинации, в которых число неизвестных уменьшается.

Задача 1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \cos x+\sin y=1. \end{cases}$

▶ Из первого уравнения находим $y=\frac{\pi}{2}-x$ и подставляем во второе. Получаем $\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$, то есть $\cos x+\cos x=1$, $2\cos x=1$, $\cos x=\frac{1}{2}$. Отсюда

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

1) Если $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{6}-2\pi n.$

2) Если $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{5\pi}{6}-2\pi n.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ◁

З а м е ч а н и е. Если бы для нахождения значения y мы не рассмотрели отдельно формулу (1) со знаком «+» и знаком «−», то вместе с верными решениями получили бы и посторонние решения заданной системы.

Действительно, в таком случае имеем $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Тогда, например, при $n = 0$ получаем $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3}, \\ y = \frac{\pi}{2} - \left(\pm\frac{\pi}{3}\right), \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3}, \\ y = \frac{\pi}{6} \text{ или } y = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

Таким образом, кроме решений, которые вошли в ответ, мы имеем еще две возможности:

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3}, \\ y = \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3}, \\ y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$ Но эти пары значений x и y не являются решениями заданной системы, поскольку они не удовлетворяют первому уравнению.

Поэтому следует запомнить:

Когда решение уравнения $\cos x = a$ приходится применять для дальнейших преобразований, то удобно записывать его в виде двух формул: отдельно со знаком «+» и отдельно со знаком «−».

Задача 2 Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

▶ Почленно сложим и вычтем эти уравнения. Получим равносильную систему $\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x - y = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Представим последнюю систему в виде совокупности двух систем, записывая решения второго уравнения отдельно со знаком «+» и отдельно со знаком «−»:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Почленно складывая и вычитая уравнения этих систем, находим x и y:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Замечание. В запись ответа вошли два параметра n и k, которые независимо друг от друга «пробегают» множество целых чисел. Если попробовать при решении заданной системы воспользоваться только одним параметром, например n, то это приведет к потере решений. Таким образом, в каждом случае, *когда система тригонометрических уравнений приводится к си-*

стеме, состоящей из элементарных тригонометрических уравнений (то есть из уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$), *при решении каждого из этих уравнений необходимо использовать свой целочисленный параметр.*

Вопросы для контроля

1. Какие методы используются для решения систем тригонометрических уравнений?
2. Объясните, в каком случае при формальном решении системы уравнений $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}\end{cases}$ мы можем потерять часть решений, а в каком случае — получить посторонние решения. Решите эту систему.

Упражнения

Решите систему уравнений **(1–8)**.

1°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\pi;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ x+y=2\pi.\end{cases}$

2°. 1) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1,\\ x+y=\frac{\pi}{4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x-\cos y=\frac{1}{2},\\ x-y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

3°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=0{,}5,\\ \sin x\cdot\sin y=-0{,}5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=-0{,}5,\\ \cos x\cdot\cos y=-0{,}5.\end{cases}$

4. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

5. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=0{,}75,\\ \sin x\sin y=0{,}25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}75,\\ \sin y\cos x=0{,}25.\end{cases}$

6. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{2},\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\sin y-\cos x\cos y=-1,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

7*. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=\sin^2 y,\\ \sin x\sin y=\cos^2 y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=\sin^2 y,\\ \cos x\sin y=\cos^2 y.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=1,\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\cos x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=1,\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\sin x.\end{cases}$

§ 22. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Иногда приходится решать тригонометрические уравнения, в которые входят только сумма или разность синуса и косинуса одного и того же аргумента и их произведение. В таком случае целесообразно эту сумму (или разность) обозначить новой переменной.

Задача 1 Решите уравнение $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

Комментарий

Если в заданном уравнении привести все тригонометрические функции к одному аргументу x, то получим уравнение (1) (см. решение), в которое входят только сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента x и их произведение. Для решения этого уравнения введем новую переменную $\sin x + \cos x = y$. Чтобы получить произведение $\sin x \cos x$, достаточно возвести в квадрат обе части равенства замены и учесть, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Выполняя обратную замену, удобно также учесть, что

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Решение

Данное уравнение равносильно уравнению

$$3(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cos x. \qquad (1)$$

Если обозначить $\sin x + \cos x = y$, то $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = y^2$. Тогда $\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$. Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем

$$3y = 2y^2 - 2,\ 2y^2 - 3y - 2 = 0,\ y_1 = 2 \text{ или } y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\sin x + \cos x = 2$ или $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$.

Тогда $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ или $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$. Получаем $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ (корней нет, поскольку $\sqrt{2} > 1$) или $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Отсюда $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Замечание. При возведении обеих частей уравнения в квадрат можно получить посторонние корни (см. таблицу 7). Но *возведение обеих частей равенства замены в квадрат является равносильным преобразова-*

нием. Действительно, в этом случае левая и правая части равенства имеют одинаковые знаки, и тогда $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. Если обе части равенства $a = b$ положительны, то для положительных значений t функция $y = t^2$ возрастает и поэтому каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Таким образом, при $a > 0$, $b > 0$ из равенства $a = b$ следует равенство $a^2 = b^2$ и, наоборот, из равенства $a^2 = b^2$ следует равенство $a = b$, что и гарантирует равносильность выполненного преобразования для положительных a и b. Аналогично для $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$ используем то, что для не положительных значений t функция $y = t^2$ убывает и поэтому каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента.

Для решения некоторых тригонометрических уравнений могут применяться свойства функций (соответствующие общие подходы к решению были рассмотрены в § 3, пункт 3.2), в частности, оценка левой и правой частей уравнения.

Задача 2 Решите уравнение $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2} = 2$.

► Оценим область значений функции $f(x) = \cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$.

Поскольку $|\cos 6x| \leqslant 1$ и $\left|\sin\frac{5x}{2}\right| \leqslant 1$, то $|f(x)| \leqslant 2$, то есть $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Выясним, существуют ли такие значения x, при которых функция $f(x)$ может принимать наибольшее значение 2. Если $\cos 6x$ будет меньше 1, то для того чтобы сумма $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ равнялась 2, необходимо, чтобы значение $\sin\frac{5x}{2}$ было больше 1, что невозможно. Аналогично, если допустить, что $\sin\frac{5x}{2}$ меньше 1, то для того чтобы сумма $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ равнялась 2, необходимо, чтобы значение $\cos 6x$ было больше 1, что невозможно. Таким образом, равенство в данном уравнении возможно тогда и только тогда, когда $\cos 6x$ и $\sin\frac{5x}{2}$ равны 1. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 6x = 1, \\ \sin\frac{5x}{2} = 1. \end{cases} \text{ Отсюда } \begin{cases} 6x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \text{ Тогда } \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3}, \\ x = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \end{cases}$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \text{ Отсюда } k = \frac{3 + 12n}{5}.$$

Поскольку k и n — целые числа, то для получения всех решений последнего уравнения в целых числах (см. § 9) достаточно подставить в правую часть последнего равенства вместо n все остатки при делении на 5 и найти, для каких значений n по этой формуле k также будет целым числом. Только при $n = 1$ получаем целое $k = 3$. В случае, когда коэффициент 12 при переменной n в числителе дроби и знаменатель 5 — взаимно простые числа, повторение делимости нацело будет только через знаменатель, то есть через 5. Поэтому последнее уравнение имеет решения в целых числах только вида $n = 1 + 5m$, $m \in \mathbf{Z}$. Подставляя значение n в одно из решений системы, получаем $x = \pi + 4\pi m$. Эти значения и являются решениями последней системы, а следовательно, и решениями данного уравнения.

Ответ: $x = \pi + 4\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 3 Решите уравнение $\sqrt{2}\,|\sin x + \cos x| = 2 + \sin^6 8x$.

Комментарий

Преобразуем левую часть по формуле $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и оценим область значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Решая полученную систему двух уравнений с одним неизвестным, можно несколько упростить выкладки и решить только одно уравнение системы, а для другого проверить, удовлетворяют ли ему полученные решения.

Решение

▶ Данное уравнение равносильно уравнению

$$2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 + \sin^6 8x. \qquad (1)$$

Обозначим: $f(x) = 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $g(x) = 2 + \sin^6 8x$. Поскольку $0 \leqslant \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, то $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Но $0 \leqslant \sin^6 8x \leqslant 1$, поэтому $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.

Левая часть уравнения (1) меньше или равна 2, а правая часть больше или равна 2. Равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда левая и правая части уравнения равны 2, то есть данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2, \\ 2 + \sin^6 8x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, откуда $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения второму уравнению системы. Если $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $8x = 2\pi + 8\pi n$, тогда $\sin 8x = 0$ и поэтому $2 + \sin^6 8x = 2$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Иногда для решения тригонометрических уравнений приходится применять тригонометрические формулы, которые приводят к сужению ОДЗ данного уравнения. Такие преобразования могут приводить к потере корней уравнения. Чтобы этого не случилось, можно пользоваться таким ориентиром:

если для решения уравнений (или неравенств) приходится выполнять преобразования, сужающие ОДЗ исходного уравнения (или неравенства), то те значения, на которые сужается ОДЗ, необходимо рассматривать отдельно.

В таблице 42 указаны тригонометрические *формулы, которые могут приводить к сужению ОДЗ,* и соответствующие значения переменной, которые приходится проверять при использовании этих формул.

Таблица 42

Формула (используется слева направо)	Значения переменной, которые необходимо проверить, если они входят в ОДЗ исходного уравнения
$\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \alpha} \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right)$ $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \alpha \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} x} (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$ $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$	$x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$	$x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Чтобы убедиться, что приведенные формулы приводят к сужению ОДЗ, достаточно сравнить области допустимых значений их левых и правых частей.

Например, рассмотрим формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

● ОДЗ левой части: $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Для нахождения ОДЗ правой части формулы учитываем, что знаменатель дроби не равен нулю: $\operatorname{tg} x \neq 0$, таким образом, $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и также условие существования тангенса: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. То есть ОДЗ правой части задается системой ограничений $\begin{cases} x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Сравнивая ОДЗ левой и правой частей рассмотренной формулы, видим, что ОДЗ правой части содержит дополнительное ограничение $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. Таким образом, при переходе по этой формуле от ее левой части к правой происходит сужение ОДЗ (отбрасываются именно те значения, которые указаны в таблице: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$). Чтобы не потерять корни данного уравнения, при использовании формулы $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, значение $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, необходимо рассмотреть отдельно (конечно, только в том случае, когда оно входит в ОДЗ данного уравнения). ○

Приведем пример использования указанного ориентира.

Задача 4 Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \tag{1}$$

Комментарий

Если воспользоваться первыми двумя формулами таблицы 42, то мы приведем все тригонометрические выражения в этом уравнении и к одному аргументу, и к одной функции — $\operatorname{tg} x$. Но при использовании указанных формул происходит сужение ОДЗ на значение $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и вследствие этого можно потерять корни уравнения, если числа такого вида входят в ОДЗ исходного уравнения и являются его корнями. Чтобы этого не случилось, разобьем решение на две части.

1. Подставляем те значения переменной, на которые сужается ОДЗ, в уравнение (1). При вычислениях учитываем периодичность функций и формулы приведения.
2. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (на ОДЗ уравнения (1)) использование формул $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

и $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}$ приводит к уравнению (2) (см. решение), которое равносильно заданному (на той части ОДЗ, где $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$), потому что эти формулы сохраняют верное равенство как при переходе от равенства (1) к равенству (2), так и при обратном переходе от равенства (2) к равенству (1). Замена переменной (и обратная замена) также приводит к уравнению, равносильному заданному (на указанной части ОДЗ исходного уравнения).

Заметим, что ОДЗ уравнения (2) отличается от ОДЗ уравнения (1) только тем, что в нее не входят значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, которые входят в ОДЗ уравнения (1). Поскольку эти «плохие» значения мы учли в процессе решения, то ОДЗ уравнения (1) можно в явном виде не фиксировать (как в приведенном решении). В ответе записываем все корни, которые были получены в первой и второй частях решения.

Решение

1. ▶ Если $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то из данного уравнения получаем:

$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=1$, то есть $0^2-(-1)=1$ — верное равенство.

Таким образом, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — корни уравнения (1).

2. Если $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, получаем:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}=1. \qquad (2)$$

Замена $\operatorname{tg} x=1$ приводит к уравнению $\frac{1}{t^2}-\frac{t+1}{1-t}=1$, которое при $t \neq 0$ и $t \neq 1$ равносильно уравнению $2t^2+t-1=0$. Тогда $t_1=-1$, $t_2=\frac{1}{2}$.

Обратная замена дает: $\operatorname{tg} x=-1$ или $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$, то есть

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Некоторые тригонометрические уравнения удается решить, используя такой ориентир, который условно можно назвать *«ищи квадратный трехчлен»*, то есть:

попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно некоторой переменной (или относительно некоторой функции).

Задача 5 Решите уравнение $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0.$

Решение

▶ Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$$x^2-\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x+1=0.$$

Это уравнение может иметь корни тогда и только тогда, когда его дискриминант будет неотрицательный:

$$D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4\geqslant 0.$$

Тогда $\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 1$. Но $\sin^2\frac{\pi x}{2}$ не может быть больше чем 1. Таким образом, $\sin^2\frac{\pi x}{2}=1$, то есть $\sin^2\frac{\pi x}{2}=1$ или $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$. Подставляя эти значения в данное уравнение, получаем, что оно равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения первой системы имеем $x=1$, что удовлетворяет и первому уравнению системы. Таким образом, $x=1$ — решение первой системы, а значит, и решение данного уравнения. Аналогично получаем $x=-1$ — решение второй системы, а значит, и решение данного уравнения.

Ответ: 1; −1. ◁

Комментарий

Есть несколько подходов к решению данного уравнения.

1) Рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно переменной x и учесть, что оно может иметь корни тогда и только тогда, когда его дискриминант будет неотрицательным (см. решение).

2) Если в левой части уравнения выделить полный квадрат $\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$, то получим уравнение

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

Учтем, что всегда $\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 0$ и $1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 0$. А *сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.*

Также можно последнее уравнение записать в таком виде:

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\pi x}{2}-1$$

и оценить левую и правую части этого уравнения.

При решении систем тригонометрических уравнений не всегда удается выполнять только равносильные преобразования уравнений системы, иногда приходится пользоваться уравнениями-следствиями. В таких случаях могут возникать посторонние решения, поэтому полученные решения необходимо проверять. Причем проверять можно как значения переменных, полученные в конце решения, так и значения тригонометрических функций, полученные в ходе решения. Если все тригонометрические функции, которые входят в запись системы, по каждой из переменных имеют общий период, то достаточно выполнить проверку для всех значений переменных из одного периода (для каждой переменной).

Задача 6 Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x = \sin y,\\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y.\end{cases}$

Комментарий

Если из первого уравнения системы выразить $\sin x$, а из второго — $\cos x$, то можно возвести обе части каждого уравнения в квадрат и после почленного сложения полученных уравнений использовать тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. В результате получим уравнение с одной переменной y, которое легко приводится к одной тригонометрической функции.

Но при возведении обеих частей уравнения в квадрат получаем уравнение-следствие. Таким образом, среди полученных решений могут быть и посторонние решения для данной системы, которые придется отсеивать проверкой.

Для проверки учитываем, что все функции относительно переменной x, которые входят в запись системы (то есть $\sin x$ и $\cos x$), имеют общий период 2π. Аналогично все функции относительно переменной y ($\sin y$ и $\cos y$) тоже имеют общий период 2π. Следовательно, проверку решений достаточно выполнить для всех пар чисел $(x;\ y)$, где $x \in [0;\ 2\pi]$, $y \in [0;\ 2\pi]$ (можно взять и другие промежутки длиной 2π). Полезно также учесть, что все решения, полученные вследствие подстановки в одно из уравнений системы, автоматически удовлетворяют этому уравнению, а значит, проверку этих решений достаточно выполнить только для второго уравнения системы.

Для каждой переменной все полученные решения необходимо повторить через период.

Решение

▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases}\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin y, & (1)\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos y. & (2)\end{cases}$

Возведем обе части каждого уравнения системы в квадрат и почленно сложим полученные уравнения. Получаем уравнение-следствие

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{3}{2}\cos^2 y.$$

Тогда $2 = \sin^2 y + 3\cos^2 y$, $2 = 1 - \cos^2 y + 3\cos^2 y$,

то есть $\cos^2 y = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя полученные значения в уравнение (2), получаем

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ (3) или $\begin{cases} y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ (4)

Относительно каждой из переменных x и y все функции, которые входят в запись данной системы, имеют период 2π, поэтому проверку достаточно выполнить для всех пар чисел $(x; y)$, где $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; 2\pi]$.

Для системы (3) это пары чисел: $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$,

а для системы (4) это пары чисел: $\left(\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Решениями заданной системы являются только пары чисел:

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right),\ \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right),\ \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right).$$

Ответ получим, повторяя приведенные решения через период (для каждой переменной).

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$,
$\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ◁

При решении *уравнений с обратными тригонометрическими функциями* полезно помнить, что при $|a| \leqslant 1$

$$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},}$$

и для любых значений a

$$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.}$$

Также при решении уравнений с обратными тригонометрическими функциями часто бывает удобно от обеих частей уравнения взять какую-нибудь тригонометрическую функцию и воспользоваться определением соответствующих обратных тригонометрических функций.

Задача 7 Решите уравнение $2 \arcsin x = \arcsin \dfrac{10}{13}x$.

Комментарий

Если взять от обеих частей данного уравнения функцию синус, то получим уравнение-следствие: если числа равны, то и синусы будут равны, но если синусы двух чисел равны, то это еще не значит, что числа обязательно будут равны. То есть верное равенство будет сохраняться при прямых преобразованиях, но не обязательно будет сохраняться при обратных преобразованиях. Таким образом, в конце решения необходимо выполнить проверку полученных корней.

Если обозначить $\arcsin x = \alpha$, то по определению арксинуса $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = x$. Для нахождения $\cos\alpha$ учитываем, что при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ значение $\cos\alpha \geqslant 0$, таким образом, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Проверяя полученные решения, в тех случаях, когда найденные числа не являются корнями данного уравнения, иногда удобно сравнить полученные решения с табличными значениями. Например, $\frac{12}{13} \approx 0{,}9$ больше, чем $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$ (отметим, что для строгого доказательства того, что $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, достаточно сравнить числа $12 \cdot 2$ и $13\sqrt{2}$, а для этого достаточно сравнить числа $24^2 = 576$ и $13^2 \cdot 2 = 338$ и воспользоваться возрастанием функции $y = \sqrt{t}$ на всей области определения). Учитывая возрастание функции $y = \arcsin t$, получаем, что

$$\arcsin\frac{12}{13} > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Решение

▶ Если обозначить $\arcsin x = \alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и $\arcsin\frac{10}{13}x = \beta$, где $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данное уравнение будет иметь вид

$$2\alpha = \beta. \qquad (1)$$

Возьмем от обеих частей уравнения (1) функцию синус и получим

$$\sin 2\alpha = \sin\beta,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta. \qquad (2)$$

По определению арксинуса $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = \frac{10}{13}x$. Учитывая, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получаем $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$.

Тогда уравнение (2) будет иметь вид $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x$.

Отсюда $x\left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{10}{13}\right) = 0$.

Таким образом, $x = 0$ или $\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}$, то есть $1 - x^2 = \frac{25}{169}$, $x^2 = \frac{144}{169}$, $x = \pm\frac{12}{13}$.

Проверка.

1) $x = 0$ — корень $\left(2\arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{10}{13}\cdot 0\right);\ 0 = 0\right)$;

2) $x = \pm\frac{12}{13}$ — посторонние корни.

Действительно, при $x = \frac{12}{13}$ имеем $2\arcsin\frac{12}{13} \neq \arcsin\frac{120}{169}$ (поскольку $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $2\arcsin\frac{12}{13} > 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\frac{120}{169} < \frac{\pi}{2}\Big)$.

Аналогично при $x = -\frac{12}{13}$ имеем $2\arcsin\frac{12}{13} < -\frac{\pi}{2}$, и равенство также не выполняется.

Ответ: 0. ◁

Замечание. Для решения уравнения $2\arcsin x = \arcsin\frac{10}{13}x$ можно было применить не только уравнения-следствия, но и равносильные преобразования уравнений. В этом случае необходимо учесть ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \left|\frac{10}{13}x\right| \leqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

а также то, что для всех корней уравнения его правая часть $\left(\arcsin\frac{10}{13}x\right)$ находится в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (по определению арксинуса). Таким образом, и левая часть уравнения должна находиться в этом же промежутке. Значит, для всех корней данного уравнения выполняется условие: $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то есть

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ является возрастающей, тогда при выполнении условия (4) (и конечно, на ОДЗ (3)), если от обеих частей данного уравнения взять синус, то получим равносильное ему уравнение (то есть данное уравнение равносильно уравнению (2) при условиях (3) и (4)). Выполняя рассуждения и преобразования, приведенные выше в решении задачи 7, получаем $x = 0$ или $x = \pm\frac{12}{13}$. Все найденные решения принадлежат ОДЗ (удовлетворяют условиям (3)), но условию (4) удовлетворяет только $x = 0$. Таким образом, корнем данного уравнения является только $x = 0$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно решить уравнение $\cos x = 1 + x^2$ с помощью оценки левой и правой частей уравнения. Решите это уравнение.
2. Объясните, как можно решать тригонометрические уравнения, в запись которых входят только сумма или разность синуса и косинуса одного и того же аргумента и их произведение. Приведите пример такого уравнения.
3. Приведите пример тригонометрической формулы, применение которой может привести к сужению ОДЗ данного уравнения и к потере его корней. Объясните, почему происходит сужение ОДЗ. Как необходимо применять такие формулы, чтобы не потерять корни данного уравнения? Объясните это на примере уравнения $2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Упражнения

Решите уравнение (**1–5**).

1 (**СПбГУ**). 1) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 2) $\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0{,}5 \sin 2x$.

2. 1) (**МИИТ**) $\sin 7x + \cos 12x = 2$; 2) (**МТУСИ**) $\sin 2x \sin 6x = 1$;

3) (**СПбГУАП**) $\cos \pi x + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$; 4) (**МГТУ**) $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;

5) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^2 5x + 5 \operatorname{ctg}^2 5x = 12$.

3. 1) $5 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} x - 5$; 2) $\sin 2x + \operatorname{tg} 2x = -\frac{8}{3} \operatorname{ctg} x$.

4 (**МТУСИ**). 1) $9x^2 - 6x \cos 6\pi x + 1 = 0$;

2) $4x^2 - 4x \sin(xy) + 1 = 0$

(найдите все пары чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению).

5. 1) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$; 2) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;

3) (**МТУСИ**) $2 \arcsin x + 3 \arccos x = \pi$; 4) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$;

5) (**МФТИ**) $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$; 6) $\arcsin x = 2 \operatorname{arctg} x$.

6 (**ННГУ**). Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3} \sin y, \\ \sqrt{3} \cos x = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 3) (**МАИ**) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2 \cos y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4 \sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4 \sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

§ 23. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

23.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Если в запись тригонометрического уравнения кроме переменной и числовых коэффициентов входят также буквенные коэффициенты — параметры, то при решении таких уравнений можно пользоваться следующим ориентиром.

Любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.

На этапе поиска плана решения уравнения или неравенства с параметрами или в ходе рассуждений, связанных с самим решением как таковым, часто удобно сопровождать соответствующие рассуждения схемами, по которым легко проследить, в какой момент мы не смогли однозначно выполнить необходимые преобразования, на сколько случаев пришлось разбить решение и чем отличается один случай от другого. Чтобы на таких схемах (или в записях громоздких решений) не потерять какой-нибудь ответ, целесообразно помещать окончательные ответы в прямоугольные рамки.

Задача 1 Решите уравнение $2\cos x - a = 0$.

Решение

$2\cos x = a$,

$\boxed{\cos x = \frac{a}{2}}$

$\left|\frac{a}{2}\right| > 1$ — $\boxed{\text{корней нет}}$

$\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$ — $\boxed{x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}$

Ответ:

1) если $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$ (то есть $|a| > 2$), то корней нет;

Комментарий

Наличие параметра a не мешает нам однозначно выразить $\cos x$ из данного уравнения.

Уравнение $\cos t = b$ при $|b| > 1$ не имеет корней, а при $|b| \leqslant 1$ корни уравнения можно записать по известной формуле (см. с. 237). Таким образом, для уравнения $\cos x = \frac{a}{2}$ нельзя однозначно записать решения, и поэтому, начиная с этого момента, решения необходимо развести на два случая.

Окончательный ответ можно записать с использованием знака модуля, а можно дать ограничения для

2) если $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$ (то есть $|a| \leqslant 2$), то

$$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \triangleleft$$

параметра a без модуля и записать ответ так:

1) если $a < -2$ или $a > 2$, то корней нет;

2) если $-2 \leqslant a \leqslant 2$, то

$$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\sin 2x = 4a\cos x$.

Решение

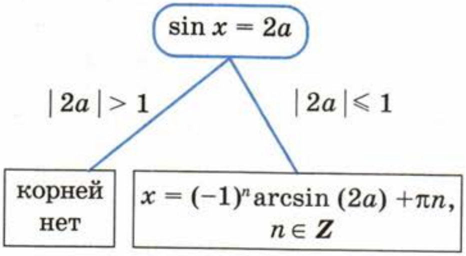
▶ $2\sin x\cos x - 4a\cos x = 0,$

$$2\cos x\,(\sin x - 2a) = 0. \qquad (1)$$

Тогда $\cos x = 0$ или $\sin x - 2a = 0$.

Отсюда $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},}$

или $\sin x = 2a$.



Ответ:
(см. в конце замечания). $\triangleleft$

Комментарий

Сначала приведем все тригонометрические функции к одному аргументу x, используя формулу

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Если перенести все члены уравнения в левую часть, то можно вынести за скобки общий множитель $2\cos x$.

Поскольку оба множителя имеют смысл при любых значениях переменной x, то уравнение (1) равносильно совокупности $\cos x = 0$ или $\sin x - 2a = 0$, то есть совокупности $\cos x = 0$ или $\sin x = 2a$.

Для уравнения $\cos x = 0$ мы можем записать корни при любых значениях a (в этом уравнении параметра a нет). Решение уравнения $\sin x = 2a$ зависит от значения правой части: если $|2a| > 1$, то корней нет, а если $|2a| \leqslant 1$, то корни есть. Таким образом, приходится разбивать решение этого уравнения на два случая.

Замечание. Для записи полученных ответов (они на схемах расположены в прямоугольных рамках) целесообразно уточнить, при каких значениях a выполняются ограничения $|2a| \leqslant 1$ и $|2a| > 1$. Для этого решаем соответствующие неравенства:

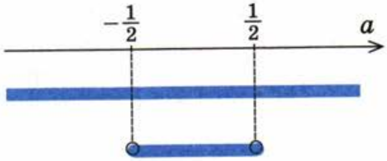
если $|2a| \leqslant 1$, тогда $-1 \leqslant 2a \leqslant 1$, то есть $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$;

если $|2a| > 1$, тогда $2a < -1$ или $2a > 1$, то есть $a < -\frac{1}{2}$ или $a > \frac{1}{2}$.

Чтобы облегчить запись ответа *в случаях сложных или громоздких решений, изобразим ось параметра* (а) *и отметим на ней все особые значения* *параметра, которые появились в процессе решения. Под осью параметра (левее от нее) выпишем все полученные решения (кроме «решений нет») и напротив каждого ответа отметим, при каких значениях параметра этот ответ можно использовать* (см. схему ниже). *После этого ответ записывается для каждого из особых значений параметра и для каждого из полученных промежутков оси параметра.*

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, \quad m \in \boldsymbol{Z}$

2. $x=(-1)^n \arcsin(2a)+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$



Из этой схемы хорошо видно, что при $a<-\frac{1}{2}$ или $a>\frac{1}{2}$ в ответ необходимо записать только одну формулу, а при $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ — две формулы.

Ответ: 1) если $a<-\frac{1}{2}$ или $a>\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$;

2) если $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$,
$x=(-1)^n \arcsin(2a)+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 3 Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = a \operatorname{ctg} x. \qquad (1)$$

Комментарий

Для решения уравнения (1) используем равносильные преобразования. Тогда мы обязательно должны учесть ОДЗ данного уравнения. Для этого записываем условия существования тангенса и котангенса и решаем соответствующие ограничения. Мы можем привести все тригонометрические функции к одному аргументу x, используя формулу тангенса двойного аргумента, а потом привести все выражения к одной функции $\operatorname{tg} x$, используя формулу $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg}\, x}$. Но использование указанных формул приводит к сужению ОДЗ (табл. 42) и, чтобы не потерять корни данного уравнения, те значения, на которые сужается ОДЗ $\left(x=\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, необходимо рассмотреть отдельно.

При $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ приводим все тригонометрические выражения к одной функции и выполняем равносильные преобразования полученного уравнения

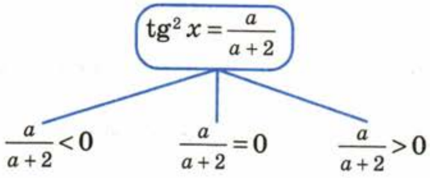
$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{a}{\operatorname{tg} x}. \qquad (2)$$

На ОДЗ уравнения (1) знаменатели дробей в уравнении (2) не равны нулю. Таким образом, после умножения обеих частей уравнения (2) на выражения, которые стоят в знаменателях, получаем уравнение $(2 + a)\,\mathrm{tg}^2 x = a$, равносильное уравнению (2) на ОДЗ уравнения (1).

1) Если $2 + a = 0$, то есть $a = -2$, то получаем уравнение $0 \cdot \mathrm{tg}^2 x = -2$, которое не имеет корней.

2) Если $2 + a \neq 0$, то есть $a \neq -2$, то получаем $\mathrm{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}$.

Чтобы решить это уравнение, необходимо знать знак выражения, которое стоит в правой части, поскольку $\mathrm{tg}^2 x$ не может быть отрицательным. Рассмотрим для правой части три случая: она меньше нуля, равна нулю, больше нуля. То есть дальнейшие рассуждения проведем по следующей схеме.



Конечно, для каждого случая необходимо уточнить, при каких значениях a выполняются соответствующие ограничения, и для каждого полученного решения необходимо проверить, входит оно в ОДЗ данного уравнения или нет.

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

I. При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, из уравнения (1) получаем $\mathrm{tg}\,(\pi + 2\pi k) = a\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, то есть $0 = a \cdot 0$ — равенство, верное при любых значениях a. Таким образом, при всех значениях параметра a данное уравнение имеет корни

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.}$$

II. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ получаем уравнение (2): $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = \frac{a}{\mathrm{tg}\,x}$, которое на ОДЗ равносильно уравнению $2\,\mathrm{tg}^2 x = a - a\,\mathrm{tg}^2 x$. Отсюда

$$(2 + a)\,\mathrm{tg}^2 x = a. \tag{3}$$

1) Если $a = -2$, то корней нет.

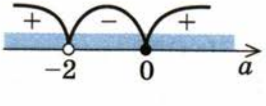
2) Если $a \neq -2$, то уравнение (3) равносильно уравнению

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}. \tag{4}$$

а) Если $\frac{a}{a+2} < 0$, то корней нет.

Решив неравенство $\frac{a}{a+2} < 0$ методом интервалов (см. рисунок), получаем $-2 < a < 0$.

Таким образом, при $-2 < a < 0$ $\boxed{\text{корней нет}}$.



б) Если $\frac{a}{a+2}=0$ (то есть $a = 0$), получаем уравнение $\operatorname{tg} x = 0$, которое имеет корни $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Но эти корни не входят в ОДЗ данного уравнения. Таким образом, и при $a = 0$ $\boxed{\text{корней нет}}$.

в) Если $\frac{a}{a+2}>0$ (то есть $a < -2$ или $a > 0$), то из уравнения (4) получаем

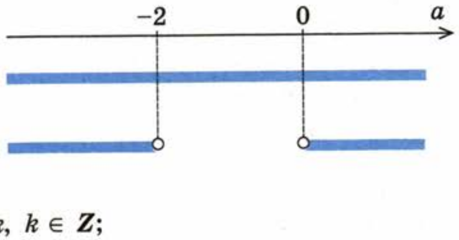
$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}$. Отсюда $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)+\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

Выясним, при каких значениях a полученные корни уравнения (4) не входят в ОДЗ. Для этого достаточно в уравнении (4) вместо аргумента x подставить «запрещенные» значения. Учитывая, что функции, которые входят в запись данного уравнения (1), имеют общий период $T = \pi$ ($\operatorname{tg} 2x$ имеет период $T_1 = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{ctg} x$ имеет период $T_2 = \pi$), достаточно подставить эти значения только на одном периоде, например на промежутке $[0; \pi]$. В этом промежутке в ОДЗ не входят такие значения: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; π. При $x = 0$ или $x = \pi$ из уравнения (4) получаем равенство $\frac{a}{a+2}=0$, то есть $a = 0$. Случай $a = 0$ мы уже исследовали (корней нет). При $x=\frac{\pi}{4}$ или $x=\frac{3\pi}{4}$ из уравнения (4) получаем $\frac{a}{a+2}=1$. Но ни при одном значении a это равенство не может выполняться. Таким образом, при всех значениях $a < -2$ или $a > 0$ полученные решения $\boxed{x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)+\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z},}$ входят в ОДЗ исходного уравнения.

Изобразим полученные ответы:

1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

2) $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)+\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$



Ответ: 1) если $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2) если $a < -2$ или $a > 0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)+\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$. ◁

23.2. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Кроме задач с параметрами, в которых требуется «решить уравнение или неравенство», часто предлагаются исследовательские задания с параметрами. Такие задания иногда удается решить с помощью непосредственных вычислений: решить данное уравнение или неравенство и после этого дать ответ на вопрос задачи. Но достаточно часто исследовательские задания не удается решить непосредственными вычислениями (или такие вычисления являются очень громоздкими), и поэтому приходится сначала обосновать какое-то свойство данного уравнения или неравенства, а потом, пользуясь этим свойством, уже давать ответ на вопрос задачи.

Рассмотрим некоторые из таких свойств. Например, принимая во внимание четность функций, которые входят в запись данного уравнения, используется такой ориентир.

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является четной или нечетной, то вместе с любым корнем α мы можем указать еще один корень этого уравнения $(-\alpha)$.

Задача 1 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

Решение

Функция $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ является четной ($D(f) = \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$). Если $x = \alpha$ — корень уравнения (1), то $x = -\alpha$ тоже является корнем этого уравнения. Поэтому единственный корень у данного уравнения может быть только тогда, когда $\alpha = -\alpha$, то есть $\alpha = 0$. Таким образом, единственным корнем данного уравнения может быть только $x = 0$. Если $x = 0$, то из уравнения (1) получаем $a^2 - a = 0$, то есть $a(a - 1) = 0$.

Отсюда $a = 0$ или $a = 1$.

При $a = 0$ уравнение (1) превращается в уравнение $x^2 = 0$, имеющее единственный корень $x = 0$. Таким образом, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ имеем уравнение $\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$, то есть

$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Поскольку $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то уравнение (2) равносильно системе

Комментарий

Отмечаем, что в левой части данного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир, приведенный выше. Действительно, если $x = \alpha$ — корень уравнения $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — верное числовое равенство.

Учитывая четность функции $f(x)$, имеем $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Таким образом, $x = -\alpha$ тоже корень уравнения $f(x) = 0$. Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни α и $-\alpha$ совпадают. Тогда $x = \alpha = -\alpha = 0$.

Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). (Это $a = 0$ и $a = 1$.)

Поскольку значение $a = 0$ и $a = 1$ мы получили из условия, что $x = 0$ — корень уравнения (1), то необходимо проверить, действительно ли при этих значениях a данное уравнение будет иметь единственный корень.

Для решения уравнения (2) оценим его левую и правую части:

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x = 0$, что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, эта система, а значит и уравнение (2) имеет единственное решение $x = 0$. Следовательно, $a = 1$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $a = 1$. ◁

$$f(x) = \cos^2 x,\ g(x) = 1 + x^2.$$

$$\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

При решении некоторых исследовательских задач с параметрами помогает использование следующего **ориентира**.

Если в условии задачи с параметрами говорится о том, что решениями данного уравнения или неравенства являются все значения переменной из некоторого множества, то иногда полезно подставить конкретные значения переменной из заданного множества и получить некоторые ограничения на параметр.

Задача 2 Найдите все пары чисел (a, b), для которых корнями уравнения

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \qquad (1)$$

будут все действительные числа.

Решение

▶ Если корнями данного уравнения являются все действительные числа, то корнем будет и число нуль.

При $x = 0$ получаем $b^2 = \cos b^2 - 1$, тогда

$$1 + b^2 = \cos b^2. \qquad (2)$$

Учитывая, что $1 + b^2 \geqslant 1$, а $\cos b^2 \leqslant 1$, получаем, что уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + b^2 = 1, \\ \cos b^2 = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b = 0$, что удовлетворяет и второму уравнению. Таким образом, эта система, а значит, и уравнение (2) имеют единственное решение $b = 0$.

Комментарий

Мы не в состоянии решить данное уравнение (но его и не требуют решить), поэтому воспользуемся тем, что по условию его корнями будут все действительные числа, и подставим вместо переменной x какие-то конкретные значения.

Для подстановки чаще всего выбирают такие значения переменной, которые обращают какие-то выражения в нуль. Так, при $x = 0$ выражение в первых скобках равно нулю. Решая полученное уравнение (2) относительно b, получаем единственное решение $b = 0$.

Если $b \neq 0$, то равенство (1) не может быть верным при $x = 0$, то есть $x = 0$ не будет корнем данного урав-

Следовательно, условие задачи может выполняться только при $b = 0$.

При $b = 0$ уравнение (1) обращается в уравнение

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1. \quad (3)$$

Но по условию корнями уравнения (1), а значит, и уравнения (3) должны быть все действительные числа, таким образом, корнем будет и число 2π. При $x = 2\pi$ получаем $0 = \cos(2\pi a) - 1$, тогда $\cos(2\pi a) = 1$, то есть $2\pi a = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $a = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (то есть a — целое число).

Если корнями уравнения (3) являются все действительные числа, то корнем будет и число $\frac{\pi}{2}$. При $x = \frac{\pi}{2}$ получаем $-a = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) - 1$.

Поскольку $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ при целых значениях a принимает только значения 1, 0, −1, то a может принимать только значения 0; 1; 2.

Если $a = 0$ (и $b = 0$), то уравнение (1) имеет вид $0(\cos x - 1) = \cos 0 - 1$, то есть $0(\cos x - 1) = 0$, и его корнями являются все действительные числа. Таким образом, пара чисел $(a, b) = (0; 0)$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a = 1$ (и $b = 0$), то уравнение (1) имеет вид $\cos x - 1 = \cos x - 1$ и его корнями являются все действительные числа. Таким образом, пара чисел $(a, b) = (1; 0)$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a = 2$ (и $b = 0$), то уравнение (1) имеет вид $2(\cos x - 1) = \cos 2x - 1$. Корнями этого уравнения не могут быть все действительные числа, поскольку корнем не является $x = \pi$ нения, а значит, при этих значениях b уравнение (1) не может иметь корнями все действительные числа.

Попытаемся еще раз превратить выражение в первых скобках в нуль, используя то, что число 2π является периодом функции $\cos x$, таким образом, через 2π значение в первых скобках будет повторяться (подставляем $x = 2\pi$).

Потом попробуем превратить в нуль $\cos x$ (подставляем $x = \frac{\pi}{2}$). При целом a значение $\frac{\pi}{2}a$ на единичной окружности изображается на концах горизонтального и вертикального диаметров, таким образом, значениями $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ могут быть только 1, −1 и 0.

Поскольку значения a и b мы получили при подстановке в данное уравнение только трех значений x, то необходимо проверить, будут ли все действительные числа при этих значениях a и b корнями данного уравнения, то есть проверить, будет ли уравнение (1) обращаться в верное равенство при всех действительных значениях x.

В случае, когда $a = 2$ и $b = 0$, получаем, что $\cos 2x = 2\cos x - 1$. Если бы это равенство было верным при всех значениях x, то это была бы еще одна формула косинуса двойного аргумента. Но такой формулы нет, таким образом, можно указать какое-то значение x, при котором это равенство не выполняется.

(при подстановке получаем неверное равенство $-4 = 0$). Таким образом, пара чисел $(a, b) = (2; 0)$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(0; 0)$, $(1; 0)$. ◁

При решении некоторых исследовательских задач с параметрами можно использовать необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$) относительно заданных чисел $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Основные из этих условий приведены в таблице 13 на с. 104.

Задача 3 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos 2x + a \sin x - 9 = 0 \qquad (1)$$

имеет корни.

Комментарий

Сначала выполним равносильные преобразования данного уравнения: приведем к одному аргументу и к одной функции, а потом выполним замену $\sin x = t$. Следует учитывать, что *после замены переменной иногда изменяется требование задачи*, а именно, для уравнения (2) оно будет таким: найти все значения параметра a, для которых это уравнение имеет хотя бы один корень на промежутке $[-1; 1]$ (тогда после обратной замены мы найдем корни уравнения $\sin x = t$, а значит, и корни уравнения (1)). Это возможно в одном из трех случаев: или оба корня уравнения (2) находятся в этом промежутке, или только один из корней уравнения (2) находится в промежутке $[-1; 1]$, а второй — справа или слева от этого промежутка. Изобразив соответствующие эскизы графиков функции $f(t) = 2t^2 - at + 8$ (см. рисунки 113), по ориентиру приведенному на с. 107 (или по таблице 13), записываем соответствующие условия расположения корней (3)–(5). При этом учитываем, что в случаях, когда $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, условие задачи тоже выполняется.

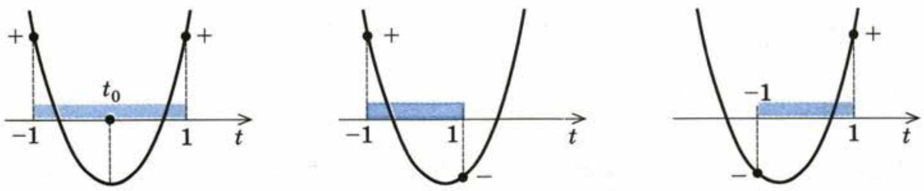


Рис. 113

В конце необходимо объединить все полученные результаты.

Заметим, что для получения ответа можно решить уравнение (2): $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 64}}{4}$, а потом решить совокупность неравенств: $-1 \leqslant t_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, но неравенства с корнями (иррациональные) будут рассмотрены в следующем разделе, и решать их достаточно сложно.

Решение

▶ Данное уравнение равносильно уравнению: $1 - 2\sin^2 x + a\sin x - 9 = 0$, $2\sin^2 x - a\sin x + 8 = 0$. Замена $\sin x = t$ дает уравнение

$$2t^2 - at + 8 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) будет иметь корни тогда и только тогда, когда уравнение (2) будет иметь хотя бы один корень на промежутке $[-1; 1]$.

1) Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(t) = 2t^2 - at + 8$ находились в этом промежутке, достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ D \geqslant 0, \\ -1 \leqslant t_0 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Для того чтобы один корень $f(t)$ находился в промежутке $[-1; 1]$, а второй — справа от 1 (или в точке 1), достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

3) Для того чтобы один корень $f(t)$ находился в промежутке $[-1; 1]$, а второй — слева от -1 (или в точке -1), достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решаем совокупность систем неравенств (3)–(5):

$$\begin{cases} 10 + a \geqslant 0, \\ 10 - a \geqslant 0, \\ a^2 - 64 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \frac{a}{4} \leqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 10 + a \geqslant 0, \\ 10 - a \leqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 10 + a \leqslant 0, \\ 10 - a \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \leqslant 10, \\ a \leqslant -8 \text{ или } a \geqslant 8, \\ -4 \leqslant a \leqslant 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \geqslant 10, \end{cases}$ или $\begin{cases} a \leqslant -10, \\ a \leqslant 10. \end{cases}$

Первая система не имеет решений, а из других получаем $a \geqslant 10$ или $a \leqslant -10$.

Ответ: $a \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$. ◁

Упражнения

Решите уравнение **(1–2)**.

1. 1) $a\sin x = 1$; 2) $a\sin 2x = \cos x$;
3) $a\operatorname{tg} x = \sin x$; 4) $\operatorname{ctg} x = a\cos x$.

2. 1) $\cos 2x + 2\sin x + a - 1 = 0$; 2) $\sin 3x - \sin 2x = a\sin x$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx} = 0$; 4) $a\sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \dfrac{1}{\cos x}$.

3. Найдите все значения параметра, при которых уравнение имеет корни:

1) (МИСиС) $2\sin x + 4\cos x = a$; 2) $3\sin x - 4\cos x = b$;

3) $a\cos 2x - \sin x = 0$; 4) $\cos 2x + a\cos x = 0$;

5) $\arcsin^2 x + (3a - 3)\arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 2x + (a - 3)\cos 2x = 0$ имеет на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ ровно четыре корня?

5 (ВГУ). Найдите все пары чисел (a, b), для которых корнями уравнения $a(\cos 3x - 1) + b^2 - 2b = \cos(3ax + (b - 1)^2) - 2$ будут все действительные числа.

6 (МИЭМ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(4a + 2)\sin x + 2a\cos x + a + 1 = 0$ имеет точно один корень, принадлежащий отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

7. При каких значениях параметра a данные уравнения равносильны?

1) $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ и $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$;

2) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ и $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$;

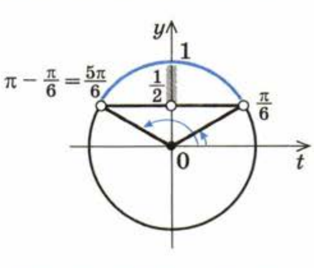
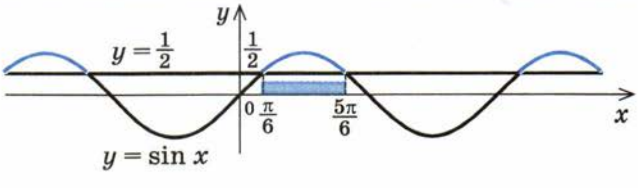
3) $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ и $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$.

8. Решите систему:

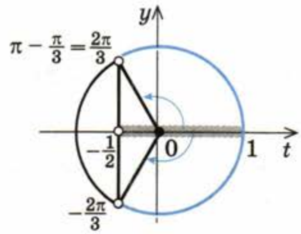
1) $\begin{cases}\cos x\cos y = a^2,\\ \sin x\sin y = 1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y = \sqrt{a},\\ \sin y\cos x = 1.\end{cases}$

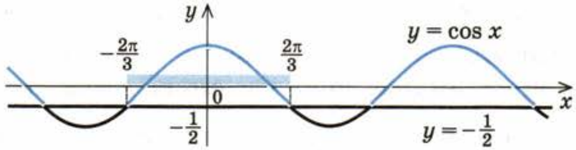
§ 24. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 43

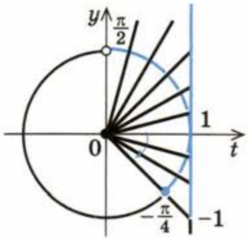
1. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств	
с помощью единичной окружности	с помощью графиков
 	 $\sin x > \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

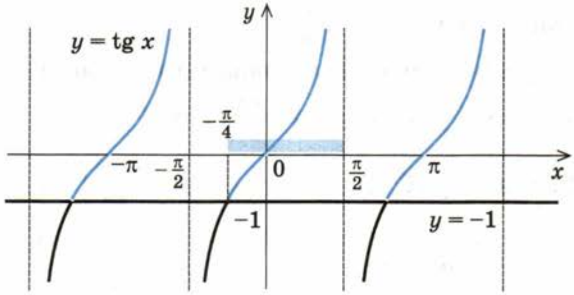
Продолж. табл. 43



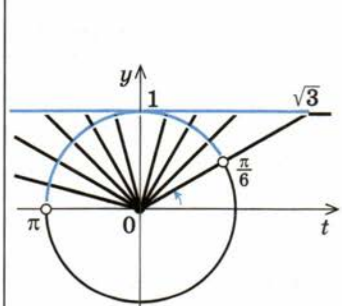


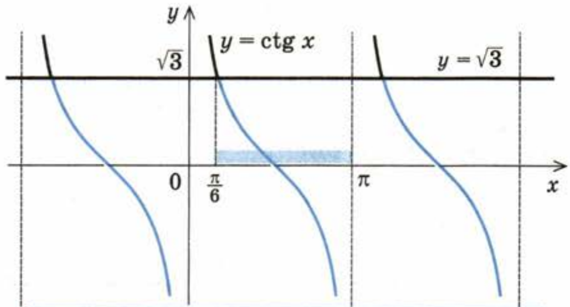
$\cos x > -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$





$\mathbf{tg}\ x \geqslant -1$ $\quad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$





$\mathrm{ctg}\ x < \sqrt{3}$ $\quad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

Продолж. табл. 43

2. Способы решения более сложных тригонометрических неравенств
а) **Использование равносильных преобразований** и, в частности, *сведение тригонометрического неравенства к алгебраическому неравенству по схеме*: 1) *к одному аргументу*, 2) *к одной функции*, 3) *замена переменной* (аналогично схеме решения тригонометрических уравнений, приведенной на с. 249) *и последующее решение полученных простейших тригонометрических неравенств.*
б) **Использование метода интервалов**   (*после сведения неравенства к виду* $f(x) \gtrless 0$) *по схеме:*   1) **Найти ОДЗ неравенства.**   2) **Найти** общий период (если он существует) для всех функций, входящих в неравенство, то есть **период функции** $f(x)$.   3) **Найти нули функции:** $f(x) = 0$.   4) **Отметить нули функции на ОДЗ на одном периоде и найти знак функции** $f(x)$ **в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ** (на одном периоде).   5) **Записать ответ**, учитывая знак заданного неравенства и период функции $f(x)$.

Объяснение и обоснование

1. Решение простейших тригонометрических неравенств. Простейшими тригонометрическими неравенствами считают неравенства вида $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (на месте знака «>» может стоять любой из знаков неравенства: «<, ⩾, ⩽»).

Для записи решения простейших тригонометрических неравенств в общем виде можно записать данное неравенство в виде $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$, или $f(x) \geqslant 0$, или $f(x) \leqslant 0$) и использовать следующую схему: 1) найти период функции $f(x)$; 2) решить неравенство на любом отрезке, длина которого равна периоду этой функции (для чего можно применить, например, метод интервалов[1]); 3) записать решение исходного неравенства, которое состоит из всех найденных значений x, а также всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов.

Рассмотрим, например, решение простейшего тригонометрического неравенства $\sin x > a$.

Используем приведенную схему для решения этого неравенства при $-1 \leqslant a < 1$.

Неравенство $\sin x > a$ равносильно неравенству $\sin x - a > 0$.

1. Период функции $f(x) = \sin x - a$ равен 2π.

---

[1] Напомним, что для решения неравенств методом интервалов мы пользуемся следующим свойством элементарной функции (которое доказывается в курсе математического анализа): *если на интервале $(a; b)$ элементарная* функция $f(x)$ *определена и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.*

2. Применяя метод интервалов, найдем решение неравенства $\sin x - a > 0$, например, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, длина которого 2π. На этом отрезке функция $f(x)$ обращается в нуль ($\sin x - a = 0$, то есть $\sin x = a$) при $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$. Используя свойства функции $y = \sin x$ (§ 14), получаем, что функция $f(x)$ на рассматриваемом промежутке принимает положительные значения только в интервале $x_1 < x < x_2$. Следовательно, решением неравенства $\sin x > a$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ является множество значений x, принадлежащих интервалу $x_1 < x < x_2$, то есть $\arcsin a < x < \pi - \arcsin a$ (рис. 114). Учитывая период функции $f(x)$, получаем, что решением рассматриваемого неравенства $\mathbf{\sin x > a}$ при $-1 \leqslant a < 1$ служат все значения x, удовлетворяющие условию $\mathbf{\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k}$, где k — любое целое число ($k \in \mathbf{Z}$).

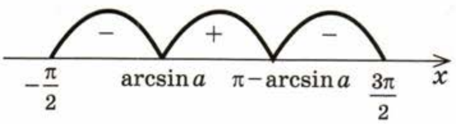


Рис. 114

Учитывая свойства функции $y = \sin x$ (§ 14), получаем, что при $a \geqslant 1$ неравенство $\sin x > a$ не имеет решений (так как синус не может принимать значения, бóльшие единицы), а при $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число (так как область значений $E(\sin x) = [-1; 1]$).

Решение остальных простейших неравенств проводится аналогично. В результате получаем решения, представленные в таблице 44.

Таблица 44

Решение простейших тригонометрических неравенств в общем виде	
Значения a	Решение
1. Неравенство $\mathbf{\sin x > a}$	
$-1 \leqslant a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in \mathbf{Z}$).
$a \geqslant 1$	Решений нет.
$a < -1$	x — любое действительное число.
2. Неравенство $\mathbf{\sin x \geqslant a}$	
$-1 < a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \leqslant -1$	x – любое действительное число.

Продолж. табл. 44

3. Неравенство $\sin x < a$	
$-1 < a \leqslant 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \leqslant -1$	Решений нет.
$a > 1$	x — любое действительное число.
4. Неравенство $\sin x \leqslant a$	
$-1 < a < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a < -1$	Решений нет.
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \geqslant 1$	x — любое действительное число.
5. Неравенство $\cos x > a$	
$-1 \leqslant a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \geqslant 1$	Решений нет.
$a < -1$	x — любое действительное число.
6. Неравенство $\cos x \geqslant a$	
$-1 < a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \leqslant -1$	x — любое действительное число.
7. Неравенство $\cos x < a$	
$-1 < a \leqslant 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a > 1$	x — любое действительное число.
$a \leqslant -1$	Решений нет.
8. Неравенство $\cos x \leqslant a$	
$-1 < a < 1$	$\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a < -1$	Решений нет.
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \geqslant 1$	x — любое действительное число.
9. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$	
a — любое действительное число ($a \in \mathbf{R}$)	$\operatorname{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Продолж. табл. 44

10. Неравенство tg $x \geqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arctg} a + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
11. Неравенство tg $x < a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
12. Неравенство tg $x \leqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
13. Неравенство ctg $x > a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
14. Неравенство ctg $x \geqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\pi k < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
15. Неравенство ctg $x < a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arcctg} a + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
16. Неравенство ctg $x \leqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arcctg} a + \pi k \leqslant x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что геометрически решение простейшего тригонометрического неравенства, например $\sin x > a$ при $-1 \leqslant a < 1$, можно трактовать как отыскание всех значений переменной x, для которых ординаты графика функции $y = \sin x$ лежат выше ординат графика функции $y = a$ (или нахождение всех значений переменной x, для которых ординаты точек P_x на единичной окружности больше a), поэтому, для того чтобы рассуждения по нахождению решений простейших тригонометрических неравенств были более наглядными, используют не таблицу 44, а единичную окружность или графики соответствующих функций, как это показано в первом пункте таблицы 43.

Задача 1 Объясним более детально решение неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$, приведенное в пункте 1 таблицы 43, с использованием единичной окружности (рис. 115).

▶ Поскольку $\sin x$ — это ордината соответствующей точки P_x единичной окружности, то при всех значениях x, удовлетворяющих данному неравенству, ордината точки P_x больше $\frac{1}{2}$. Все такие точки на единичной окружности лежат выше, чем прямая $y = \frac{1}{2}$ (они изображены на рисунке синей дугой $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайних точек, поскольку в крайних точках $\sin x = \frac{1}{2}$, а не больше $\left.\frac{1}{2}\right)$. Если, записывая ответ, двигаться против часовой стрелки, то точка P_{x_1} будет началом дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — ее концом. Сначала запишем ответ на одном периоде (напомним, что для синуса период равен 2π). Для точек P_x выделенной дуги $x_1 < x < x_2$. Поскольку точка P_{x_1} находится в правой полуплоскости, то можно взять $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Таким образом, на одном периоде решениями заданного неравенства являются: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Через период 2π значения синуса повторяются, поэтому все остальные решения заданного неравенства получаем прибавлением к найденным решениям чисел вида $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Для решения неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ можно воспользоваться также графиками функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 116).

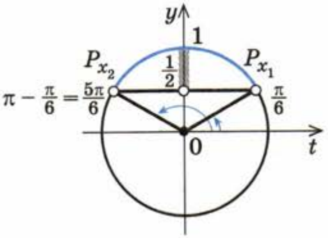


Рис. 115

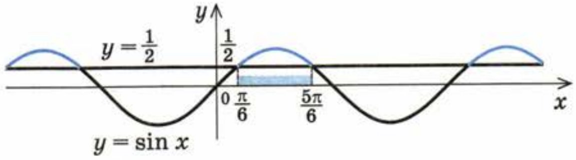


Рис. 116

▶ Решениями неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ будут те и только те значения x, для которых соответствующие точки графика функции $y = \sin x$ находятся выше прямой $y = \frac{1}{2}$ (на рисунке 116 соответствующие части графика функции выделены синими линиями). Чтобы найти абсциссы точек пересечения этих графиков, достаточно решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ $\left(x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right)$. Учитывая периодичность функции $\sin x$ ($T = 2\pi$), достаточно записать решение данного неравенства на одном периоде. На отрезке длиной 2π можно взять, например, такие абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (все другие абсциссы точек пересечения отличаются от них на $2\pi k$). Тогда на одном периоде решениями данного неравенства являются: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (абсциссы выделенных точек графика $y = \sin x$). Все остальные решения данного неравенства получаются прибавлением к найденным решениям чисел вида $2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

Аналогично можно получить и решения других видов простейших неравенств, приведенных в пункте 1 таблицы 43.

Задача 2 Решите неравенство $\cos x > -\frac{1}{2}$.

▶ Поскольку $\cos x$ — это абсцисса соответствующей точки P_x единичной окружности, то при всех значениях x, которые удовлетворяют данному неравенству, абсцисса точки P_x больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Все такие точки на единичной окружности (рис. 117) лежат справа от прямой $t = -\frac{1}{2}$ (они изображены на рисунке синей дугой $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайних точек, поскольку в крайних точках $\cos x = -\frac{1}{2}$, а не больше $-\frac{1}{2}$). Если, записывая ответ, двигаться против часовой стрелки, то точка P_{x_1} будет началом дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — ее концом. Сначала запишем ответ на одном периоде (напомним, что для косинуса он равен 2π). Для точек P_x выделенной дуги $x_1 < x < x_2$. Поскольку точка P_{x_2} находится в верхней полуплоскости, то можно взять $x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Учитывая симметричность (относительно оси t) точек P_{x_2} и P_{x_1}, получаем $x_1 = -x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Таким образом, на одном периоде решениями данного неравенства являются $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Через период 2π значения косинуса повторяются. Поэтому все остальные решения данного неравенства получаем прибавлением к найденным решениям чисел вида $2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

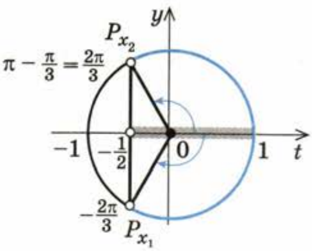


Рис. 117

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

Рассуждения при использовании графической иллюстрации решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$ полностью аналогичны приведенным выше рассуждениям по решению неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$.

Задача 3 Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

▶ Период тангенса равен π. Поэтому сначала найдем решения этого неравенства на промежутке длиной π, например на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а потом используем периодичность тангенса. Для выделения тех точек P_x правой полуокружности, значения x которых удовлетворяют данному неравенству, воспользуемся линией тангенсов (рис. 118). Сначала выделим на линии тангенсов значения тангенсов, бóльшие или равные (-1) (на рисунке они выделены синей линией), а потом для каждой точки линии тангенсов найдем соответствующую точку P_x на правой полуокружности (для этого достаточно соединить центр окружности с выделенной точкой на линии тангенсов и взять точку пересечения проведенного отрезка с окружностью).

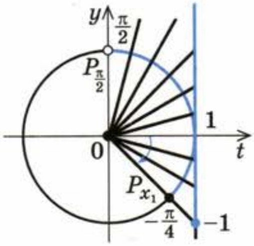


Рис. 118

Множество соответствующих точек P_x единичной окружности выделено на рисунке синей дугой $P_{x_1}P_{\frac{\pi}{2}}$ (обратите внимание: точка P_{x_1} принадлежит рассмотренному множеству, а точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ — нет). Поскольку точка P_{x_1} находится в правой полуплоскости, то можно взять $x_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Таким образом, на одном периоде решениями данного неравенства являются $-\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Через период π значение тангенса повторяется. Поэтому все остальные решения данного неравенства получаем прибавлением к найденным решениям чисел вида πk, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. ◁

Заметим, что при решении данного неравенства с использованием графиков достаточно, как и в предыдущих случаях, на одном периоде (например, на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) записать те абсциссы, для которых соответствующие точки графика функции $y = \operatorname{tg} x$ находятся выше прямой $y = -1$ или на самой прямой. (На рисунке в таблице 41 соответствующие части графика функции $y = \operatorname{tg} x$ выделены синими линиями.)

Задача 4 Решите неравенство $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

▶ Период котангенса равен π. Поэтому сначала найдем решение этого неравенства на промежутке длиной π, например на промежутке $(0; \pi)$, а потом воспользуемся периодичностью котангенса.

Для выделения тех точек P_x верхней полуокружности, значения x которых удовлетворяют данному неравенству, воспользуемся линией котангенсов (рис. 119). Сначала выделим на линии котангенсов значения котангенсов меньшие, чем $\sqrt{3}$ (на рисунке 119 они выделены синей линией), а потом для каждой точки линии котангенсов найдем соответствующую точку P_x на верхней полуокружности (для этого достаточно соединить центр окружности с выделенной точкой на линии котангенсов и взять точку пересечения проведенного отрезка с окружностью). Множество соответствующих точек P_x единичной окружности обозначено на рисунке 119 синей дугой $P_{x_1}P_\pi$. Поскольку точка P_{x_1} находится в верхней полуплоскости, то можно взять $x_1 = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$. Таким образом, на одном периоде решениями данного неравенства являются $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. Через период π значение котангенса повторяется. Таким образом, все остальные решения данного неравенства получаем прибавлением к найденным решениям чисел вида πk, где $k \in \mathbf{Z}$. *Ответ:* $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

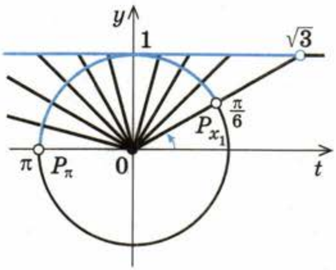


Рис. 119

Аналогично предыдущим случаям при решении неравенства $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ с использованием графиков достаточно на одном периоде (например, на промежутке $(0; \pi)$) записать те абсциссы, для которых соответствующие точки графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ находятся ниже прямой $y = \sqrt{3}$. (На рисунке в таблице 43 соответствующие части графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ выделены синими линиями.)

2. Способы решения более сложных тригонометрических неравенств также проиллюстрируем на примерах.

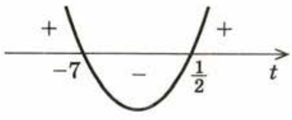
Задача 5 Решите неравенство $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x < \cos 2x$.

Решение

▶ $\frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) < \cos 2x$.

Тогда $2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 > 0$.

Замена: $\cos 2x = t$ дает неравенство $2t^2 + 13t - 7 > 0$, решение которого: $t < -7$ или $t > \frac{1}{2}$ (см. рисунок).



Комментарий

Используем равносильные преобразования данного неравенства. Для этого приведем его к алгебраическому по схеме, аналогичной схеме решения тригонометрических уравнений:

1) к одному аргументу $(2x)$;
2) к одной функции $(\cos 2x)$;
3) проведем замену переменной $(\cos 2x = t)$. После обратной замены решим полученные простейшие тригонометрические неравенства.

Обратная замена дает: $\cos 2x < -7$ (решений нет) или $\cos 2x > \frac{1}{2}$.

Тогда $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Таким образом,

$-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Решая более сложные тригонометрические неравенства, можно также применить *метод интервалов*, немного изменив его. Необходимость коррекции известной схемы решения неравенств $f(x) \geq 0$ методом интервалов (с. 69) связана с тем, что в случае, когда функция $f(x)$ — тригонометрическая, она, как правило, имеет бесконечное множество нулей (которые получаются при целых значениях параметра). Поэтому, если пытаться обозначить нули на ОДЗ, придется обозначить бесконечное их множество, что невозможно. Избежать этого можно, если найти период функции $f(x)$ (если он существует) и рассмотреть знак функции на каждом промежутке внутри одного периода.

Таким образом, **метод интервалов для решения тригонометрических неравенств $f(x) \geq 0$** может применяться по схеме:

1. **Найти ОДЗ неравенства.**
2. **Найти период функции $f(x)$** (*если он существует*).
3. **Найти нули функции ($f(x) = 0$).**
4. **Отметить нули на ОДЗ внутри одного периода и найти знак функции в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ** (*внутри одного периода*).
5. **Записать ответ** (*учитывая знак заданного неравенства и период функции $f(x)$*).

Задача 6 Решите неравенство $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$.

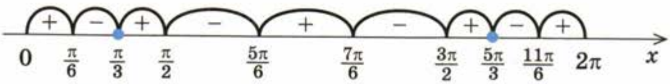
▶ Решим данное неравенство методом интервалов. Для этого приведем его к виду $f(x) \leq 0$:

$$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leq 0.$$

1. ОДЗ: x — любое действительное число.
2. Как мы знаем, период функции $\cos x$ равен 2π. Тогда период функции $\cos 2x$ будет $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, период функции $\cos 3x$ — $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, а период функции $\cos 4x$ — $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

   На отрезке длиной 2π периоды T_1, T_2, T_3 помещаются целое число раз. Тогда 2π будет общим периодом для всех этих трех функций, и поэтому 2π является периодом функции $f(x) = \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x$.

3. Найдем нули этой функции: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$.
   Тогда $2 \cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$, $\cos 3x\,(2 \cos x - 1) = 0$.
   Отсюда $\cos 3x = 0$ или $2 \cos x - 1 = 0$. Решая последние уравнения, получаем $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
4. Отметим все нули на периоде длиной 2π, например на отрезке от 0 до 2π, и получим 9 промежутков (см. рисунок).



Находим знаки функции $f(x)$ на каждом из промежутков. Для этого удобно записать функцию $f(x)$ в виде произведения: $f(x) = \cos 3x\,(2 \cos x - 1)$.

Ответ (записывается с учетом периода):

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Замечание. При решении тригонометрических неравенств методом интервалов часто приходится находить знак функции в большом количестве промежутков. Для того чтобы уменьшить объем работы, можно предложить такой способ: следить за тем, через какой нуль мы проходим при переходе от одного интервала к другому и изменяется ли знак заданной функции в этом нуле.

В случае, когда функция $f(x)$, которая стоит в левой части неравенства, записана в виде произведения $\varphi(x) \cdot g(x)$, необходимо обращать внимание на то, что знак произведения не меняется, если одновременно оба множителя (функции $\varphi(x)$ и $g(x)$) меняют знаки на противоположные.

Практически для использования этого свойства в случае, если левая часть неравенства записана как произведение нескольких функций, нули каждого множителя отмечают на промежутке разным цветом (так, как это сделано на рисунке к задаче 6), или, если множителей только два, нули первого множителя обозначают под осью, а нули второго — над осью.

Если у функций-множителей нет одинаковых нулей, то знак функции $f(x)$ меняется автоматически при переходе через каждый нуль (при условии, что только одна из функций-множителей меняет знак при переходе через этот нуль). В этом случае для нахождения всех знаков функции $f(x)$ на периоде достаточно найти ее знак только в одном промежутке, а в других расставить знаки, чередуя их. Если же у функций-множителей есть одинаковые нули, то при переходе через такой нуль знак произведения может не меняться, и это учитывается при расстановке знаков.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно решать простейшие тригонометрические неравенства с помощью: а) единичной окружности; б) графика соответствующей функции.

2. Всегда ли имеют решения неравенства: 1) $\sin x < a$; 2) $\sin x > a$; 3) $\cos x < a$; 4) $\cos x > a$; 5) $\operatorname{tg} x < a$; 6) $\operatorname{tg} x > a$; 7) $\operatorname{ctg} x < a$; 8) $\operatorname{ctg} x > a$? Могут ли быть решениями каких-либо из этих неравенств все действительные числа? Приведите примеры.
3. Какими способами можно решать тригонометрические неравенства, которые отличаются от простейших? Приведите примеры.
4*. Приведите пример обоснования в общем виде решений простейшего тригонометрического неравенства.

Упражнения

Решите неравенство **(1–14)**.

1. 1) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -2$; 4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant 3$; 4) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 1) $\operatorname{tg} x < -1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

4. 1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; 3) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x < 1$.

6. 1) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$; 4) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$.

7. 1) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x \cos 5x \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $\sin x + \cos x < 1$.

8. 1) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| < \frac{1}{2}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 1$.

9. 1) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > \sqrt{3}$; 2) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{ctg} 2x < \sqrt{3}$.

10 (ОмГУ). 1) $\sin x > \cos^2 x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$.

11 (ННГУ). 1) $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geqslant 0$; 2) $\sin x < \cos x$.

12. 1) $\cos 2x + \cos 6x > 1 + \cos 8x$; 2) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$.

13 (МГУ, хим. ф-т). 1) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$; 2) $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.

14. 1) $\sin 9x - \sin 5x + 2\sin^2 x < 2\sin 2x + 1 - \cos 2x$;
2) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

15 (МИСиС). Найдите решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, которые удовлетворяют условию $|x| < \pi$.

16. Найдите значения x на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, которые удовлетворяют неравенству $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. Решите неравенство:

1) $\sin 4x > a(\sin 3x - \sin x)$; 2) $a(\cos x - \sin x)^2 + b\cos^2 x \geqslant 0$.

18. Решите неравенство:

1) $2\sin x > a$; 2) $(5a - 7)\cos x < a + 5$;

3) $a\sin^2 x + 2\cos x - a + 1 > 0$; 4) $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} \geqslant a$.

19 (ВГУ). При каких значениях параметра a заданное неравенство выполняется при всех значениях x?

1) $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geqslant 0$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x > 3a\sin x\cos x$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 3

Решите уравнение **(1–8)**.

1 (МГУ, биол. ф-т). 1) $\sin^2 x - 4\sin x = 5$; 2) $\cos^2 x + 5\cos x = 6$;

3) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$; 4) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

2. 1) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$; 2) $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 0$;

3) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; 4) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

3. 1) $1 + \cos x - 2\cos\dfrac{x}{2} = 0$; 2) $1 - \cos x - 2\sin\dfrac{x}{2} = 0$;

3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; 4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

4. 1) $\cos^2 x - 3\cos x\sin x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x + 3\cos x\sin x + 1 = 0$;

3) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; 4) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

5. 1) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$; 2) $(1 - \cos 4x)\cos 2x = \sin^2 2x$;

3) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 4$; 4) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

6 (МЭСИ). 1) $1 - \cos x - \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0$; 2) $1 + \cos x + \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} = 0$;

3) $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$; 4) $\cos^2 4x + 3\cos^2 2x - 1 = 0$.

7. 1) $\cos 3x = 2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right)$; 2) $\sin 3x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;

3) $1 - \cos 4x = \sin 2x$; 4) $1 + \cos 4x = \cos 2x$.

8. 1) $1 - \cos(\pi + x) - \sin\dfrac{3\pi + x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi - 2x\right) + 5\sin(\pi - x) + 3 = 0$;

3) $2\cos^2(2\pi + x) - 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 2$; 4) $5\sin^2(1{,}5\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x) = 2$.

Найдите решение уравнения **(9–10)**.

9. 1) $\sin x + \cos x = 1$ на интервале $(-2\pi;\ 0)$;

2) $\sin x - \cos x = 1$ на интервале $(0;\ 2\pi)$;

3) (ГУУ) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$ на промежутке $[0;\ 90°]$;

4) $-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos\dfrac{x}{2}$ на промежутке $[180°;\ 270°]$.

10. 1) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$ на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$ на промежутке $[\pi;\ 2\pi]$;

3) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Решите уравнение (11–26).

11. 1) $\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$; 2) $\cos 6x + 2 \cos 2x = 0$;

3) $\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x=\sin^2\frac{x}{2}-\cos x$; 4) $\sin^2 x + \sin 3x = \cos^2 x + \sin x$.

12 (МАМИ). 1) $4 \cos^2 x - \sin 2x = 1$; 2) $3\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=2$;

3) $\sin^2 x + 14\sin x\cos x = 15\cos^2 x$; 4) $\cos^2 x - 12\cos x \sin x = 13\sin^2 x$.

13. 1) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1-\cos x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$; 4) $\frac{3\cos^2 x-4\cos x}{1+\sin x}=0$.

14. 1) $\frac{\cos x+\cos 3x}{1+\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}=0$; 3) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$; 4) $\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}=0$.

15. 1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; 2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$;

3) $\sin^2 x = \sin^2 3x$; 4) $\cos^2 x = \cos^2 3x$.

16. 1) $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 2x}=\operatorname{tg} 2x$; 2) $\frac{\cos 2x-\sin 4x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg} 2x$;

3) $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$; 4) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$.

17 (ГУУ). 1) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$; 4) $\cos 5x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-9x\right)-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

18 (МПГУ). 1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

3) $5 \sin 2x - 11 (\sin x + \cos x) + 7 = 0$;

4) $\sin 2z + 5 (\sin z + \cos z) + 1 = 0$.

19. 1) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$;

2) $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{8}$; 4) $8\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+1=0$.

20. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$; 2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

3) $\cos 3x=1-\sqrt{3}\sin 3x$; 4) $3 \sin x + 5 \cos x = 4$.

21. 1) $\sqrt{1+4\sin x\cos x}=\cos x-\sin x$; 2) $\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x}+\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x}+\dfrac{5}{2}=0$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x}+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}+2=0$.

22. 1) $\arcsin(x+2{,}5)=\dfrac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $(x^2-4)\arcsin x=0$; 4) $\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\arccos x=0$.

23. 1) $\arccos(\sin x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)-\dfrac{x}{4}=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin(3-2x)=-\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2x-3)=\dfrac{\pi}{3}$.

24 (МТУСИ). 1) $\arcsin x\cdot\arccos x=\dfrac{\pi^2}{18}$; 2) $\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi^2}{16}$;

3) $3\arcsin x-\pi=0$; 4) $4\operatorname{arctg} x-6\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=\pi$.

25 (ВШЭ). 1) $(\arcsin x)^2-4\arcsin x=0$; 2) $(\arccos x)^2-5\arccos x=0$;

3) $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$.

26 (МАИ). 1) $\sqrt{\operatorname{tg} x}=-2\sin x$; 2) $\sqrt{-\operatorname{tg} x}=\sqrt{2}\cos x$;

3) $\sqrt{\cos x}=-\sin x$; 4) $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x$.

27 (МГТУ). Найдите все значения x и y, удовлетворяющие уравнению:

1) $12\sin x+5\cos x=2y^2-8y+21$; 2) $3\cos x-4\sin x=2y^2-4y+7$;

3) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5$; 4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=2y^2-4y+3$.

Решите неравенство **(28–36)**.

28 (ННГУ). 1) $\cos^2 x>\dfrac{1}{4}$; 2) $\sin^2 x<\dfrac{1}{4}$;

3) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$; 4) $2\sin^2 x-3\sin x+1\geqslant 0$.

29. 1) $\dfrac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\cos x-1}>0$; 2) $\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1}>0$;

3) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\dfrac{5}{8}$; 4) $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\dfrac{3}{8}$.

30. 1) $\sin^4\dfrac{x}{3}+\cos^4\dfrac{x}{3}>\dfrac{1}{2}$; 2) $\sin^6 x+\cos^6 x>\dfrac{5}{8}$;

3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1$; 4) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x>1$.

31. 1) $\operatorname{tg}^2 x+(2-\sqrt{3})\operatorname{tg} x-2\sqrt{3}<0$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+\sqrt{3}>0$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\geqslant 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x\leqslant 0$.

32. 1) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$; 2) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 3x > -1$;
3) $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x \leqslant 0$;
4) $2\cos^2 x + (2\sqrt{3}-1)\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x \geqslant 0$.

33. 1) $\dfrac{\sin 3x \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \leqslant 0$; 2) $\cos x \cos 2x \cos 3x \leqslant 0$;
3) $\left(3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3}\right)(2\sin 2x - 1) \geqslant 0$;
4) $\cos 2x + 2\sin 2x \geqslant 2\sqrt{2}\cos x$.

34. 1) $3 \sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$; 2) $\cos 2x \leqslant \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
3) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 4x} + \dfrac{1}{\sin 8x} < 0$; 4) $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} \geqslant \dfrac{1}{\sin 3x}$.

35. 1) $2 \arccos x > \arcsin x$; 2) $2 \arcsin x > \arccos x$;
3) $2(\arcsin x)^2 - 3 \arcsin x + 1 > 0$; 4) $(\arccos x)^2 - 6 \arccos x + 8 < 0$.

36. 1) $\sin(2x + 10^\circ) + \sin(x + 10^\circ) - \sin x < 0$;
2) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$;
3) $(\operatorname{arctg} x)^3 + (\operatorname{arcctg} x)^3 > \dfrac{\pi^3}{32}$;
4) $\operatorname{arctg}(3x^2 - 3x + 1) < \operatorname{arcctg}(3x^2 - 3x + 1)$.

37. Найдите множество значений функции:
1) $y = \dfrac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(\cos x - \sin x)\right)$; 2) $y = \dfrac{9}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}\right)$.

38 (ЕГЭ С). Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если:
1) $x \in [\operatorname{arctg} 0{,}5; \operatorname{arctg} 3]$; 2) $x \in \left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$;
3) $x \in \left[\arccos 0{,}8; \dfrac{5\pi}{12}\right]$; 4) $x \in \left[\arccos\dfrac{5}{13}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$.

39 (ЕГЭ С). Решите уравнение:
1) $7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$; 2) $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x$.

40 (ЕГЭ С). При каких значениях a выражение $2 + \cos x(5\cos x + a \sin x)$ будет равняться единице хотя бы при одном значении x?

41 (ЕГЭ С). При каких значениях a выражение $3 + \sin x(2\sin x + a\cos x)$ будет равняться (-1) хотя бы при одном значении x?

Раздел

4 СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 25. КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Таблица 45

1. Определение	
Квадратный корень	Корень n-й степени
***Квадратным корнем из числа a* называется такое число b, квадрат которого равен a.** Если $a = b^2$, то b — квадратный корень из числа a.	***Корнем n-й степени из числа a* называется такое число b, n-я степень которого равна a.** Если $a = b^n$ ($n \in N$, $n \neq 1$), то b — корень n-й степени из числа a.
Арифметический корень — неотрицательное значение корня. При $a \geqslant 0$ $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ — обозначения арифметического значения корня.	
$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$	$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$
2. Область допустимых значений (ОДЗ)	
Квадратный корень	Корень n-й степени
$\sqrt{a}$ существует только при $a \geqslant 0$.	$\sqrt[2k]{a}$ **существует только при $a \geqslant 0$ ($k \in N$);** $\sqrt[2k+1]{a}$ **существует при любых значениях a**
3. Свойства корня n-й степени	
$n = 2k + 1$ — нечетное число	$n = 2k$ — четное число
1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$	
2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$	$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert}$

Продолж. табл. 45

Для произвольных значений n ($n \in N$, $n \neq 1$)

3) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$

4) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$

5) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

Следствия

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$ — *вынесение множителя из-под знака корня*

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$ — *внесение множителя под знак корня*

6) При $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

7) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — *основное свойство корня*

Значение корня из степени неотрицательного числа не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число.

8) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\text{если } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}$

4. Запись решений уравнения $x^n = a$ ($n \in N$)		
$n = 2k + 1$ — нечетное ($k \in N$)	$n = 2k$ — четное ($k \in N$)	
При любых значениях a уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный корень $x = \sqrt[2k+1]{a}$	**При $a < 0$ уравнение $x^{2k} = a$ не имеет корней**	**При $a \geqslant 0$ все корни уравнения $x^{2k} = a$ можно записать так: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$**
Примеры		
Уравнение $x^5 = 3$ имеет единственный корень $x = \sqrt[5]{3}$	Уравнение $x^8 = -7$ не имеет корней	Уравнение $x^8 = 7$ имеет корни $x = \pm\sqrt[8]{7}$

Объяснение и обоснование

1. Определение корня *n*-й степени. Понятие корня квадратного из числа a вам известно: это такое число, квадрат которого равен a. Аналогично определяется и корень n-й степени из числа a, где n — произвольное натуральное число, большее 1.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корень третьей степени из числа 27 равен 3, поскольку $3^3 = 27$; корень третьей степени из числа (-27) равен (-3), поскольку $(-3)^3 = -27$. Числа 2 и (-2) являются корнями четвертой степени из 16, поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$.

При $n = 2$ и при $n = 3$ корни n-й степени называют также соответственно квадратным и кубическим корнями.

Как и для квадратного корня, для корня n-й степени вводится понятие арифметического корня.

Арифметическим корнем n-й степени из числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

При $a \geqslant 0$ для арифметического значения корня n-й степени из числа a существует специальное обозначение[1]: $\sqrt[n]{a}$, *где число n называют показателем корня, а само число a — подкоренным выражением. Знак* $\sqrt[n]{\ }$ *и выражение* $\sqrt[n]{a}$ *называют также радикалом.*

Например, то, что корень третьей степени из числа 27 равен 3, записывается так: $\sqrt[3]{27} = 3$; то, что корень четвертой степени из 16 равен 2, записывается так: $\sqrt[4]{16} = 2$. Но для записи того, что корень четвертой степени из 16 равен (-2), обозначения нет.

При $a < 0$ значение корня n-й степени из числа a существует только при нечетных значениях n (поскольку не существует такого действительного числа, четная степень которого будет отрицательным числом). В этом случае корень нечетной степени n из числа a также обозначается $\sqrt[n]{a}$. Например, то, что корень третьей степени из числа (-27) равен (-3), записывается так: $\sqrt[3]{-27} = -3$. Поскольку (-3) — отрицательное число, то $\sqrt[3]{-27}$ не является арифметическим значением корня. Но корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметическое значение корня с помощью формулы

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}\,.$$

Чтобы доказать приведенную формулу, заметим, что по определению корня n-й степени это равенство будет верным, если $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$. Действительно, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$, а это и означает, что $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

---

[1] При $n = 1$ условимся также считать, что $\sqrt[n]{a} = \sqrt[1]{a} = a$. Покажите, что в этом случае все приведенные свойства корней n -й степени также выполняются.

Отметим, что ***значение*** $\sqrt[2k+1]{a}$ ***имеет тот же знак, что и число*** $\boldsymbol{a}$, поскольку при возведении в нечетную степень знак числа не меняется.

По определению корня n-й степени можно также записать, что в том случае, когда существует значение $\sqrt[n]{a}$, выполняется равенство

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a} \text{ и, в частности, при } a \geqslant 0 \ \boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}.$$

2. Область допустимых значений выражений с корнями n-й степени. Корни уравнения $x^n = a$ ($n \in N$). Заметим, что

значение $\sqrt[2k+1]{a}$ ***— корня нечетной степени из числа a — существует при любых значениях a.***

● Обоснуем это, например, для корня третьей степени. Обозначим $\sqrt[3]{a} = x$. Тогда по определению корня n-й степени $x^3 = a$, и значение $\sqrt[3]{a}$ будет существовать, если уравнение $x^3 = a$ будет иметь решение.

Изобразив графики функций $y = x^3$ и $y = a$ (рис. 120), увидим, что при любых значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^3$ в одной точке. Таким образом, при любом значении a существует единственное значение $\sqrt[3]{a}$ (поскольку функция $y = x^3$ возрастает и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$). ○

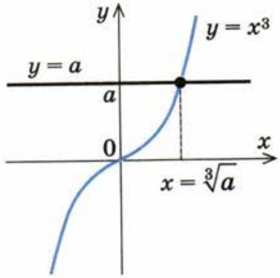


Рис. 120

Аналогичное обоснование можно привести и для других корней нечетной степени (см. графики и свойства функций вида $y = x^{2k+1}$ в § 27).

Приведенные рассуждения позволяют записать решение уравнения $x^n = a$ для нечетных значений $n = 2k + 1$: **при любых значениях a уравнение $x^{2k+1} = a$ ($k \in N$) имеет единственный корень $x = \sqrt[2k+1]{a}$.**

Например, уравнение $x^5 = 3$ имеет единственный корень $x = \sqrt[5]{3}$, а уравнение $x^7 = -11$ — единственный корень $x = \sqrt[7]{-11}$ (учитывая, что $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, корень уравнения $x^7 = -11$ можно записать так: $x = -\sqrt[7]{11}$).

Значение $\sqrt[2k]{a}$ ***— корня четной степени из числа a — существует только при*** $\boldsymbol{a \geqslant 0}$.

Действительно, в случае когда $\sqrt[2k]{a} = x$, по определению корня n-й степени $a = x^{2k}$. Таким образом, $a \geqslant 0$.

Для квадратного корня это также можно обосновать, используя известный график функции $y = x^2$.

● Пусть $\sqrt{a} = x$, тогда по определению корня n-й степени $x^2 = a$, и значение $\sqrt{a}$ будет существовать, если уравнение $x^2 = a$ будет иметь решение.

Изобразив графики функций $y = x^2$ и $y = a$ (рис. 121), видим, что прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^2$ только при $a \geqslant 0$ (причем при

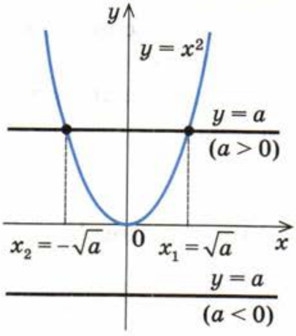


Рис. 121

$a > 0$ — в двух точках: $x_1 = \sqrt{a}$ и $x_2 = -\sqrt{a}$, а при $a = 0$ — только в одной точке $x = 0$). Таким образом, при любых значениях $a \geqslant 0$ существует значение $\sqrt{a}$, поскольку функция $y = x^2$ принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$. ○

Рассмотрим решения уравнения $x^n = a$ для четных значений $n = 2k$ $(k \in N)$.

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, поскольку квадрат любого числа не может быть отрицательным (на рисунке 121 прямая $y = a$ при $a < 0$ не пересекает график функции $y = x^2$). Так же и **уравнение $x^{2k} = a$ $(k \in N)$ при $a < 0$ не имеет корней** (поскольку четная степень любого числа не может быть отрицательной).

При $a = 0$ **уравнение $x^{2k} = 0$ $(k \in N)$ имеет единственный корень $x = 0$** (поскольку четная степень любого отличного от нуля числа — число положительное, то есть не равное нулю, а $0^{2k} = 0$).

При $a > 0$ по определению корня $2k$-й степени $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$. Следовательно, $x = \sqrt[2k]{a}$ — корень уравнения $x^{2k} = a$. Но $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, поэтому $x = -\sqrt[2k]{a}$ — также корень уравнения $x^{2k} = a$. Других корней это уравнение не имеет, поскольку свойства функции $y = x^{2k}$ аналогичны свойствам функции $y = x^2$: при $x \geqslant 0$ функция возрастает, таким образом, значение a она может принимать только при одном значении аргумента $\left(x = \sqrt[2k]{a}\right)$. Аналогично при $x \leqslant 0$ функция $y = x^{2k}$ убывает, поэтому значение a она может принимать только при одном значении аргумента $\left(x = -\sqrt[2k]{a}\right)$. Таким образом,

уравнение $x^{2k} = a$ при $a > 0$ имеет только два корня $x = \pm\sqrt[2k]{a}$.

Например, уравнение $x^{10} = -1$ не имеет корней, а уравнение $x^6 = 5$ имеет корни $x = \pm\sqrt[6]{5}$.

3. Свойства корня n-й степени можно обосновать, опираясь на определение корня n-й степени.

1) Формула $\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$ была обоснована на с. 304.

Обоснуем другие формулы, приведенные в таблице 45.

● Напомним, что по определению корня n-й степени для доказательства равенства $\sqrt[n]{A} = B$ (при $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$) достаточно проверить равенство $B^n = A$.

2) Выражение $\sqrt[n]{a^n}$ рассмотрим отдельно при $n = 2k + 1$ (нечетное) и при $n = 2k$ (четное).

Если n — *нечетное*, то учитываем, что выражение $\sqrt[n]{a^n}$ существует при любых значениях a, и то, что знак $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ совпадает со знаком a. Тогда по определению корня n-й степени получаем

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}.$$

Если n — *четное*, то учитываем, что выражение $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$ обозначает арифметическое значение корня n-й степени (таким образом, $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geqslant 0$) и что $|a|^{2k} = a^{2k}$. Тогда $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$.

3) Формулу $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \text{ при } a \geqslant 0}$

обоснуем, рассматривая ее справа налево. Поскольку $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$, то по определению $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

4) Справедливость формулы

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \text{ при } a \geqslant 0}$$

следует из равенства $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$.

5) Для обоснования формулы

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0}$$

используем равенство $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

6) Для обоснования формулы

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\ b > 0}$$

используем равенство $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$.

7) Основное свойство корня

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a \geqslant 0}$$

следует из равенства $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$. ○

Например, $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделили на натуральное число 3).

С помощью формулы $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ ($a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$) можно получить важные следствия: формулы вынесения множителя из-под знака корня или внесения множителя под знак корня.

Действительно, при $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$. Рассматривая полученную формулу слева направо, имеем *формулу вынесения неотрицательного множителя из-под знака корня*

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}},$$

а справа налево — *формулу внесения неотрицательного множителя под знак корня*

$$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.}$$

Например, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}$.

8) Отметим еще одно свойство корней n-й степени:
для любых неотрицательных чисел a и b

$$\boxed{\textit{если } a>b, \text{ то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\ .}$$

Докажем это методом от противного. Допустим, что $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$. Тогда при возведении обеих частей последнего неравенства с неотрицательными членами в n-ю степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство $a\leqslant b$. Это противоречит условию $a>b$. Таким образом, наше предположение неверно, и $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Например, учитывая, что $21>16$, получаем $\sqrt[4]{21}>\sqrt[4]{16}$. Поскольку $\sqrt[4]{16}=2$, имеем $\sqrt[4]{21}>2$.

*Обобщение свойств корня n-й степени**

Основная часть формул, которые выражают свойства корней n-й степени, обоснована для неотрицательных значений подкоренных выражений. Но иногда приходится выполнять преобразования выражений с корнями n-й степени и в том случае, когда таких ограничений нет: например, извлекать корень квадратный (или в общем случае корень четной степени) из произведения ab отрицательных чисел ($a<0$, $b<0$). Тогда $ab>0$ и $\sqrt[2k]{ab}$ существует, но формулой

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

воспользоваться нельзя: она обоснована только для неотрицательных значений a и b. Но в случае $ab>0$ имеем $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$, и теперь $|a|>0$ и $|b|>0$. Следовательно, для извлечения корня из произведения $|a|\cdot|b|$ можно применить формулу (1).

Тогда при $a<0$, $b<0$ можем записать: $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|\cdot|b|}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$.

Отметим, что полученная формула справедлива и при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, поскольку в этом случае $|a|=a$ и $|b|=b$. Таким образом,

$$\boxed{\text{при } ab\geqslant 0\ \ \sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}.}$$

---

* Этот материал обязателен только для классов физико-математического профиля.

Аналогично можно обобщить свойство 6:

$$\boxed{\text{при } \frac{a}{b} \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}\ .}$$

Следует отметить, что в тех случаях, когда обоснование основных формул можно повторить и для отрицательных значений a и b, такими формулами можно пользоваться для любых a и b (из ОДЗ левой части формулы).

Например, для корней нечетной степени *для любых значений a и b*

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b} \qquad (2)$$

Действительно, выражения, стоящие в левой и правой частях этой формулы, существуют при любых значениях a и b и выполняется равенство

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab.$$

Тогда по определению корня $(2k+1)$-й степени выполняется и равенство (2).

Например, $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{b} = a^5\sqrt[3]{b}$ при любых значениях a и b.

Но некоторые формулы не удается использовать для любых значений a и b. Например, если мы по основному свойству корня запишем, что $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ (показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделили на натуральное число 2), то полученное равенство не является тождеством, поскольку при $a = -1$ (левая и правая часть этого равенства определены при всех значениях a) имеем $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$, то есть $1 = -1$ — неверное равенство.

Таким образом, при делении показателя корня и показателя степени подкоренного выражения на четное натуральное число необходимо обобщить основное свойство корня. Для этого достаточно заметить, что $a^2 = |a|^2$, и теперь основание степени подкоренного выражения $|a| \geqslant 0$, а значит, можно применить основную формулу (свойство 7):

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}.$$

В общем случае, *если при использовании основного свойства корня приходится делить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на четное натуральное число, то в результате основание степени подкоренного выражения приходится брать по модулю,* то есть

$$\boxed{\sqrt[2kn]{a^{2km}} = \sqrt[n]{|a|^m}}\ .$$

Аналогично можно обосновать и другие примеры использования основных свойств корней при любых значениях a и b (из ОДЗ левой части формулы), которые приведены в таблице 46.

Таблица 46

Основные формулы корней n-й степени (только для неотрицательных значений a и b, то есть при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Можно ли применять основные формулы для любых a и b из ОДЗ левой части формулы (если нельзя — дается обобщенная формула)	
	корень нечетной степени	корень четной степени
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	*можно*	*только для неотрицательных a*
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	*можно*	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
3. Корень из корня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	*можно*	*можно*
4. Корень из произведения $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}$
и произведение корней $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		*можно*
5. Корень из частного $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	*можно*	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}}$
и частное корней $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$		*можно*
6. Основное свойство корня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ и наоборот	можно, если все корни нечетной степени (то есть переход *нечетная → нечетная*)	Переход *четная → четная* *можно*
		Переход *нечетная → четная* $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m \geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m < 0 \end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\lvert a^m \rvert}$
7. Вынесение множителя из-под знака корня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. Внесение множителя под знак корня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можно*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a < 0, \end{cases}$ где $b \geqslant 0$

Замечание. Под термином «переход», который использован в таблице 46, следует понимать переход в соответствующей формуле от корня n-й степени к корню m-й степени.

Если n и m оба четные, то такой переход коротко охарактеризован как «переход четная → четная» (вида $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[8]{a^4}$).

Если n и m оба нечетные, то в таблице записано, что выполнен «переход нечетная → нечетная» (вида $\sqrt[15]{a^9}=\sqrt[5]{a^3}$).

Если n — нечетное число, а m — четное число, то в таблице указано, что выполнен «переход нечетная → четная» (вида $\sqrt[5]{(-2)^3}=-\sqrt[10]{(-2)^6}$).

Таким образом, если по условию задания на преобразование выражений с корнями n-й степени (иррациональных выражений) известно, что все буквы (которые входят в запись данного выражения) неотрицательные, то для преобразования этого выражения можно пользоваться основными формулами, а если такого условия нет, то приходится анализировать ОДЗ данного выражения и только после этого принимать решение, какими формулами пользоваться — основными или обобщенными.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите значение выражения: 1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Решение

1) ▶ $\sqrt[4]{625}=5$, поскольку $5^4=625$; ◁

2) ▶ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$, поскольку $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$; ◁

3) ▶ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ◁

Комментарий

Используем определение корня n-й степени. Запись $\sqrt[n]{a}=b$ означает, что $b^n=a$.

Задача 2 Найдите значение выражения: 1) $\sqrt[3]{27\cdot125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Комментарий

Используем свойства корня n-й степени и учтем, что каждую формулу, которая выражает эти свойства, можно применять как слева направо, так и справа налево. Например, для решения задания 1 воспользуемся формулой $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для решения задания 2 применим эту же формулу справа налево, то есть: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (при $a\geqslant0$, $b\geqslant0$).

Решение

1) ▶ $\sqrt[3]{27\cdot125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot5=15$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot8}=\sqrt[4]{16}=2$. ◁

Задача 3 Сравните числа: 1) $\sqrt[4]{50}$ и $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Решение

1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Так как $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, то есть $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Поскольку $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, то есть $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁

Комментарий

Для сравнения данных чисел в каждом задании достаточно привести все корни к одному показателю корня и учесть, что *для любых неотрицательных чисел a и b, если $a>b$,* то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Задача 4 Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит корня n-й степени:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Комментарий

В задании 1 учтем, что $\sqrt[5]{3^5}=3$, таким образом, после умножения числителя и знаменателя данной дроби на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменатель можно будет записать без знака радикала. В задании 2 достаточно числитель и знаменатель данной дроби умножить на разность $\sqrt{5}-1\neq 0$ (чтобы получить в знаменателе формулу разности квадратов).

Но выполнение аналогичного преобразования в задании 3 связано с определенными проблемами. ОДЗ выражения $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$: $a\geqslant 0$ (следовательно, все тождественные преобразования необходимо выполнять для всех значений $a\geqslant 0$). Умножим числитель и знаменатель данной дроби на выражение $\sqrt{a}-1$. По основному свойству дроби это можно сделать при $\sqrt{a}-1\neq 0$, то есть при $a\neq 1$. Но значение $a=1$ принадлежит ОДЗ исходного выражения, поэтому выбранный нами способ решения приведет к сужению его ОДЗ. Действительно, если записать, что $\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, то это равенство не является тождеством, поскольку не выполняется для $a=1$ из ОДЗ исходного выражения. В этом случае, чтобы не допустить ошибок, можно пользоваться таким ориентиром: *если для тождественных преобразований* (или для решения уравнений и неравенств) *приходится применять преобразования (или формулы), приводящие к сужению ОДЗ исходного выражения, то значения, на которые сужается ОДЗ данного выражения, следует рассмотреть отдельно.*

Решение

1) ▶ $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{4}=\sqrt{5}-1.$ ◁

3) ▶Обозначим $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тогда при $a=1$ получаем $A=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$.

При $a\neq 1$ ($a\geqslant 0$) имеем $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Ответ: при $a=1$ $A=\frac{1}{2}$, при $a\neq 1$ ($a\geqslant 0$) $A=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$

(то есть ответ не может быть записан однозначно). ◁

Задача 5 Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$; 2) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$ при $a>0$ и $b>0$; 3*) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Решение

1) <u>I способ</u>

▶ $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{(\sqrt[6]{a})^2-(\sqrt[6]{b})^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=$

$=\frac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}.$ ◁

<u>II способ</u>

▶ Обозначим $\sqrt[6]{a}=x$, $\sqrt[6]{b}=y$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Тогда $\sqrt[3]{a}=(\sqrt[6]{a})^2=x^2$ и $\sqrt[3]{b}=(\sqrt[6]{b})^2=y^2$. Таким образом,

$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=$

$=x+y=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}.$ ◁

2) ▶ $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$ ◁

3) ▶ Обозначим $A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

При $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ (и $b+\sqrt{ab}\neq 0$) имеем:

Комментарий

В задании 1 ОДЗ данного выражения: $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\neq 0$. Для неотрицательных значений a и b мы имеем право пользоваться всеми основными формулами преобразования корней (как слева направо, так и справа налево).

При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ можно записать: $\sqrt[3]{a}=(\sqrt[6]{a})^2$ и $\sqrt[3]{b}=(\sqrt[6]{b})^2$. Тогда числитель данной дроби можно разложить на множители по формуле разности квадратов.

Для того чтобы выделить в числителе разность квадратов, можно также выполнить замену $\sqrt[6]{a}=x$; $\sqrt[6]{b}=y$.

В задании 2 по условию $a>0$ и $b>0$, поэтому мы имеем право воспользоваться основными формулами преобразования корней. Тогда $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$.

В задании 3 ОДЗ данного выражения: $ab\geqslant 0$, $b+\sqrt{ab}\neq 0$. Но $ab\geqslant 0$ при $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ или $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0.\end{cases}$ При $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

При $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ $\left(\text{и } b+\sqrt{ab}\neq 0\right)$ имеем:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-(-a)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{-a}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}\left(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\right)}{-\sqrt{-b}\left(\sqrt{-b}-\sqrt{-a}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: 1) при $a\geqslant 0$ и $b>0$ $A=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

2) при $a\leqslant 0$ и $b<0$ (из ОДЗ)

$$A=-\sqrt{\frac{a}{b}}.\ \triangleleft$$

мы можем пользоваться всеми основными формулами преобразования корней (как в задании 2), а при $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ придется применить обобщенную формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ и учесть, что при $a\leqslant 0$ получаем $(-a)\geqslant 0$. Тогда можно записать: $a=-(-a)=-\left(\sqrt{-a}\right)^2$. Аналогично при $b\leqslant 0$ можно записать

$$b=-(-b)=-\left(\sqrt{-b}\right)^2.$$

Также следует иметь в виду, что при $a\leqslant 0$ и $b\leqslant 0$ получаем $|a|=-a$ и $|b|=-b$.

Записывая ответ, необходимо учесть, что $b=0$ не принадлежит ОДЗ данного выражения.

Задача 6* Упростите выражение $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

Комментарий

В условии не сказано о том, что значения a неотрицательные, поэтому придется сначала определить ОДЗ данного выражения.

Выражение $\sqrt[3]{a^2}$ существует при любых значениях a и является неотрицательным. Выражение a^4 также существует и неотрицательно при любых значениях a. Таким образом, при любых значениях a под знаком квадратного корня будет находиться неотрицательное выражение $a^4\sqrt[3]{a^2}$, то есть заданное выражение существует при любых значениях a (ОДЗ: *любое* $a\in \boldsymbol{R}$), и его преобразование необходимо выполнить на всей ОДЗ.

Преобразование данного выражения возможно несколькими способами, например: 1) сначала рассмотреть корень квадратный из произведения, а потом воспользоваться формулой корня из корня и основным свойством корня; 2) сначала внести выражение a^4 под знак кубического корня, а затем также применить формулу корня из корня и основное свойство корня. Выполняя преобразования каждым из этих способов, учитываем, что при любых a значения $a^2\geqslant 0$ и $a^4\geqslant 0$ (а значит, для этих выражений можно пользоваться основными формулами). Далее при использовании основного свойства корня приходится делить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на четное натуральное число 2, поэтому в результате основание степени подкоренного выражения берем по модулю (поскольку $a \in \boldsymbol{R}$).

Решение

I способ

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[6]{|a|^2} = a^2\sqrt[3]{|a|}$. ◁

II способ

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}\cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} = \sqrt[3]{|a|^6\cdot|a|} =$

$= \sqrt[3]{|a|^6}\sqrt[3]{|a|} = |a|^2\sqrt[3]{|a|} = a^2\sqrt[3]{|a|}$. ◁

Вопросы для контроля

1. Дайте определение корня n-й степени из числа a. Приведите примеры.
2. Дайте определение арифметического корня n-й степени из числа a. Приведите примеры.
3. При каких значениях a существуют выражения $\sqrt[2k]{a}$ и $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in N)$?
4. Запишите свойства корня n-й степени для неотрицательных значений подкоренных выражений.
5*. Докажите свойства корня n-й степени для неотрицательных значений подкоренных выражений.
6*. Какими свойствами корня n-й степени можно пользоваться при любых значениях букв (из ОДЗ левой части соответствующей формулы)? Приведите примеры использования основных формул и их обобщений.
7. При каких значениях a имеют корни уравнения:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in N)$?
8. Запишите все решения уравнения:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in N)$: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$; в) при $a = 0$.
   Приведите примеры таких уравнений и решите их.

Упражнения

1. Проверьте, верно ли равенство:
1°) $\sqrt[3]{64} = 4$; 2°) $\sqrt[9]{-1} = -1$; 3) $\sqrt[10]{1024} = 2$; 4°) $\sqrt[25]{0} = 0$; 5°) $\sqrt[5]{-32} = -2$; 6°) $\sqrt[13]{1} = 1$.

2°. Вычислите:
1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$; 4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

Найдите значение выражения (**3–7**).

3. 1°) $\sqrt[3]{8\cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48\cdot 81}$.

4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

5. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 10^5}$.

7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0{,}1)^4\, 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 6^{20}}$.

8. Сравните числа:

1°) $\sqrt[9]{0{,}1}$ и 0; 2°) $\sqrt[11]{1{,}3}$ и 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ и $\sqrt[3]{3}$.

9°. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{5}{x}}$?

10. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит корня n-й степени:

1) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

11. Вынесите множитель из-под знака корня ($a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

12*. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

13. Внесите множитель под знак корня ($a>0$, $b>0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\dfrac{a}{b^{11}}}$.

14*. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

Упростите выражение (**15–17**).

15. 1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$ при $a<0$;

3) $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[3]{a^3}$ при $a>0$; 4) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a<0$.

16*. 1) $\sqrt[4]{2ab^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3b^5}$; 2) $\sqrt[6]{ab^3c}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4c}\cdot\sqrt[6]{b^5c^4}$;

3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$.

17. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

3*) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[6]{ab^5}+b}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; 4*) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{xy}}$.

18°. Решите уравнение:

1) $x^3=7$; 2) $x^6=3$; 3) $x^5=-5$; 4) $x^8=-13$; 5) $x^4=16$; 6) $x^3=-64$.

§ 26. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Таблица 47

<table>
<tr><td colspan="2">Понятие иррационального уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными. При решении заданное иррациональное уравнение чаще всего сводят к рациональному уравнению с помощью некоторых преобразований.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение иррациональных уравнений</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. С помощью возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень</td></tr>
<tr><td>При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получаем уравнение, равносильное заданному (на его ОДЗ).</td><td>При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, которые отсеиваются проверкой.</td></tr>
<tr><td>Пример 1
Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1}=2$.
▶ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$,
$x-1=8$,
$x=9$.
Ответ: 9. ◁</td><td>Пример 2
Решите уравнение $\sqrt{2x+3}=x$.
▶ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$,
$x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.
Проверка.
При $x=-1$ имеем: $\sqrt{1}=-1$ — неверное равенство, следовательно, $x=-1$ — посторонний корень.
При $x=3$ имеем $\sqrt{9}=3$ — верное равенство, следовательно, $x=3$ — корень заданного уравнения.
Ответ: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. С помощью замены переменных</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в уравнение переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пример 3
Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.
▶ Обозначим $\sqrt[3]{x}=t$. Тогда $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.
Получаем уравнение: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$.
Выполняем обратную замену:
$\sqrt[3]{x}=1$, тогда $x=1$ или $\sqrt[3]{x}=-2$, откуда $x=-8$.
Ответ: 1; −8. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Иррациональными уравнениями называют такие уравнения, в которых переменная находится под знаком корня. Например, $\sqrt{x-2}=5$, $\sqrt[3]{x}+x=2$ — иррациональные уравнения.

Чаще всего решение иррациональных уравнений основывается на приведении данного уравнения с помощью некоторых преобразований к рациональному уравнению. Как правило, это достигается с помощью возведения обеих частей иррационального уравнения в одну и ту же степень (часто несколько раз).

Следует учитывать, что

при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень всегда получаем уравнение, равносильное заданному (на его ОДЗ).

Например, уравнение $$\sqrt[3]{x+7}=3 \qquad (1)$$

равносильно уравнению $$\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3, \qquad (2)$$

то есть уравнению $x + 7 = 27$. Отсюда $x = 20$.

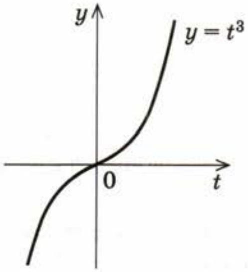


Рис. 122

Для обоснования равносильности уравнений (1) и (2) достаточно обратить внимание на то, что равенства $A = B$ и $A^3 = B^3$ могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = t^3$ является возрастающей (на рисунке 122 приведен ее график) и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента t. Следовательно, все корни уравнения (1) (которые обращают это уравнение в верное равенство) будут корнями и уравнения (2), и наоборот, все корни уравнения (2) будут корнями уравнения (1). А это и означает, что уравнения (1) и (2) являются равносильными. Аналогично можно обосновать равносильность соответствующих уравнений и в случае возведения обеих частей уравнения в одну и ту же произвольную нечетную степень.

Если для решения иррационального уравнения обе части возвести в четную степень, то получаем уравнение-следствие — когда все корни первого уравнения будут корнями второго, но второе уравнение может иметь корни, которые не удовлетворяют данному уравнению. Такие корни называют посторонними для данного уравнения. **Чтобы выяснить, являются ли полученные числа корнями данного уравнения, выполняют проверку полученных решений.**

Например, для решения уравнения
$$\sqrt{x}=2-x \qquad (3)$$
возведем обе его части в квадрат и получим уравнение
$$\left(\sqrt{x}\right)^2=(2-x)^2. \qquad (4)$$
Учитывая, что $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, имеем $x = 4 - 4x + x^2$, то есть $x^2 - 5x + 4 = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Выполняем проверку. При $x = 1$ уравнение (3) обращается в верное равенство $\sqrt{1} = 2-1$, $1 = 1$. Значит, $x = 1$ является корнем уравнения (3).

При $x = 4$ получаем неверное равенство $\sqrt{4} = 2-4$; $2 \neq -2$. Следовательно, $x = 4$ — посторонний корень уравнения (3). То есть в ответ надо записать только $x = 1$.

Появление постороннего корня связано с тем, что равенство $A^2 = B^2$ можно получить при возведении в квадрат обеих частей равенства $A = B$ или равенства $A = -B$. Таким образом, выполнение равенства $A^2 = B^2$ еще не гарантирует выполнения равенства $A = B$. То есть корни уравнения (4) не обязательно являются корнями уравнения (3) (но, конечно, каждый корень уравнения (3) является корнем уравнения (4), поскольку при выполнении равенства $A = B$ обязательно выполняется и равенство $A^2 = B^2$).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4$.

Решение

▶ $$\sqrt{5x-1} = 4 - \sqrt{x+3},$$

$$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2 = \left(4-\sqrt{x+3}\right)^2,$$

$$5x-1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3,$$

$$8\sqrt{x+3} = 20 - 4x;\ \ 2\sqrt{x+3} = 5 - x,$$

$$\left(2\sqrt{x+3}\right)^2 = (5-x)^2,$$

$$4(x+3) = 25 - 10x + x^2,$$

$$x^2 - 14x + 13 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 13.$$

Проверка. $x = 1$ — корень $\left(\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4, 4 = 4\right)$; $x = 13$ — посторонний корень $\left(\sqrt{16} + \sqrt{64} \neq 4\right)$.

Ответ: 1. ◁

Комментарий

Изолируем один корень и возведем обе части уравнения в квадрат — так мы избавимся от одного из корней.

Затем снова изолируем корень и снова возведем обе части уравнения в квадрат — получим квадратное уравнение.

Поскольку при возведении в квадрат можно получить посторонние корни, то в конце выполним проверку полученных решений.

Задача 2 Решите уравнение $\frac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2$.

Решение

▶ Пусть $\sqrt{6-x} = t$, где $t > 0$.

Получаем $\frac{8}{t} - t = 2$.

Комментарий

Если в данное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\left(\sqrt{6-x}\right)$, то удобно это выражение

Тогда $t^2 + 2t - 8 = 0$.
Отсюда $t_1 = 2$, $t_2 = -4$.
$t_1 = 2$ — удовлетворяет условию $t > 0$;
$t_2 = -4$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.
Обратная замена дает:

$$\sqrt{6-x} = 2,$$
$$6 - x = 4,$$
$$x = 2.$$

Ответ: 2. ◁

с переменной обозначить одной буквой — новой переменной $\left(\sqrt{6-x} = t\right)$.

Если зафиксировать ограничение $t > 0$ (арифметическое значение $\sqrt{6-x} \geqslant 0$ и в знаменателе не может стоять 0), то в результате замены и приведения полученного уравнения к квадратному будут выполняться равносильные преобразования данного уравнения.

Можно было не фиксировать ограничение $t > 0$, но тогда в результате преобразований получаем уравнения-следствия и найденные решения придется проверять.

Задача 3* Решите уравнение $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

Решение

▶Пусть $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = u, \\ \sqrt{x+1} = v. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$

Получаем систему $\begin{cases} u+v = 3, \\ u^3 - v^2 = -3. \end{cases}$

Из первого уравнения находим $v = 3 - u$ и подставляем во второе уравнение:

$$u^3 - (3 - u)^2 = -3,$$
$$u^3 - (9 - 6u + u^2) = -3,$$
$$u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0,$$
$$u^2(u - 1) + 6\,(u - 1) = 0,$$
$$(u - 1)(u^2 + 6) = 0.$$

Учитывая, что $u^2 + 6 \neq 0$, получаем $u = 1$. Тогда $v = 2$. Имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = 1, \\ \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = 3$, что удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: 3. ◁

Комментарий

Некоторые иррациональные уравнения, которые содержат несколько корней n-й степени, можно привести к системе рациональных уравнений, заменив каждый корень новой переменной.

После замены $\sqrt[3]{x-2} = u$, $\sqrt{x+1} = v$ из данного уравнения получаем только одно уравнение $u + v = 3$. Для получения второго уравнения запишем, что по определению корня n-й степени $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$

Вычтем из первого равенства второе (чтобы избавиться от переменной x) и получим еще одну связь между u и v: $u^3 - v^2 = -3$.

Полученную систему уравнений решаем методом подстановки.

Выполняя обратную замену, необходимо выяснить, существует ли значение x, удовлетворяющее обоим соотношениям замены.

При решении систем уравнений, содержащих иррациональные уравнения, чаще всего используются традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных. При этом следует учитывать, что *замена переменных (вместе с обратной заменой) всегда является равносильным преобразованием* (если при выбранной замене не происходит сужения ОДЗ данного уравнения или системы). Но *если для дальнейшего решения системы уравнений, полученных в результате замены, мы будем пользоваться уравнениями-следствиями, то можно получить посторонние решения, и тогда полученные решения придется проверять.*

Задача 4 Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$

Решение

► Замена $\sqrt[4]{x}=u$ и $\sqrt[4]{y}=v$ дает

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-v^2=3.\end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы

$$u = 3 - v.$$

Тогда из второго уравнения получаем

$$(3 - v)^2 - v^2 = 3.$$

Отсюда $v = 1$, тогда $u = 2$.

Обратная замена дает:

$\sqrt[4]{y}=1$, значит, $y = 1$;

$\sqrt[4]{x}=2$, следовательно, $x = 16$.

Ответ: (16; 1). ◁

Комментарий

Если обозначить $\sqrt[4]{x}=u$ и $\sqrt[4]{y}=v$, то $\sqrt{x}=u^2$ и $\sqrt{y}=v^2$. Тогда заданная система будет равносильна алгебраической системе, которую легко решить. После обратной замены получаем систему простейших иррациональных уравнений.

Так как замена и обратная замена приводят к равносильным системам, то решения заданной системы совпадают с решениями системы $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=2,\\ \sqrt[4]{y}=1,\end{cases}$ то есть $\begin{cases}x=16,\\ y=1.\end{cases}$

Вопросы для контроля

1. Назовите основные методы решения иррациональных уравнений. Приведите примеры применения соответствующих методов.
2. Объясните, почему для решения уравнений

$$\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$$

удобно применить замену переменной. Укажите замену для каждого уравнения.

3*. Обоснуйте, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень всегда получается уравнение, равносильное заданному.

4*. Объясните, почему при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни. Как отсеивают посторонние корни?

Упражнения

Решите уравнение **(1–6)**.

1°. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$;

4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

2. 1°) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 3°) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3. 1°) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$;

3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

4. 1°) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$;

3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;

3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

6*. 1) (МЭСИ) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) (МИРЭА) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Решите систему уравнений **(7–8)**.

7. 1) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7,\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7,\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

§ 27. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

27.1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

Таблица 48

1. Степень с натуральным и целым показателем	
$\boxed{a^1=a}$	$\boxed{a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}}$ $a\in \boldsymbol{R},\ n\in \boldsymbol{N}\ (n\geqslant 2)$
$\boxed{a^0=1}$ $a\neq 0$	$\boxed{a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}}$ $a\neq 0,\ n\in \boldsymbol{N}$

Продолж. табл. 48

2. Степень с дробным показателем
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$ $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0,\ n \in N\ (n \geqslant 2),\ m \in Z$
3. Свойства степеней
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Объяснение и обоснование

1. Из курса алгебры 7–9 классов вам известны понятия степеней с натуральным и целым показателями. Напомним их определения и свойства.

Если n — натуральное число, большее, чем 1, то для любого действительного числа a $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}}$, то есть a^n равно произведению n сомножителей, каждый из которых равен a.

При $n = 1$ считают, что $\boxed{a^1 = a}$.

Если $a \neq 0$, то $\boxed{a^0 = 1}$ и $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, где n — натуральное число.

Например, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Вам известны также основные свойства степеней:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n b^n;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}\,.$$

Напомним еще одно полезное свойство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Обобщим *понятия* степени для выражений вида $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$, $5^{-\frac{1}{3}}$ и т. п., то есть *для степеней с рациональными показателями*. Соответствующее определение желательно дать так, чтобы степени с рациональными показателями имели те же свойства, что и степени с целыми показателями.

Например, если мы хотим, чтобы выполнялось свойство $(a^p)^q = a^{pq}$, то должно выполняться равенство $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Но по определению корня

n-й степени последнее равенство означает, что число $a^{\frac{m}{n}}$ является корнем n-й степени из числа a^m. Это приводит нас к такому определению.

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Также по определению принимаем, что при $r > 0$

$\boxed{0^r = 0}$ (при $r \leqslant 0$ степень 0^r не определена).

Например, по определению степени с рациональным показателем:

$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9};$ $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5};$ $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}};$ $0^{\frac{2}{5}} = 0.$

Замечание. Значение степени с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ (где $n > 1$) не определяется при $a < 0$.

Это объясняется тем, что рациональное число r можно представить разными способами в виде дроби: $r = \frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где k — любое натуральное число.

При $a > 0$, используя основное свойство корня и определение степени с рациональным показателем, имеем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$. Таким образом, при $a > 0$ значение a^r не зависит от формы записи r.

При $a < 0$ это свойство не удается сохранить. Например, если $r = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, то должно выполняться равенство $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$. Но при $a = -1$ получаем $a^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1;$ $a^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1 \neq -1$, то есть при отрицательных значениях a имеем $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$, и вследствие этого определение степени $a^{\frac{m}{n}}$ (где m — целое, n — натуральное, не равное 1) для отрицательных значений a обычно не вводится.

Покажем теперь, что для введенного определения степени с рациональным показателем сохраняются все свойства степеней с целыми показателями (различие состоит в том, что приведенные далее свойства являются правильными только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных чисел a и b выполняются равенства:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s};$

2) $a^r : a^s = a^{r-s};$

3) $(a^r)^s = a^{rs};$

4) $(ab)^r = a^r b^r;$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$

Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться определением степени с рациональным показателем и доказанными в § 23 свойствами корня n-й степени.

● Пусть $r=\frac{m}{n}$ и $s=\frac{p}{q}$, где n и q — натуральные числа (большие 1), а m и p — целые. Тогда при $a>0$ и $b>0$ имеем:

1) $a^r\cdot a^s=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{r+s}$;

2) $a^r:a^s=\frac{a^r}{a^s}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s=\sqrt[n]{a^{ms}}=a^{\frac{ms}{n}}=a^{\frac{m}{n}\cdot s}=a^{rs}$;

4) $(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^rb^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}=\frac{a^r}{b^r}$. ○

Понятие степени с иррациональным показателем. Опишем в общих чертах, как можно определить число a^α для иррациональных α, когда $a>1$. Например, объясним, как можно понимать значение $2^{\sqrt{3}}$.

Иррациональное число $\sqrt{3}$ можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби: $\sqrt{3}=1{,}7320508075\ldots$. Рассмотрим десятичные приближения числа $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком:

$$1<\sqrt{3}<2;$$

$$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$

$$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$

$$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$

$$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321;$$

$$1{,}73205<\sqrt{3}<1{,}73206;$$

$$1{,}732050<\sqrt{3}<1{,}732051;$$

$$\ldots$$

Будем считать, что когда $r<\sqrt{3}<s$ (где r и s – рациональные числа), то значение $2^{\sqrt{3}}$ находится между соответствующими значениями 2^r и 2^s, а именно: $2^r<2^{\sqrt{3}}<2^s$. Найдем с помощью калькулятора приближенные значения 2^r и 2^s, выбирая как r и s приближенные значения $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком соответственно. Получаем соотношения:

$$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2;$$
$$2^{1,7} \approx 3{,}2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3{,}4822022;$$
$$2^{1,73} \approx 3{,}3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3{,}3219975;$$
$$\ldots$$

Как видим, значения 2^r и 2^s приближаются к одному и тому же числу 3,32199... . Это число и считают степенью $2^{\sqrt{3}}$. Таким образом, $2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199\ldots$.

Значение $2^{\sqrt{3}}$, вычисленное на калькуляторе, следующее: $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$.

Можно доказать, что всегда, когда мы выбираем рациональные числа r, которые с недостатком приближаются к иррациональному числу α, и рациональные числа s, с избытком приближающиеся к этому же иррациональному числу α, для любого $a > 1$ существует, и притом только одно, число y, которое больше, чем все a^r, и меньше, чем все a^s. Это число y по определению и есть значение a^α.

Аналогично определяется и степень с иррациональным показателем α для $0 < a < 1$, только в случае, когда $r < \alpha < s$ при $0 < a < 1$ считают, что $a^s < a^\alpha < a^r$. Кроме того, как и для рациональных показателей, по определению считают, что $1^\alpha = 1$ для любого α и $0^\alpha = 0$ для всех $\alpha > 0$ (при $\alpha \leqslant 0$ степень 0^α не определена).

Примеры решения задач

Задача 1 Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем: 1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Решение

1) ▶ $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ◁

3) ▶при $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ◁

4) ▶ $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{|a|^2} = |a|^{\frac{2}{7}}$. ◁

Комментарий

По определению степени с рациональным показателем для $a > 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Для задания 3 учтем, что выражение $a^{\frac{2}{7}}$ определено также и при $a = 0$.

В задании 4 при $a < 0$ мы не имеем права пользоваться формулой (1). Но если учесть, что $a^2 = |a|^2$, то для основания $|a|$ формулой (1) уже можно воспользоваться, поскольку $|a| \geqslant 0$.

Задача 2 Вычислите: 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение

1) ▶ $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; ◁

2) ▶ $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} =$

$= 2^{-2} = \frac{1}{4}$; ◁

3*) ▶ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не существует, поскольку степень $a^{\frac{1}{3}}$ определена только при $a \geqslant 0$. ◁

Комментарий

Используем определение степени с рациональным показателем:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$.

При выполнении задания 3 учитываем, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не определено при $a < 0$.

Задача 3 Упростите выражение: 1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}$.

Решение

1) ▶ $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$; ◁

2*) ▶ $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = \dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3^3}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} =$

$= \dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9\right)}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = x^{\frac{1}{3}} + 3$. ◁

Комментарий

Поскольку данные примеры содержат выражения $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, то $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Тогда в задании 1 неотрицательные числа a и b можно представить как квадраты: $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ и применить формулу разности квадратов: $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$, а в задании 2 представить неотрицательное число x как куб: $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$ и применить формулу разложения суммы кубов:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Задача 4 Решите уравнение: 1) $\sqrt[3]{x^2}=1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$.

Решение

1) $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$,
$x^2=1$,
$x=\pm 1$.
Ответ: ± 1.

2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x \geqslant 0$,
$x^2=1$,
$x=\pm 1$.
Учитывая ОДЗ, получаем $x=1$.
Ответ: 1.

Комментарий

Область допустимых значений уравнения $\sqrt[3]{x^2}=1$ — все действительные числа, а уравнения $x^{\frac{2}{3}}=1$ — только $x \geqslant 0$.

При возведении обеих частей уравнения в куб получим уравнение, равносильное данному на его ОДЗ. Таким образом, первому уравнению удовлетворяют все найденные корни, а второму — только неотрицательные.

(В задании 1 также учтено, что $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в задании 2 — что $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot 3}=x^2$.)

Вопросы для контроля

1. Дайте определение степени с натуральным показателем. Приведите примеры вычисления таких степеней.
2. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем и с нулевым показателем. Приведите примеры вычисления таких степеней. При каких значениях a существуют значения выражений a^0 и a^{-n}, где $n \in \boldsymbol{N}$?
3. Дайте определение степени с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, не равное 1. Приведите примеры вычисления таких степеней. При каких значениях a существуют значения выражения $a^{\frac{m}{n}}$? Укажите область допустимых значений выражений $a^{\frac{2}{5}}$ и $a^{-\frac{2}{5}}$.
4. Запишите свойства степеней с рациональными показателями. Приведите примеры использования этих свойств.

5*. Обоснуйте свойства степеней с рациональными показателями.

6*. Объясните на примере, как можно ввести понятие степени с иррациональным показателем.

Упражнения

1°. Представьте выражение в виде корня из числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0,25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1,5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

2. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 2°) $\sqrt[5]{4}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a > 0$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b \geqslant 0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

3°. Имеет ли смысл выражение:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4. Найдите область допустимых значений выражения:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 2) x^{-3}; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 5) $(x^2-1)^0$; 6) x^3-5.

5. Найдите значение числового выражения:

1) $243^{0,4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$;

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$; 7) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$.

6. Разложите на множители:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a - a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

7. Сократите дробь:

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\frac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p-25}$; 3) $\frac{c + c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$.

Упростите выражение **(8–9)**.

8. 1) $\left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} + l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} - l^{\frac{1}{8}}\right)$.

9. 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}$; 2) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}$; 4) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$.

10. Решите уравнение:

1) $x^{\frac{3}{5}} = 1$; 2) $x^{\frac{1}{7}} = 2$; 3) $x^{\frac{2}{5}} = 2$; 4) $\sqrt[5]{x^2} = 2$.

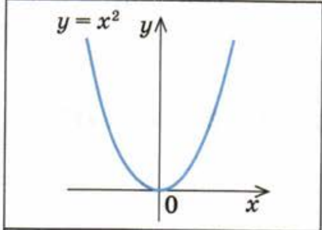
27.2. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

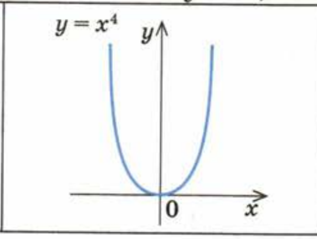
Определение. **Функция вида $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число, называется *степенной функцией*.**

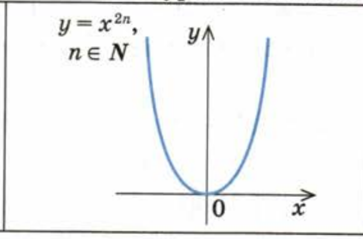
Графики и свойства

График

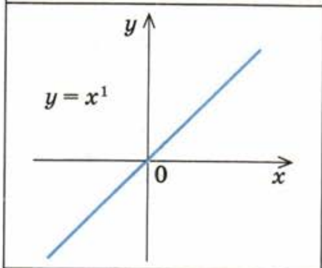
1. $y = x^{\alpha}$, α — четное натуральное число

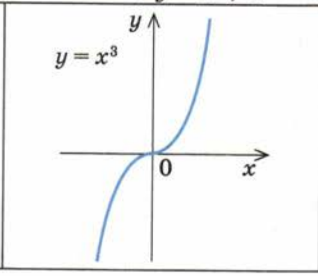


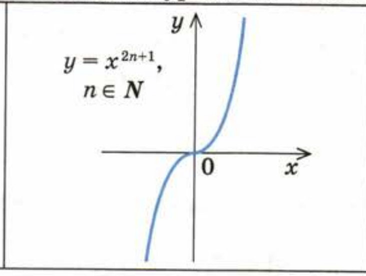




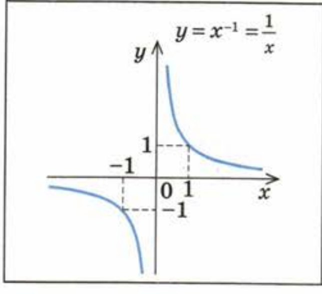
2. $y = x^{\alpha}$, α — нечетное натуральное число

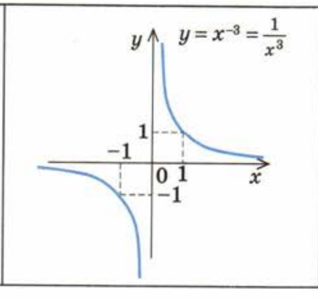






3. $y = x^{\alpha}$, α — нечетное отрицательное число





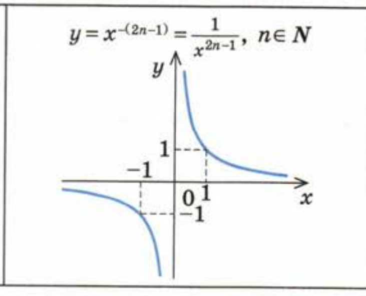
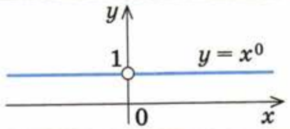
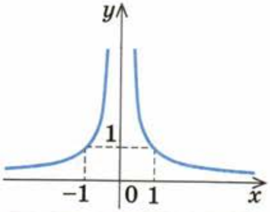
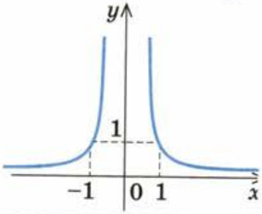
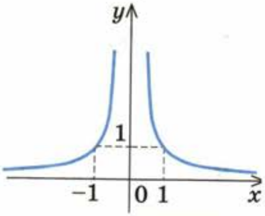
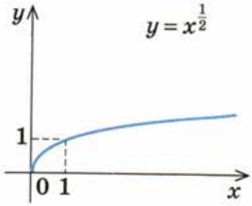
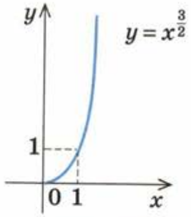
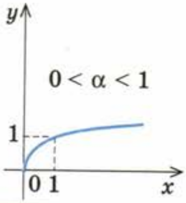
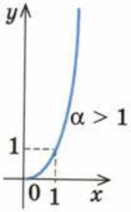
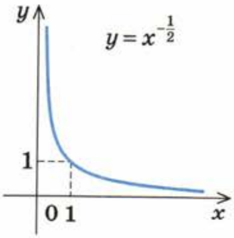
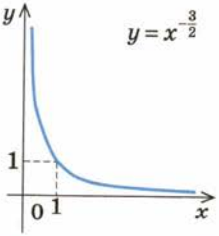
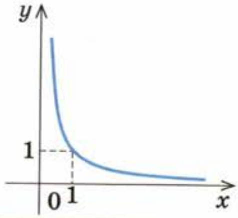


Таблица 49

Особый случай ($\alpha = 0$)	
Если $\alpha = 0$, то $y = x^{\alpha} = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$).	

функции $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)

Свойства			
$D\ (y)$	$E\ (y)$	четность и нечетность	возрастание и убывание
($y = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$)			
$\boldsymbol{R}$	$[0;\ +\infty)$	четная	убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$, возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$
($y = x$ и $y = x^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$)			
$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	нечетная	возрастает
($y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \boldsymbol{N}$)			
$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечетная	убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$

Графики и свойства		
График		
4. $y = x^{\alpha}$, α — четное отрицательное число		
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
5. $y = x^{\alpha}$,		
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое)  
6. $y = x^{\alpha}$,		
$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — нецелое) 

Продолж. табл. 49

функции $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
Свойства			
$D(y)$	$E(y)$	четность и нечетность	возрастание и убывание
$\left(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in N\right)$			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	четная	возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на промежутке $(0; +\infty)$
α — нецелое положительное число			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ни четная, ни нечетная	возрастает
α — нецелое отрицательное число			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	ни четная, ни нечетная	убывает

Объяснение и обоснование

Степенными функциями называют функции вида $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число.

С некоторыми из таких функций вы уже ознакомились в курсе алгебры 7–9 классов. Это, например, функции $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. При произвольном натуральном α графики и свойства функции $y = x^{\alpha}$ аналогичны известным вам графикам и свойствам указанных функций.

Описывая свойства степенных функций, выделим те характеристики функций, которые мы использовали в разделе 1: 1) область определения; 2) область значений; 3) четность или нечетность; 4) точки пересечения с осями координат; 5) промежутки знакопостоянства; 6) промежутки возрастания и убывания; 7) наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Функция вида $y = x^{\alpha}$ (α — четное натуральное число). Если α — четное натуральное число, то функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y = x^2$.

Действительно, *область определения* функции $y = x^{2n}$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x.

Функция *четная*: если $f(x) = x^{2n}$, то $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Таким образом, график функции $y = x^{2n}$ симметричен относительно оси Oy.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то *график функции $y = x^{2n}$ всегда проходит через начало координат.*

На промежутке $[0; +\infty)$ *функция возрастает.*

Действительно, для неотрицательных значений x_1 и x_2 ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, поскольку, как известно из курса алгебры 9 класса, при возведении обеих частей верного неравенства с неотрицательными членами в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство.

На промежутке $(-\infty; 0]$ *функция убывает.*

Действительно, для неположительных значений x_1 и x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), если $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (и теперь $-x_1 \geqslant 0$, $-x_2 \geqslant 0$). Тогда $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, таким образом, $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$.

Для нахождения области значений функции $y = x^{2n}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{2n} = a$. Оно имеет решения для всех $a \geqslant 0$ (тогда $x = \pm\sqrt[2n]{a}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Следовательно, область значений данной функции: $y \geqslant 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Таким образом, для всех действительных значений x значение $y \geqslant 0$. *Наименьшее значение* функции равно нулю ($y = 0$ при $x = 0$). *Наибольшего значения функция не имеет.*

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{2n} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{2n}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 123).

2. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нечетное натуральное число). Если α — нечетное натуральное число ($\alpha = 2n - 1$, $n \in N$), то свойства функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, аналогичны свойствам функции $y = x^3$.

Действительно, *область определения* функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$: $D(y) = R$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x.

Функция *нечетная*: если $f(x) = x^{2n-1}$, то $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$. Таким образом, график функции симметричен относительно начала координат.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то график функции $y = x^{2n-1}$ всегда проходит через начало координат.

На всей области определения функция возрастает.

Действительно, при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, поскольку при возведении обеих частей верного неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство.

Для нахождения области значений функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{2n-1} = a$. Оно имеет решения для всех $a \in R$ (при $n = 1$ получаем $x = a$, а при $n \neq 1$, $n \in N$, получаем $x = \sqrt[2n-1]{a}$). Таким образом, область значений данной функции: $y \in R$, то есть $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$.

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

Промежутки знакопостоянства: при $x > 0$ значение $y = x^{2n-1} > 0$, а при $x < 0$ значение $y = x^{2n-1} < 0$.

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{2n-1} = 1$.

Как известно из курса алгебры и геометрии, графиком функции $y = x^1 = x$ является прямая, проходящая через начало координат (рис. 124), а при других нечетных натуральных α функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, имеет график, аналогичный графику функции $y = x^3$ (рис. 125).

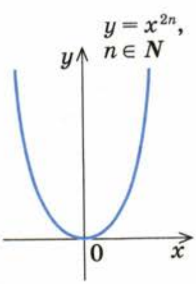


Рис. 123

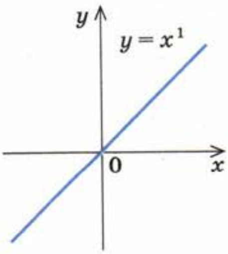


Рис. 124

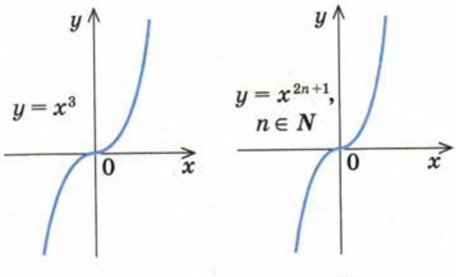


Рис. 125

3. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нечетное отрицательное число). Если α — нечетное отрицательное число, то функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y = \frac{1}{x}$.

Действительно, область определения функции $y=x^{-(2n-1)}=\frac{1}{x^{2n-1}}$: $x \neq 0$, то есть $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x, кроме $x=0$.

Функция *нечетная*: при $x \neq 0$, если $f(x)=x^{-(2n-1)}$, то

$$f(-x)=(-x)^{-(2n-1)}=-x^{-(2n-1)}=-f(x).$$

Таким образом, график функции симметричен относительно начала координат.

Учитывая, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ $\left(y=x^{-(2n-1)}=\frac{1}{x^{2n-1}}\neq 0\right)$, получаем, что *график функции $y=x^{-(2n-1)}$ не пересекает оси координат.*

На промежутке $(0;\ +\infty)$ функция убывает.

Действительно, для положительных значений x_1 и x_2 $(x_1>0,\ x_2>0)$ при $x_2>x_1$ получаем $x_2^{2n-1}>x_1^{2n-1}$, тогда $\frac{1}{x_2^{2n-1}}<\frac{1}{x_1^{2n-1}}$, следовательно, $x_2^{-(2n-1)}<x_1^{-(2n-1)}$.

На промежутке $(-\infty;\ 0)$ функция также убывает. Это можно заметить, если учесть, что ее график симметричен относительно начала координат.

Приведем аналитическое обоснование: если $x_1<0$, $x_2<0$ и $x_2>x_1$, то $-x_2<-x_1$ (и теперь $-x_1>0$, $-x_2>0$). Тогда по обоснованному выше $(-x_2)^{-2(n-1)}>(-x_1)^{-2(n-1)}$, таким образом, $-x_2^{-(2n-1)}>-x_1^{-(2n-1)}$. Отсюда $x_2^{-(2n-1)}<x_1^{-(2n-1)}$.

Для нахождения *области значений* функции $y=x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{-(2n-1)}=a$, то есть $\frac{1}{x^{2n-1}}=a$. Оно имеет решения для всех $a \neq 0$ (тогда $x=\sqrt[2n-1]{\frac{1}{a}}$ при $n \neq 1$ и $x=\frac{1}{a}$ при $n=1$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, область значений заданной функции: $y \neq 0$, то есть $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

Промежутки знакопостоянства: при $x>0$ значения $y=x^{-(2n-1)}>0$, а при $x<0$ значения $y=x^{-(2n-1)}<0$.

Отметим также, что при $x=1$ значение $y=1^{-(2n-1)}=1$.

Учитывая свойства функции $y=x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 126).

4. Функция $y=x^{\alpha}$ (α — четное отрицательное число). Если α — четное отрицательное число, то функция $y=x^{-2n}$, $n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y=\frac{1}{x^2}$.

Действительно, *область определения* функции $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$: $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x, кроме $x = 0$.

Функция *четная*: при $x \neq 0$, если $f(x) = x^{-2n}$, то $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$. Таким образом, график функции симметричен относительно оси Oy.

Учитывая, что при $x \neq 0$ значение $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}} > 0$, получаем, что

график функции $y = x^{2n}$ не пересекает оси координат.

На промежутке $(0;\ +\infty)$ *функция убывает.*

Действительно, для положительных значений x_1 и x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, тогда $\frac{1}{x_2^{2n}} < \frac{1}{x_1^{2n}}$, следовательно, $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$.

На промежутке $(-\infty;\ 0)$ *функция возрастает.*

Это следует из того, что ее график симметричен относительно оси Oy. Приведем также и аналитическое обоснование: если $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (и теперь $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тогда по обоснованному выше $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$, следовательно, $x_2^{-2n} > x_1^{-2n}$.

Для нахождения области значений функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{-2n} = a$, то есть $\frac{1}{x^{2n}} = a$. Оно имеет решения для всех $a > 0$ (тогда $x = \pm\sqrt[2n]{\frac{1}{a}}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, *область значений* заданной функции: $y > 0$, то есть $E(y) = (0;\ +\infty)$.

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{-2n} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 127).

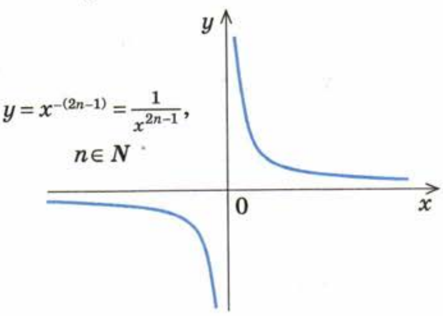


Рис. 126

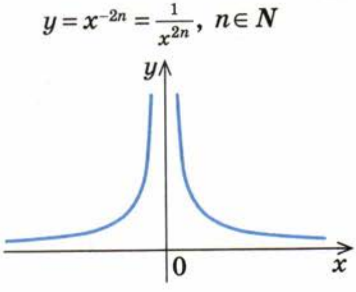


Рис. 127

5. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нецелое положительное число). Если α — нецелое положительное число, то функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое) имеет *область определения:* $x \geqslant 0$, то есть $D(y) = [0; +\infty)$, поскольку значение степени с положительным нецелым показателем определено только для неотрицательных значений x.

Тогда область определения несимметрична относительно точки 0, и функция не может быть *ни четной, ни нечетной.*

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то *график функции $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) всегда проходит через начало координат.*

При $x > 0$ значение $y = x^{\alpha} > 0$.

Можно обосновать, что *на всей области определения функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) является возрастающей.*

Для нахождения области значений функции $y = x^{\alpha}$ составим уравнение $x^{\alpha} = a$. Оно имеет решения для всех $a \geqslant 0$ $\left(\text{тогда } x = a^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, область значений данной функции: $y \geqslant 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{\alpha} = 1$.

При изображении графика функции $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое) следует учитывать, что при $0 < \alpha < 1$ график имеет вид, аналогичный графику* $y = \sqrt{x}$ (рис. 128), а при $\alpha > 1$ — аналогичный правой ветви графика $y = x^2$ (рис. 129).

6. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нецелое отрицательное число). Если α — нецелое отрицательное число, то функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — нецелое) имеет область определения: $x > 0$ ($D(y) = (0; +\infty)$), поскольку значение степени с отрицательным нецелым показателем определено только для положительных значений x.

Тогда область определения несимметрична относительно точки 0, и функция не может быть *ни четной, ни нечетной.*

Учитывая, что при $x > 0$ значения $y = x^{\alpha} > 0$ (то есть $x \neq 0$ и $y \neq 0$), получаем, что *график функции $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$) не пересекает оси координат.*

На промежутке $(0; +\infty)$ *функция убывает*, то есть для положительных значений x_1 и x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{\alpha} < x_1^{\alpha}$.

Докажем это, например, для случая, когда α — отрицательное рациональное нецелое число $\left(\alpha = -\frac{m}{n}\right.$ — нецелое, $m \in N$, $n \in N$). При положительных значениях x_1 и x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) при $x_2 > x_1$, учитывая результаты исследования функции $y = x^{\alpha}$ при целом отрицательном α, получаем $x_2^{-m} < x_1^{-m}$.

* Это более детально обосновано в учебнике для 11 класса.

Далее, учитывая то, что функция $y=\sqrt[n]{t}$ при положительных значениях t является возрастающей, имеем $\sqrt[n]{x_2^{-m}}<\sqrt[n]{x_1^{-m}}$, тогда $x_2^{-\frac{m}{n}}<x_1^{-\frac{m}{n}}$. ○

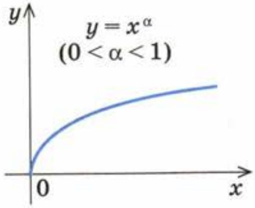


Рис. 128

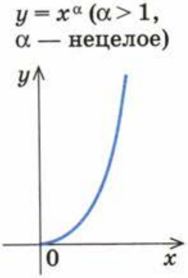


Рис. 129

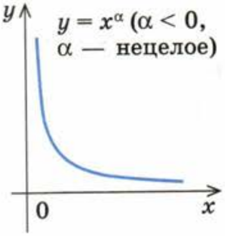


Рис. 130

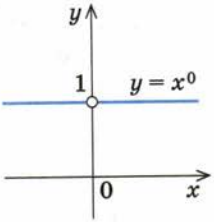


Рис. 131

Можно обосновать, что и в том случае, когда α — отрицательное иррациональное число, функция $y = x^\alpha$ также убывает на всей области определения (то есть при $x > 0$).

Для нахождения области значений функции $y = x^\alpha$ составим уравнение $x^\alpha = a$. Оно имеет решения для всех $a > 0$ (тогда $x=a^{\frac{1}{\alpha}}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции.

Таким образом, область значений заданной функции: $y > 0$, то есть

$$E(y)=(0;\ +\infty).$$

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^\alpha = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^\alpha$ $(\alpha<0)$, получаем ее график (рис. 130).

Особый случай. Если $\alpha = 0$, то функция $y = x^\alpha = x^0 = 1$ при $x \neq 0$ (напомним, что 0^0 — не определено) и ее график — прямая $y = 1$ без точки $(0; 1)$ (рис. 131).

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

1) $y=(x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

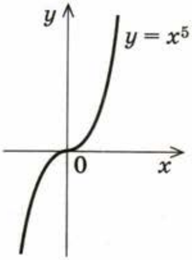
Решение	Комментарий
1) ▶ $x - 3 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 3$, значит, $D(y) = [3; +\infty)$. ◁ 2) ▶ $x + 1 > 0$, то есть $x > -1$, следовательно, $D(y) = (-1; +\infty)$. ◁	Учтем, что выражение $a^{\frac{1}{3}}$ определено при $a \geqslant 0$, а выражение $a^{-\frac{1}{2}}$ — только при $a > 0$.

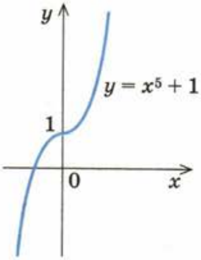
Задача 2 Постройте график функции:

1) $y = x^5 + 1$; 2) $y = (x+2)^{\frac{1}{3}}$.

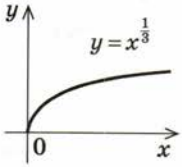
Решение

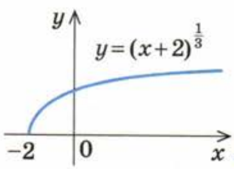
1) ▶ Строим график функции $y = x^5$, а затем параллельно переносим его вдоль оси Oy на $+1$.





2) ▶ Строим график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$, а затем параллельно переносим его вдоль оси Ox на (-2).





◁

Комментарий

Графики данных функций можно получить из графиков функций:

1) $y = x^5$;

2) $y = x^{\frac{1}{3}}$

с помощью параллельного переноса:

1) на $+1$ вдоль оси Oy;

2) на (-2) вдоль оси Ox.

Вопросы для контроля

1. Пользуясь графиком соответствующей функции, охарактеризуйте свойства функции вида $y = x^{\alpha}$, если:
   1) α — четное натуральное число;
   2) α — нечетное натуральное число;
   3) α — нечетное отрицательное число;
   4) α — четное отрицательное число;
   5) α — нецелое отрицательное число;
   6) α — нецелое положительное число.

2*. Обоснуйте свойства степенной функции в каждом из случаев, указанных в задании 1.

Упражнения

1. Найдите область определения функции:

1°) $y = x^7$; 2°) $y = x^{-3}$; 3°) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4°) $y=x^{-\frac{2}{7}}$; 5) $y=(x^2-x)^{\frac{5}{3}}$; 6) $y=(x^2-x+1)^{-\frac{9}{2}}$.

2. Постройте график функции:

1°) $y = x^4$; 2°) $y = x^7$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{-4}$;

5) $y=x^{\frac{1}{4}}$; 6) $y=x^{\frac{5}{4}}$; 7) $y = (x + 1)^4$; 8*) $y=x^{\frac{1}{5}}-3$;

9*) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$; 10*) $y = |x^5 - 1|$.

3. Постройте и сравните графики функций:

1) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=\sqrt[4]{x}$ и $y=x^{\frac{1}{4}}$.

4. Решите графически уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}}=6-x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}}=x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}}=2-x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}}=2x-1$.

Проверьте подстановкой, что значение x действительно является корнем уравнения.

5*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 4, не имеют других корней, кроме найденных графически.

§ 28. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

28.1. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Напомним основные идеи, которые используются при решении уравнений с помощью свойств функций.

Таблица 50

1. Конечная ОДЗ	
Ориентир	Пример
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.	$\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18.$ ► ОДЗ: $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ 6-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\leqslant 3.\end{cases}$ Следовательно, ОДЗ: $x = 3$. Проверка. $x = 3$ — корень $(\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18;\ 18=18)$. Других корней нет, так как ОДЗ принадлежит только одно число. *Ответ*: 3. ◁

Продолж. табл. 50

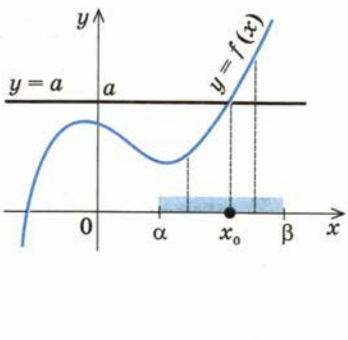
2. Оценка значений левой и правой частей уравнения

Ориентир	Пример
$\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ $\boxed{f(x)\geqslant a,}$ $\boxed{g(x)\leqslant a}$ **Если требуется решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство между левой и правой частями уравнения возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно равны a.**	$\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4.$ ▶ Запишем заданное уравнение так: $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4),$ $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2,$ $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0,$ $g(x)=-(x-2)^2\leqslant 0.$ Итак, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}=0, \\ -(x-2)^2=0.\end{cases}$ Из второго уравнения получаем $x=2$, что удовлетворяет и первому уравнению. *Ответ*: 2. ◁

3. Использование монотонности функций

Схема решения уравнения

1. *Подбираем один или несколько корней уравнения.*
2. *Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку левой и правой частей уравнения).*



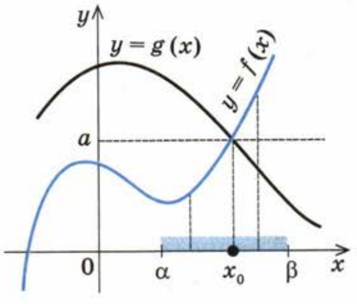
Теоремы о корнях уравнения

1. **Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.**

Пример

Уравнение $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}=3$ имеет единственный корень $x = 1$ $\left(\sqrt{1}+2\cdot\sqrt[3]{1}=3,\right.$ то есть $3=3$), поскольку функция $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей области определения $x\geqslant 0$) как сумма двух возрастающих функций.

Продолж. табл. 50

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

2. **Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.**

Пример

Уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$ имеет единственный корень $x = 4$ $(\sqrt{4} = 6 - 4,\ \ 2 = 2)$, поскольку $f(x) = \sqrt{x}$ возрастает (при $x \geqslant 0$), а $g(x) = 6 - x$ убывает.
</td>
</tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Использование конечности ОДЗ для решения иррациональных уравнений. Основными способами решения иррациональных уравнений, которые используются в курсе алгебры и начал математического анализа, являются выполнение равносильных преобразований уравнений или получение уравнений-следствий, позволяющих привести данное уравнение к рациональному. Но иногда полученное рациональное уравнение оказывается сложным для решения. Например, уравнение $\sqrt{x-3} + 2x^2 = \sqrt[4]{6-2x} + 18$, приведенное в пункте 1 таблицы 50, можно привести к рациональному, изолируя $\sqrt[4]{6-2x}$ и возводя обе части в четвертую степень, а затем изолируя выражение, содержащее $\sqrt{x-3}$, и возводя обе части в квадрат. Но в результате мы получим полное уравнение шестнадцатой степени. В таких ситуациях попробуем применить известные нам методы решения уравнений, связанные с использованием свойств функций. В частности, в рассматриваемом уравнении ОДЗ определяется условиями $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 6-2x \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда получаем только одно значение $x = 3$, принадлежащее ОДЗ. Поскольку любой корень уравнения принадлежит его ОДЗ, достаточно проверить, являются ли числа, входящие в ОДЗ, корнями данного уравнения. Проверка показывает, что $x = 3$ — корень. Других корней быть не может, поскольку ОДЗ уравнения состоит только из одного значения $x = 3$.

Отметим, что в том случае, **когда ОДЗ данного уравнения — пустое множество** (не содержит ни одного числа), мы даже без проверки можем дать ответ, что **уравнение не имеет корней**. Например, если требуется решить уравнение $\sqrt{x-3} = \sqrt[6]{2-x} + 5x$, то его ОДЗ задается системой $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ то есть системой $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ не имеющей решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

2. Оценка значений левой и правой частей уравнения. Иногда в тех случаях, когда иррациональное уравнение приводится к громоздкому рациональному (или совсем не приводится к рациональному), целесообразно попробовать оценить значения функций, которые стоят в левой и правой частях уравнения.

Например, чтобы решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=\cos^2 x-1, \qquad (1)$$

достаточно с помощью равносильных преобразований записать его в виде: $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=-(1-\cos^2 x)$, то есть $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=-\sin^2 x$. В левой части последнего уравнения стоит функция $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\geqslant 0$ на всей области определения, а в правой — функция $g(x)=-\sin^2 x\leqslant 0$ при всех значениях x. Тогда равенство между левой и правой частями уравнения возможно тогда и только тогда, когда они одновременно равны нулю. Таким образом, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{cases} \text{ то есть системе } \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0, \\ -\sin^2 x=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим сначала первое уравнение этой системы. Учтем, что $\sqrt{x}\geqslant 0$ и $\sqrt[4]{x}\geqslant 0$. **Сумма двух неотрицательных функций может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю.** Таким образом, уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0$ равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x}=0, \\ \sqrt[4]{x}=0, \end{cases}$ имеющей единственное решение $x=0$. Это решение удовлетворяет и второму уравнению системы (2) (действительно: $-\sin^2 0=0$, $0=0$). Следовательно, система (2) также имеет только одно решение $x=0$. Значит, и уравнение (1) имеет единственный корень $x=0$.

3. Использование монотонности функций. Еще одним способом решения иррациональных уравнений, которые приводятся к громоздким рациональным, является использование возрастания или убывания соответствующих функций. Чаще всего это делается по такой схеме:

1) *подбираем один или несколько корней уравнения;*

2) *доказываем, что других корней это уравнение не имеет.*

Обоснование соответствующих свойств приведено в § 3 раздела 1, а примеры использования этого приема для решения иррациональных уравнений — в таблице 50.

Упражнения

Решите уравнение **(1–4)**.

1. 1) $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2$; 2) $2x+\sqrt{x^2-5x+6}=x^2+\sqrt[8]{10x-2x^2-12}-3$.

2. 1) $\sqrt[4]{16+x^2}=2-\sqrt{x^3+x}$; 2) $1+\left|x-\sqrt{x}\right|=\sqrt[6]{1-|x|}$;

3) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x-x^2$; 4) $\sqrt[4]{x-2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}=2-|x-3|$.

3. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x^2-1}+\sqrt[6]{x^3-1}=0$; 2) $\left|\sqrt{x}-2\right|+\left|\sqrt{y}-5\right|+\sqrt[4]{xy-100}=0$.

4. 1) (МТУСИ) $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$; 2) $\sqrt[4]{x+12}+\sqrt[3]{x-3}=3$;

3) $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x+2}=6-\sqrt[4]{8x}$; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$.

5. Решите систему уравнений, используя свойства соответствующих функций:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y},\\ 2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^3-\sqrt[3]{y}=y^3-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

28.2. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДРУГИХ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если при решении иррациональных уравнений мы используем уравнения-следствия (как в § 26), то в конце приходится выполнять проверку полученных корней. Но в тех случаях, когда эти решения — не рациональные числа, проверка с помощью подстановки полученных значений в исходное уравнение является достаточно сложной и требующей громоздких вычислений. Для таких уравнений приходится применять равносильные преобразования на каждом шаге решения. При этом необходимо помнить, что все равносильные преобразования уравнений или неравенств выполняются на ОДЗ данного уравнения или неравенства (§ 3), поэтому, выполняя равносильные преобразования иррациональных уравнений, приходится учитывать ОДЗ данного уравнения. Достаточно часто в этих случаях используются также следующие рассуждения: *для всех корней данного уравнения знаки левой и правой частей уравнения совпадают*, поскольку при подстановке в данное уравнение числа, которое является его корнем, получаем верное числовое равенство. Используя последнее рассуждение, часто удается получить какое-нибудь дополнительное условие для корней данного уравнения и выполнить равносильные преобразования не на всей ОДЗ данного уравнения, только на той ее части, где находятся все корни данного уравнения.

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1$.

Решение

▶ОДЗ: $\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$

Решение этой системы: $x\geqslant -\frac{1}{2}$.

Комментарий

Выполним равносильные преобразования данного уравнения.

Учитывая, что все равносильные преобразования выполняются на

На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1},$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1,$$

$$x-1=2\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

Для всех корней уравнения (1)

$$x-1 \geqslant 0. \qquad (2)$$

При этом условии уравнение (1) равносильно уравнениям:

$$(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$x^2-2x+1=4(x+1),$$

$$x^2-6x-3=0.$$

Тогда $x=3\pm2\sqrt{3}$.

$x_1=3+2\sqrt{3}$ принадлежит ОДЗ и удовлетворяет условию (2), таким образом, является корнем данного уравнения; $x_2=3-2\sqrt{3}$ принадлежит ОДЗ, но не удовлетворяет условию (2), а значит, не является корнем данного уравнения.

Ответ: $3+2\sqrt{2}$. ◁

ОДЗ данного уравнения, зафиксируем его ОДЗ.

При переносе члена $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ из левой части уравнения в правую с противоположным знаком получаем уравнение, равносильное данному.

В уравнении $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ обе части неотрицательные, следовательно, при возведении обеих частей в квадрат получим уравнение, равносильное данному, которое, в свою очередь, равносильно уравнению (1).

Для всех корней уравнения (1) оно является верным числовым равенством. В этом равенстве правая часть $\left(2\sqrt{x+1}\geqslant0\right)$, — неотрицательное число, тогда и левая часть является неотрицательным числом, то есть $x-1\geqslant0$ для всех корней. Тогда при условии (2) обе части уравнения (1) неотрицательные, таким образом, при возведении обеих частей в квадрат получаем равносильное уравнение. Но после нахождения корней этого уравнения необходимо проверить не только то, входят ли они в ОДЗ, но и удовлетворяют ли они условию (2). Для первоначальной прикидки можно взять приближенные значения корней $x_1\approx6{,}4$ и $x_2\approx-0{,}4$, а при необходимости выполнить и строгую оценку получившихся ограничений для каждого из корней.

Задача 2 Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+2$.

Комментарий

Замена $\sqrt{x-1}=t$ позволяет заметить, что каждое выражение, стоящее под знаком внешнего квадратного корня, является квадратом двучлена.

Применяя формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, получаем уравнение с модулями, для решения которого используем *план* (см. с. 77):

1) *найти ОДЗ;*
2) *найти нули всех подмодульных функций;*
3) *отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;*
4) *найти решения уравнения в каждом из промежутков.*

Решение

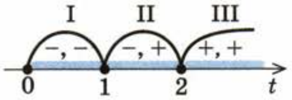
▶ Пусть $\sqrt{x-1}=t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $x - 1 = t^2$, $x = t^2 + 1$.

Получаем уравнение $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+1-2t}=t^2+3$,

которое можно записать так: $\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=t^2+3$. Отсюда

$$|t-2|+|t-1|=t^2+3. \qquad (1)$$

1) ОДЗ уравнения (1): любое $t \in \boldsymbol{R}$, но по смыслу задания это уравнение необходимо решить при $t \geqslant 0$.
2) Нули подмодульных функций: $t = 2$ и $t = 1$.
3) Эти нули разбивают область $t \geqslant 0$ на три промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (см. рисунок).



Промежуток I. При $t \in [0; 1]$ имеем уравнение
$$-(t-2)-(t-1)=t^2+3.$$
Тогда $t^2 + 2t = 0$, $t = 0$ или $t = -2$, но промежутку $[0; 1]$ принадлежит только $t = 0$.

Промежуток II. При $t \in [1; 2]$ имеем уравнение $-(t-2)+(t-1)=t^2+3$, равносильное уравнению $t^2 = -2$, не имеющему корней. Таким образом, на промежутке $[1; 2]$ корней нет.

Промежуток III. При $t \in [2; +\infty)$ имеем уравнение $(t-2)+(t-1)=t^2+3$, из которого получаем уравнение $t^2 - 2t + 6 = 0$, не имеющее корней. Таким образом, на промежутке $[2; +\infty)$ корней нет.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод, что уравнение (1) имеет только один корень $t = 0$.

Выполняя обратную замену, получаем $\sqrt{x-1}=0$, откуда $x = 1$.

Ответ: 1. ◁

Задача 3 Решите уравнение $\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0$.

Решение

▶ Поскольку $x = 6$ не является корнем данного уравнения, то при делении обеих частей уравнения на $\sqrt[3]{(x-6)^2} \neq 0$ получаем равносильное уравнение

Комментарий

Если выполнить замену $\sqrt[3]{x-6}=u$, $\sqrt[3]{2x+3}=v$, то получим *уравнение* $u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$, *все члены которого имеют одинаковую суммарную степень* — два. Напомним, что такое уравнение *называется*

$$1-3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}+2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2}=0.$$

После замены $t=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$ имеем уравнение $2t^2-3t+1=0$, корни которого

$$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Выполнив обратную замену, получаем:

$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=1$ или $\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=\frac{1}{2}$,

$\frac{2x+3}{x-6}=1$ или $\frac{2x+3}{x-6}=\frac{1}{8}$,

$x=-9$ или $x=-2$.

Ответ: -9; -2. ◁

*однородным** *и решается делением обеих частей на наивысшую степень одной из переменных.* Разделим обе части, например, на u^2 (то есть на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$).

Чтобы при делении на выражение с переменной не потерять корни уравнения, необходимо те значения переменной, при которых это выражение равно нулю, рассмотреть отдельно. В данном уравнении надо подставить значение $x=6$ в исходное уравнение (это можно выполнить устно, а в решение записать только полученный результат). Для реализации полученного плана решения не обязательно вводить переменные u и v, достаточно заметить, что исходное уравнение однородное, разделить обе части на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$, а уже затем ввести новую переменную t.

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие ограничения придется наложить на переменную x, чтобы решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-6$ с помощью равносильных преобразований.
2. Приведите пример однородного иррационального уравнения. Составьте план его решения.

Упражнения

1. Решите иррациональное уравнение с помощью равносильных преобразований:

1) $\sqrt{3x-2}=5-x$; 2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

Решите уравнение **(2–5)**.

2 (МИИТ). 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$; 2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

3. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

4 (МПГУ). 1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

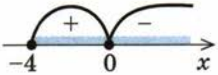
5. 1) $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}$.

---

* В определении однородного уравнения не учитывается член 0, который не имеет степени.

§ 29. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 51

Ориентир	Пример
1. Метод интервалов (для неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)	
1) Найти ОДЗ неравенства. 2) Найти нули функции $f(x)$ ($f(x) = 0$). 3) Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак функции в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ. 4) Записать ответ, учитывая знак неравенства.	$\sqrt{x+4} > x+2.$ ▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+4} - x - 2 > 0.$ Обозначим $f(x) = \sqrt{x+4} - x - 2.$ ОДЗ: $x + 4 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -4$. Нули $f(x)$: $\sqrt{x+4} - x - 2 = 0,$ $\sqrt{x+4} = x+2,$ $x + 4 = x^2 + 4x + 4,$ $x^2 + 3x = 0,$ $x_1 = 0$ — корень, $x_2 = -3$ — посторонний корень. *Ответ:* $[-4;\ 0)$. 
2. Равносильные преобразования	
1) При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного неравенства).	$\sqrt[3]{x+2} < -1.$ ▶ ОДЗ: $\boldsymbol{R}$. Данное неравенство равносильно неравенствам: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 < (-1)^3,$ $x + 2 < -1,$ $x < -3.$ *Ответ:* $(-\infty;\ -3)$. ◁
2) Если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении обеих частей неравенства в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ заданного неравенства).	$\sqrt[4]{2x-6} < 1.$ ▶ ОДЗ: $2x - 6 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 3$. Обе части данного неравенства неотрицательны, следовательно, данное неравенство равносильно (на его ОДЗ) неравенствам: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4 < 1^4,$ $2x - 6 < 1,$ $x < \frac{7}{2}.$ Учитывая ОДЗ, получаем $3 \leqslant x < \frac{7}{2}.$ *Ответ:* $\left[3;\ \frac{7}{2}\right)$. ◁

Продолж. табл. 51

3) **Если на ОДЗ заданного неравенства какая-либо часть неравенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то прежде чем возводить обе части неравенства в четную степень, эти случаи необходимо рассмотреть отдельно.** Например, $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x). \end{cases}$	$\sqrt{x+4} > x+2.$ ▶ Данное неравенствао равносильно совокупности систем: $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2 > (x+2)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2+3x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -2. \end{cases}$ Решив неравенство $x^2 + 3x < 0$, имеем $-3 < x < 0$ (см. рисунок).  Учитывая неравенство $x \geqslant -2$, получаем решение первой системы: $-2 \leqslant x < 0$. Решение второй системы: $-4 \leqslant x < -2$. Объединяя эти решения, получаем ответ. *Ответ:* $[-4; 0)$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Решение иррациональных неравенств методом интервалов. Общая схема решения неравенств методом интервалов объяснена[1] в § 4 раздела 1, а пример применения метода интервалов к решению иррациональных неравенств приведен в таблице 51.

2. Равносильные преобразования иррациональных неравенств. Когда для решения иррациональных неравенств используются равносильные преобразования, то чаще всего с помощью возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень данное неравенство приводится к рациональному неравенству. При этом необходимо иметь в виду следующие свойства:

1) Если обе части неравенства приходится возводить в нечетную степень, то воспользуемся тем, что *числовые неравенства* $A > B$ *и* $A^{2k+1} > B^{2k+1}$ *или одновременно верны, или одновременно неверны.* Тогда каждое решение неравенства
$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$
(которое обращает это неравенство в верное числовое неравенство) будет также и решением неравенства

[1] Напомним, что для решения неравенств методом интервалов мы пользуемся следующим свойством элементарной функции (которое доказывается в курсе математического анализа): *если на интервале* $(a; b)$ *элементарная функции* $f(x)$ *определена и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.*

$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \qquad (2)$$

и, наоборот, каждое решение неравенства (2) будет также и решением неравенства (1), то есть неравенства (1) и (2) — равносильны. Таким образом, **при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного).**

Например,

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)}.$$

2) Аналогично, *если числа A и B неотрицательны* ($A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$), *то числовые неравенства $A > B$ и $A^{2k} > B^{2k}$* также *или одновременно верны, или одновременно неверны*. Повторяя предыдущие рассуждения, имеем: **если обе части неравенства неотрицательные, то при возведении обеих частей неравенства в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного).** Например, рассматривая неравенство

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \qquad (3)$$

на его ОДЗ, где $f(x) \geqslant 0$, замечаем, что для всех решений неравенства (3) левая часть неотрицательна (арифметический корень $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$) и неравенство (3) может выполняться только при условии

$$g(x) > 0. \qquad (4)$$

Если выполняется условие (4), то обе части неравенства (3) неотрицательны и при возведении в четную степень $2k$ получаем неравенство, равносильное данному: $f(x) < g^{2k}(x)$ (при условии, что учитывается ОДЗ данного неравенства и условие (4)). Таким образом,

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}}.$$

3) Если с помощью равносильных преобразований требуется решить неравенство

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \qquad (5)$$

на его ОДЗ, где $f(x) \geqslant 0$, то для правой части этого неравенства рассмотрим два случая: а) $g(x) < 0$; б) $g(x) \geqslant 0$.

а) При $g(x) < 0$ неравенство (5) выполняется для всех x из ОДЗ данного неравенства, то есть при $f(x) \geqslant 0$.

б) При $g(x) \geqslant 0$ обе части неравенства (5) неотрицательны, и при возведении в четную степень $2k$ получаем неравенство, равносильное данному:

$$f(x) > g^{2k}(x). \qquad (6)$$

Отметим, что для всех решений неравенства (6) ограничение ОДЗ данного неравенства $f(x) \geqslant 0$ выполняется автоматически; таким образом, при $g(x) \geqslant 0$ достаточно записать только неравенство (6).

Объединяя полученные результаты, делаем вывод:

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

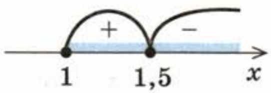
Комментарий

Приведем неравенство к виду $f(x) > 0$ и решим его методом интервалов. Для нахождения нулей функции $f(x)$ используем уравнения-следствия. Чтобы исключить посторонние корни, выполним проверку полученных корней. Для нахождения знака функции $f(x)$ в каждом интервале, как обычно, найдем знак функции в любой точке из этого интервала.

Решение

► Данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$. Обозначим $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$ то есть $x \geqslant 1$.



2. Нули функции $f(x)$: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0$. Тогда

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}, \quad \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2,$$

$$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1} + x - 1 = 2x-1, \quad 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1} = 3.$$

Возводим обе части последнего уравнения в квадрат:

$$4(x+3)(x-1) = 9, \; 4x^2 + 8x - 21 = 0,$$

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ — корень, } x_2 = -\frac{7}{2} \text{ — посторонний корень.}$$

3. Разбиваем ОДЗ точкой 1,5 на два промежутка и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков (см. рисунок).

Ответ: $[1;\ 1{,}5)$. ◁

Задача 2 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2$.

<u>I способ</u> (метод интервалов)

Комментарий

Приведем данное неравенство к виду $f(x) > 0$ и решим его методом интервалов. При нахождении ОДЗ данного неравенства для решения неравенства $\frac{x^3+8}{x} \geqslant 0$ также используем метод интервалов (ОДЗ: $x \neq 0$; $\frac{x^3+8}{x} = 0$ при $x = -2$).

Для нахождения нулей функции $f(x)$ используем уравнения-следствия.

Хотя функция $f(x)$ не имеет нулей, но и в этом случае метод интервалов можно использовать. Только в этом случае интервалы знакопостоянства функции $f(x)$ совпадают с интервалами, из которых состоит ее область определения.

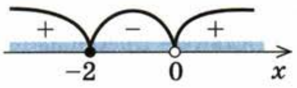
Решение

▶ Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2>0. \qquad (1)$$

Обозначим $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2.$

1. ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ Решим неравенство $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$



методом интервалов (см. рисунок).
Получаем: $x\in(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$.

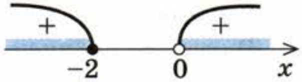
2. Нули функции $f(x)$: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2=0$. Тогда

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}=x-2,\ \ \frac{x^3+8}{x}=x^2-4x+4,\ \ x^3+8=x^3-4x^2+4x,$$

$$4x^2-4x+8=0 \text{ — корней нет } (D<0).$$

3. ОДЗ неравенства (1) разбивается на два промежутка, в которых функция $f(x)$ имеет знаки, указанные на рисунке.

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$. ◁



II способ (равносильные преобразования)

Комментарий

Для решения используем равносильные преобразования (с. 352):

$$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^{2k}(x)\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$$

Чтобы решить полученное промежуточное неравенство $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$, учтем условия, при которых эта дробь будет неотрицательной.

В конце, объединяя полученные решения, записываем ответ.

Решение

▶ $$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \frac{x^3+8}{x}>(x-2)^2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ \frac{x^3+8}{x}>x^2-4x+4\end{cases}$$

или $\begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x} \geqslant 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \dfrac{4x^2-4x+8}{x} > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3+8 \geqslant 0 \\ x>0, \\ x<2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3+8 \leqslant 0, \\ x<0, \\ x<2. \end{cases}$

Учитывая, что $4x^2 - 4x + 8 > 0$ при всех значениях x ($D < 0$ и $a = 4 > 0$), получаем, что последняя совокупность трех систем равносильна совокупности: $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x>0, \\ x<2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x<0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \geqslant 2 \text{ или } 0 < x < 2 \text{ или } x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -2 \text{ или } x > 0.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

Замечание. Записывая приведенное решение, знаки равносильности ($\Leftrightarrow$) можно не ставить, достаточно вначале записать фразу: «Выполним равносильные преобразования данного неравенства».

Задача 3 Решите неравенство

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}} + \sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Комментарий

Замена $\sqrt{3x+5} = t$ позволяет заметить, что каждое выражение, стоящее под знаком внешнего квадратного корня, является квадратом двучлена.

Применяя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, получаем неравенство с модулями, для решения которого используем *план* (см. с. 77):

1) *найти ОДЗ;*
2) *найти нули всех подмодульных функций;*
3) *отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;*
4) *найти решения неравенства в каждом из промежутков.*

Решение

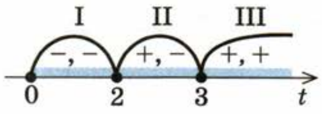
► Пусть $\sqrt{3x+5} = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $3x + 5 = t^2$, $3x = t^2 - 5$.

Получаем неравенство $\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+9-6t} \leqslant 1$, которое можно записать так:

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} \leqslant 1. \text{ Получаем}$$

$$|t-2| + |t-3| \leqslant 1. \qquad (2)$$

1. ОДЗ неравенства (2): $t \in \boldsymbol{R}$, но по смыслу задания это неравенство необходимо решить при $t \geqslant 0$.
2. Нули подмодульных функций: $t = 2$ и $t = 3$.
3. Эти нули разбивают область $t \geqslant 0$ на три промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (см. рисунок).



Промежуток I. При $t \in [0;\ 2]$ имеем неравенство

$-(t-2)-(t-3) \leqslant 1$, из которого получаем $t \geqslant 2$, но промежутку $[0;\ 2]$ принадлежит только $t = 2$.

Промежуток II. При $t \in [2;\ 3]$ имеем неравенство

$(t-2)-(t-3) \leqslant 1$, равносильное неравенству $0 \cdot t \leqslant 0$, которое выполняется при любых значениях t. Таким образом, на промежутке $[2;\ 3]$ решениями неравенства будут все значения t из этого промежутка $(2 \leqslant t \leqslant 3)$.

Промежуток III. При $t \in [3;\ +\infty)$ имеем неравенство

$(t-2)+(t-3) \leqslant 1$, из которого получаем $t \leqslant 3$, но промежутку $[3;\ +\infty)$ принадлежит только значение $t = 3$.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод, что решениями неравенства (2) будут все значения t, такие, что: $2 \leqslant t \leqslant 3$.

Выполняя обратную замену, имеем $2 \leqslant \sqrt{3x+5} \leqslant 3$, откуда $4 \leqslant 3x+5 \leqslant 9$.

Тогда $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right]$. ◁

Вопросы для контроля

1. Назовите основные методы решения иррациональных неравенств.
2. Назовите основные этапы решения иррационального неравенства методом интервалов.
3. Обоснуйте справедливость следующих равносильных преобразований:

1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Упражнения

Решите неравенство (**1–8**).

1 (МГУ, геолог. ф-т). 1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 5-x$.

2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leqslant x^2-1$.

3. 1) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$;

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15} \geqslant 5$.

5. 1) (ННГУ) $\frac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x}+5$; 2) (ВолГУ) $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

6. 1) $\sqrt{\frac{x^3+27}{x}}>x-3;$ 2) (ДВГУ) $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x.$

7* (СПбГУАП). 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\leqslant 2;$

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}>1.$

8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\leqslant 0;$

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\frac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right)\geqslant 0.$

§ 30. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

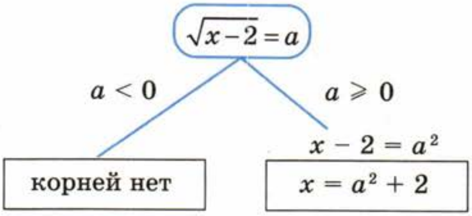
Основные методы и идеи, которые используются при решении задач с параметрами, были рассмотрены в § 7 раздела 1. Как и раньше, при решении задач с параметрами, в которых требуется решить уравнение или неравенство, можно пользоваться ориентиром: *любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Но в том случае, когда какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.*

Также на этапе составления плана решения уравнений или неравенств с параметрами или при проведении рассуждений, связанных с самим решением, часто удобно сопровождать соответствующие рассуждения схемами, по которым легко проследить, в какой момент мы не смогли однозначно выполнить необходимые преобразования, на сколько случаев пришлось разбить решение и чем отличается один случай от другого. Отметим, что уравнения и неравенства с параметрами чаще всего решают с помощью их равносильных преобразований, хотя иногда используются и свойства функций, метод интервалов для решения неравенств и уравнения-следствия.

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{x-2}=a.$

Комментарий

Мы не можем однозначно дать ответ на вопрос, есть ли у данного уравнения корни, и поэтому уже на первом шаге должны разбить решение на два случая: 1) $a<0$ — корней нет; 2) $a\geqslant 0$ — корни есть (см. схему).



При $a\geqslant 0$ имеем простейшее иррациональное уравнение, обе части которого неотрицательны. Поэтому при возведении обеих его частей в квадрат получим уравнение, равносильное данному. ОДЗ данного уравнения можно не записывать, оно учитывается автоматически, потому что для всех корней полученного уравнения $x - 2 = a^2 \geqslant 0$.

Решение

▶ 1) При $a < 0$ уравнение не имеет корней.

2) При $a \geqslant 0$ $x - 2 = a^2$. Тогда $x = a^2 + 2$.

Ответ: 1) если $a < 0$, то корней нет; 2) если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. ◁

Задача 2 Решите уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$.

Решение*

▶ $\sqrt{x+a}=3-\sqrt{x-1}$. (1)

Для всех корней уравнения (1)

$$3-\sqrt{x-1}\geqslant 0. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) равносильно уравнениям:

$$x+a=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2, \quad (3)$$

$$x+a=9-6\sqrt{x-1}+x-1,$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{8-a}{6}. \quad (4)$$

Для всех корней уравнения (4)

$$\frac{8-a}{6}\geqslant 0. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) равносильно уравнению

$$x-1=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \quad (6)$$

Таким образом, $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$.

Комментарий

Используем равносильные преобразования данного уравнения. Для этого необходимо учесть его ОДЗ:

$$\begin{cases} x+a\geqslant 0, & (7)\\ x-1\geqslant 0. & (8)\end{cases}$$

При переносе члена данного уравнения из левой части в правую с противоположным знаком получим равносильное уравнение (1).

Для всех корней уравнения (1) оно является верным числовым равенством. Его левая часть неотрицательна, таким образом, и правая часть должна быть неотрицательной. Тогда далее можно решать уравнение (1) не на всей ОДЗ, а только на той ее части, которая задается условием (2). По этому условию обе части уравнения (1) неотрицательны, таким образом, при возведении обеих его частей в квадрат получим равносильное уравнение (3) (а после равносильных преобразований — уравнение (4)).

Для всех корней уравнения (3) его правая часть неотрицательна, таким образом, и левая часть будет неотрицательной: $x + a \geqslant 0$, но тогда

* В записи решения задач 2–6 синими рамками выделены ограничения, которые пришлось наложить в процессе равносильных преобразований данного уравнения или неравенства.

Учтем ограничения (2) и (5):

$$3-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2}=3-\left|\frac{8-a}{6}\right|.$$

По условию (5) $\frac{8-a}{6}\geqslant 0$, тогда $\left|\frac{8-a}{6}\right|=\frac{8-a}{6}$. Таким образом, условия (2) и (5) задают систему

$$\begin{cases}3-\frac{8-a}{6}\geqslant 0,\\ \frac{8-a}{6}\geqslant 0,\end{cases}\ \text{то есть}\ \begin{cases}a\geqslant -10,\\ a\leqslant 8,\end{cases}$$

тогда $-10\leqslant a\leqslant 8$.

Ответ:

1) при $-10\leqslant a\leqslant 8$ $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$;

2) при $a<-10$ или $a>8$ корней нет.

условие (7) ОДЗ данного уравнения учтено автоматически и его можно не записывать в решение.

Также для всех корней уравнения (4) его левая часть неотрицательна, таким образом, и правая часть должна быть неотрицательной. Поэтому далее можно решать уравнение (4) не на всей ОДЗ, а только на той ее части, которая задается условием (5). Тогда обе части уравнения (4) неотрицательны и после возведения обеих его частей в квадрат получим равносильное уравнение (6).

Для всех корней уравнения (6) его правая часть неотрицательна, таким образом, и левая часть будет неотрицательной: $x-1\geqslant 0$, но тогда и условие (8) ОДЗ данного уравнения учтено автоматически, и поэтому ОДЗ можно не записывать в решение.

Задача 3 Решите уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$.

Решение

Для всех корней данного уравнения

$$x\geqslant 0. \qquad (1)$$

Тогда данное уравнение равносильно уравнениям:

$$a+\sqrt{a+x}=x^2, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a+x}=x^2-a. \qquad (3)$$

Для всех корней уравнения (3)

$$x^2-a\geqslant 0. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (3) равносильно уравнениям:

$$a+x=(x^2-a)^2, \qquad (5)$$

$$a+x=x^4-2ax^2+a^2. \qquad (6)$$

Рассмотрим уравнение (6) как квадратное относительно a:

$$a^2-(2x^2+1)\,a+x^4-x=0.$$

Комментарий

Как и в задаче 2, ОДЗ данного уравнения $\begin{cases}a+\sqrt{a+x}\geqslant 0,\\ a+x\geqslant 0\end{cases}$ будет учтена автоматически при переходе к уравнениям (2) и (5) (для всех корней этих уравнений), таким образом, ее можно не записывать в решении.

Рассуждения при выполнении равносильных преобразований данного уравнения (в уравнения (2, 3, 5, 6) аналогичны соображениям, приведенным в комментарии к задаче 2.

Анализируя уравнение (6) (которое достаточно трудно решить относительно переменной x), пользуемся

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) =$$
$$= 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Тогда $a = \frac{(2x^2 + 1) \pm (2x + 1)}{2}$.

Таким образом,
$a = x^2 + x + 1$ или $a = x^2 - x$. Отсюда

$$x^2 - a + x + 1 = 0 \qquad (7)$$

или

$$x^2 - a = x. \qquad (8)$$

Учитывая условия (1) и (4), получим, что $(x^2 - a) + x + 1 \geqslant 1$, таким образом, уравнение (7) не имеет корней.

Если для корней уравнения (8) выполняется условие (1) ($x \geqslant 0$), то автоматически выполняется и условие (4) ($x^2 - a \geqslant 0$).

Из уравнения (8) получим

$$x^2 - x - a = 0.$$

Это уравнение имеет корни, если $D = 1 + 4a \geqslant 0$, то есть при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Тогда $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Для x_1 условие $x \geqslant 0$ выполняется, таким образом, x_1 — корень данного уравнения при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Учтем условие $x \geqslant 0$ для x_2:
$\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \geqslant 0$, $\sqrt{1 + 4a} \leqslant 1$,

$$0 \leqslant 1 + 4a \leqslant 1, \ -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0.$$

Ответ: 1) при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \ x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2};$$

2) при $a > 0$ $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$;

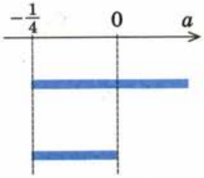
3) при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет. ◁

ориентиром, который условно можно назвать «Ищи квадратный трехчлен», а именно: *пробуем рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или относительно какой-либо функции).* Рассмотрим уравнение (6) как квадратное относительно параметра a. Этот способ эффективно срабатывает только тогда, когда дискриминант полученного квадратного трехчлена является полным квадратом, как в данном случае.

Перед записью ответа удобно изобразить все полученные решения на схеме (как это описано на с. 100).

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$



Из этой схемы видно, что при $a > 0$ в ответ нужно записать только одну формулу (x_1), при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ — две формулы (x_1 и x_2), а при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет.

Задача 4 Решите неравенство $x+4a>5\sqrt{ax}$.

Решение

Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} ax\geqslant 0, \\ x+4a>0, \\ (x+4a)^2>25ax. \end{cases}$ (1)

При $a=0$ получаем систему

$\begin{cases} 0\cdot x\geqslant 0, \\ x>0, \\ x^2>0, \end{cases}$ решение которой: $x>0$.

При $a>0$ получаем систему

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x>-4a, \\ x^2-17ax+16a^2>0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим отдельно неравенство

$$x^2-17ax+16a^2>0.$$

Поскольку $x^2-17ax+16a^2=0$ при $x=a$ и $x=16a$, то при $a>0$ получаем $x<a$ или $x>16a$.

Тогда система (2) имеет решения:

$$0\leqslant x<a \text{ или } x>16a.$$

При $a<0$ получаем систему

$$\begin{cases} x\leqslant 0, \\ x>-4a, \\ x^2-17ax+16a^2>0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) решений не имеет, поскольку при $a<0$ первое и второе неравенства не имеют общих решений.

Ответ: при $a=0$ $x>0$;
при $a>0$ $x\in[0;\ a)\cup(16a;\ +\infty)$;
при $a<0$ решений нет.

Комментарий

Используем равносильные преобразования. Для этого учтем ОДЗ данного неравенства ($ax\geqslant 0$) и то, что правая часть неотрицательна, таким образом, для всех решений данного неравенства его левая часть должна быть положительной ($x+4a>0$). При этом условии (на ОДЗ) обе части данного неравенства неотрицательны, таким образом, при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим равносильное неравенство.

Получаем систему (1).

Для решения неравенства $ax\geqslant 0$ необходимо рассмотреть три случая: $a=0$ (делить на a нельзя); $a>0$ (знак неравенства сохраняется при делении обеих его частей на a); $a<0$ (знак неравенства изменяется).

При $a>0$ значение $-4a<0$, поэтому два первых неравенства системы (2) имеют общее решение $x\geqslant 0$, а для решения неравенства $x^2-17ax+16a^2>0$ можно применить графическую иллюстрацию:

При $a<0$ значение $-4a>0$, поэтому два первых неравенства системы (3) не имеют общих решений, таким образом, и вся система (3) не имеет решений.

Задача 5 Решите неравенство $\sqrt{x-a} > x+1$.

Комментарий

Сначала воспользуемся равносильными преобразованиями (с. 352):

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Если в полученные системы параметр a входит линейно, то в таких случаях иногда бывает удобно выразить параметр через переменную, рассмотреть параметр как функцию от этой переменной и применить графическую иллюстрацию решения неравенств (в системе координат xOa). Отметим, что для изображения решений совокупности неравенств удобно применить две системы координат, в которых оси Ox находятся на одной прямой (и на каждой выделять штриховкой соответствующие решения).

При разных значениях a прямая $a = \text{const}$ или не пересекает заштрихованные области (при $a \geqslant -\frac{3}{4}$), или пересекает их по отрезкам. Абсциссы точек пересечения являются решениями систем (1) и (2), а поэтому и решениями данного неравенства.

Решение

► Данное неравенство равносильно совокупности систем:

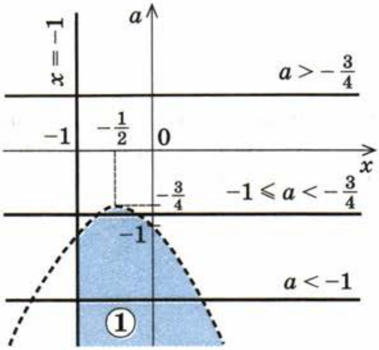
$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$ Тогда

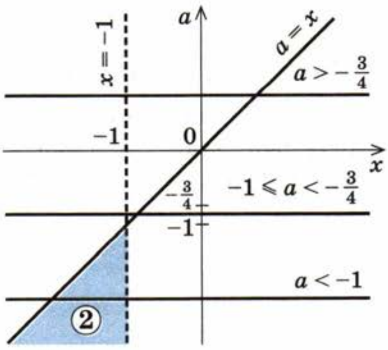
$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

или

$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \quad (2)$$

Изобразим графические решения систем неравенств (1) и (2) в системе координат xOa (на рисунках заштрихованы соответствующие области ① и ②).





Видим, что: 1) при $a \geqslant -\frac{3}{4}$ решений нет (нет заштрихованных точек);

2) если $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$, то прямая a = const пересекает только заштрихованную область ①. Причем полученный интервал ограничен слева и справа ветвями параболы $a = -x^2 - x - 1$. Но в ответ нам необходимо записать x через a. Для этого из уравнения $x^2 + x + a + 1 = 0$ находим x:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a - 1}.$$

Как видим, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a} > -\frac{1}{2}$, то есть $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ — уравнение правой ветви параболы, а $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ — левой. Тогда ответ в этом случае будет:

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a};$$

3) если $a < -1$, то прямая a = const пересекает заштрихованные области ① и ②. Для области ① интервал для x ограничен: слева — прямой $x = -1$, а справа — правой ветвью параболы, то есть $-1 \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. Для области ② интервал для x ограничен слева прямой $x = a$, а справа — прямой $x = -1$, то есть $a \leqslant x < -1$. Объединение этих интервалов можно записать короче:

$$a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}.$$

Ответ: 1) при $a \geqslant -\frac{3}{4}$ — решений нет;

2) при $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$;

3) при $a < -1$ $\quad a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. ◁

Для решения некоторых исследовательских задач с параметрами можно применить свойства квадратного трехчлена и, в частности, условия расположения корней квадратного трехчлена относительно данных чисел (табл. 13, с. 104).

Задача 6 Найдите все значения параметра k, при которых имеет корни уравнение $x+2k\sqrt{x+1}-k+3=0$.

Решение

▶ Замена $\sqrt{x+1}=t$, где $t \geqslant 0$ (тогда $x = t^2 - 1$). Получаем уравнение

$$t^2 + 2kt - k + 2 = 0. \qquad (1)$$

Заданное уравнение будет иметь корни тогда и только тогда, когда уравнение (1) будет иметь хотя бы один неотрицательный корень ($t \geqslant 0$).

Случай $t = 0$ исследуем отдельно.

При $t = 0$ из уравнения (1) имеем $k = 2$. Таким образом, при $k = 2$ уравнение (1) имеет корень $t = 0$. Тогда и данное уравнение имеет корень $x = -1$, то есть $k = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Обозначим $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$.

Уравнение (1) может иметь хотя бы один положительный корень в одном из двух случаев:

1) один корень положительный и один корень отрицательный — для этого необходимо и достаточно выполнения условия $f(0) < 0$;
2) оба корня положительные — для этого необходимо и достаточно выполнения системы условий:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Условие $f(0) < 0$ дает $-k + 2 < 0$, то есть $k > 2$.

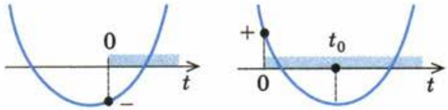
Система (2) дает

$$\begin{cases} -k+2>0, \\ 4k^2-4(-k+2)\geqslant 0, \\ -k>0. \end{cases}$$

Комментарий

Если иррациональное уравнение содержит только один корень, то иногда можно привести такое уравнение к рациональному, обозначив этот корень новой переменной. Поскольку замена является равносильным преобразованием (вместе с обратной заменой), то получаем уравнение, равносильное данному, и поэтому вместо исследования данного уравнения можно исследовать полученное.

При этом следует учитывать, что *после замены переменной иногда изменяется условие задачи,* в частности, для уравнения (1) оно будет таким: найти все значения параметра k, для которых это уравнение имеет хотя бы один неотрицательный корень (тогда после обратной замены мы обязательно найдем корни данного уравнения). Это возможно в одном из трех случаев: или один из корней уравнения (1) равен нулю (этот случай легко исследуется подстановкой $t = 0$ в уравнение (1)), или уравнение (1) имеет один положительный и один отрицательный корни, или имеет два положительных корня. Изобразив соответствующие эскизы графиков функции $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ (см. рисунок), записываем необходимые и достаточные условия такого расположения корней квадратного трехчлена (или используем табл. 13 на с. 104).



Тогда

$$\begin{cases} k<2, \\ k^2+k-2\geqslant 0, \\ k<0. \end{cases} \quad \begin{cases} k<2, \\ k\leqslant -2 \text{ или } k\geqslant 1, \\ k<0. \end{cases}$$

Таким образом, $k \leqslant -2$.

Ответ: $k \leqslant -2$ или $k \geqslant 2$. ◁

Для решения квадратного неравенства $k^2 + k - 2 \geqslant 0$ можно применить графическую иллюстрацию.

В конце необходимо объединить все полученные результаты. Конечно, для получения ответа можно было решить данное уравнение (аналогично задаче 2), а затем дать ответ на вопрос задачи, но такой путь потребует более громоздких вычислений.

Упражнения

1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-a}=2$; 2) $\sqrt{x+2a}=a$; 3) $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$; 4) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

2 (МИФИ). Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x}\geqslant 0$; 2) $x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}$; 3) $\sqrt{4x+a}>x$;

4) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 5) $\sqrt{a^2-x^2}>2-x$.

3 (МАТИ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt{x+2}=2x+a$ имеет корни.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(\sqrt{x}-a\right)\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=0$ имеет только один действительный корень.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2-ax}+2=x$ имеет только один действительный корень.

6 (МГТУ). Определите количество решений системы $\begin{cases} y=a+\sqrt{x}, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 4

1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

2. Вычислите:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1$; 2) $\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$.

Упростите выражение **(3–5)**.

3. 1) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; 2) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

3) (СПбГУНиПТ) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

4. 1) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$; 2) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

5. 1) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$.

Решите уравнение **(6–10)**:

6. 1) $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$; 1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.

7. 1) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$; 2) $\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-3x-5}=6x+5$.

8 (МИИТ). 1) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$; 2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$;

3) (МАИ) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+18-8\sqrt{x+2}}=1$.

9. 1) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$;

3) (МГУИЭ) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5-x}=2$; 4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

10. 1) (МГУ, геогр. ф-т) $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$; 3) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.

Решите систему уравнений **(11–12)**.

11. 1) (ВГУ) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

12. 1) $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Решите неравенство **(13–21)**.

13 (ВолГУ). 1) $\sqrt{3x^2+13}\geqslant 1-2x$; 2) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$;

3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 4) $\sqrt{x^2-x-2}<2x+6$.

14. 1) (МАТИ) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$; 2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

3) (МГТУ) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

15. 1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\leqslant 2$; 2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-1}}\geqslant 3$;

3) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+1}$.

16. 1) (МИИТ) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

17. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+1}\leqslant x^2-9$;

3) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

18. 1) (МГУ, ИСАА) $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$;

3) $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$;

4) $\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>\sqrt{-x+7}-\sqrt{x-5}$.

19 (ВолГУ). 1) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$;

3) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

20. 1) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0$.

21. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\leqslant\dfrac{a}{\sqrt{x}}$ $(a>0)$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{x}}$.

22 (СПбГУТ). Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{4}{3}(x-a)$ при $a=0$ и убедитесь, что множеством его корней является отрезок. При каких значениях a множеством решений данного неравенства является отрезок длиной $\frac{9}{5}$?

23. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $a+\sqrt{x^2+ax}\geqslant x$ не пересекается с промежутком $[-1;\ 0]$?

24. При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ содержится промежуток $\left[\frac{1}{4};1\right]$?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Понятие *степени* возникло в древности. Сохранились глиняные плитки древних вавилонян (около 1700 г. до н. э.), которые содержат записи таблиц квадратов и кубов и их обратных значений. К умножению равных множителей приводит решение многих задач. Выражение *квадрат числа* возникло вследствие вычисления площади квадрата, а *куб числа* — вследствие нахождения объема куба. Но современные обозначения (типа a^4, a^5) введены в XVII в. Р. Декартом (1596—1650).

Дробные показатели степени и простейшие правила действий над степенями с дробными показателями встречаются в XIV в. у французского математика Н. Орема (ок. 1323—1382). Известно, что Н. Шюке (ок. 1445—ок. 1500) рассматривал степени с отрицательными и нулевым показателями.

С. Стевин предложил понимать под $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$. Но систематически дробные и отрицательные показатели первым стал применять И. Ньютон (1643—1727).

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) ввел обозначение $a^0 = 1$, если $a \neq 0$, и название *показатель* (это перевод с немецкого *Exponent*). Немецкое potenzieren означает *возвести в степень*. (Отсюда происходит и слово *потенцировать*, которое будет применяться в следующем разделе для обозначения переходов от так называемых логарифмов (log) выражений $f(x)$ и $g(x)$ к соответствующим степеням, то есть от равенства $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к равенству $a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)}$. В свою очередь, термин *exponenten* возник вследствие не совсем точного перевода с греческого слова, которым Диофант Александрийский (около III в.) обозначал квадрат неизвестной величины.

Термины *радикал* и *корень*, введенные в XII в., происходят от латинского *radix*, которое имеет два значения: *сторона и корень*. Греческие математики вместо «взять корень» говорили «найти сторону квадрата по его данной величине (площади)». Знак корня в виде символа $\sqrt{}$ появился впервые в 1525 г. Современный символ введен Декартом, который добавил горизонтальную черту. Ньютон уже обозначил показатели корней: $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$.

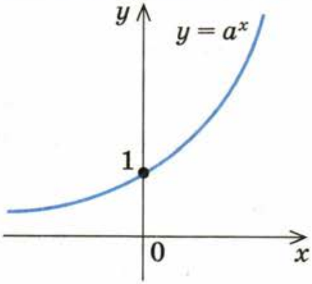
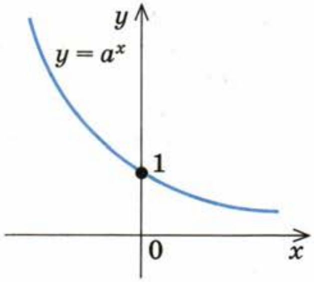
Термин *логарифм*, который рассматривается в следующем разделе, происходит от сочетания греческих слов «логос» (в значении «отношение») и «аритмос» (число) и переводится как *отношение чисел*. Выбор изобретателем логарифмов Дж. Непером такого названия (1594 г.) поясняется тем, что логарифмы возникли вследствие сопоставления двух чисел, одно из которых является членом арифметической прогрессии, а второе — геометрической. Логарифмы по основанию e ввел Спейдел (1619 г.), который составил первые таблицы для функции $\ln x$. Название *натуральный* (естественный) для этого логарифма предложил Н. Меркатор (1620—1687), который выяснил, что $\ln x$ — это площадь под гиперболой $y = \frac{1}{x}$.

Раздел

5 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 31. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Таблица 52

1. Понятие показательной функции и ее график	
Определение. ***Показательной функцией* называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.**	
График показательной функции (экспонента)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	
2. Свойства показательной функции	

1. *Область определения:* $\boldsymbol{R}$. $\boxed{D(a^x) = \boldsymbol{R}}$
2. *Область значений:* $y > 0$. $\boxed{E(a^x) = (0; +\infty)}$
3. *Функция* ***ни четная, ни нечетная.***
4. *Точки пересечения с осями координат:*

с осью Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}}$ с осью Ox $\boxed{\text{нет}}$

5. *Промежутки возрастания и убывания:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает на всей области определения	**функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей области определения**

6. *Промежутки знакопостоянства:* $\boxed{y > 0 \text{ при всех значениях } x \in \boldsymbol{R}}$

Продолж. табл. 52

7. $\boxed{\textit{Наибольшего и наименьшего значений } \text{функция не имеет}}$.

8. *Для любых действительных значений* u и v ($a > 0$, $b > 0$) *выполняются равенства:*

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v} \qquad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

$$(ab)^u = a^u b^u \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Объяснение и обоснование

1. Понятие показательной функции и ее график. *Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.*

Например, $y = 2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$ — показательные функции.

Отметим, что функция вида $y = a^x$ существует и при $a = 1$.

Тогда $y = a^x = 1^x$, то есть $y = 1$ при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$. Но в этом случае функция $y = 1^x$ не называется показательной. (График функции $y = 1^x$ — прямая, изображенная на рис. 132.)

Поскольку при $a > 0$ выражение a^x определено при всех действительных значениях x (как отмечалось в § 27, в курсе математического анализа доказывается, что для любого фиксированного числа $a > 0$ и любого действительного числа α существует и притом единственное число y, равное a^α), то *областью определения показательной функции $y = a^x$ являются все действительные числа.*

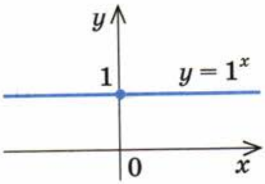


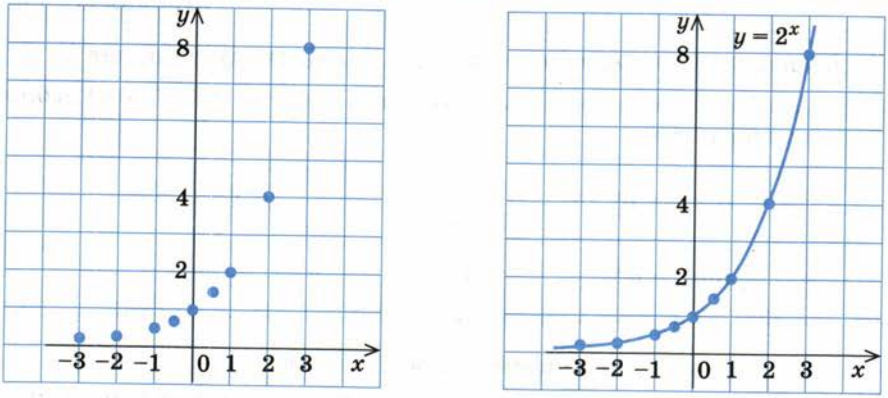
Рис. 132

Попытаемся сначала построить графики некоторых показательных функций, например $y = 2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ «по точкам», а затем перейдем к характеристике общих свойств показательной функции.

Составим таблицу некоторых значений функции $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	2	4	8

Построим на координатной плоскости соответствующие точки (рис. 133, *а*) и соединим эти точки плавной линией, которую естественно считать графиком функции $y = 2^x$ (рис. 133, *б*).



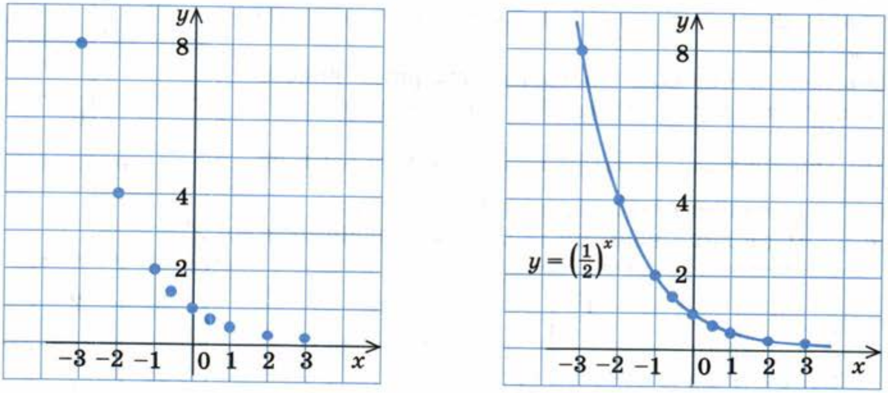
а *б*

Рис. 133

Как видим из графика, функция $y = 2^x$ является возрастающей функцией, которая принимает все значения на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично составим таблицу некоторых значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



а *б*

Рис. 134

Построим на координатной плоскости соответствующие точки (рис. 134, *а*) и соединим эти точки плавной линией, которую естественно считать графиком функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 134, *б*). Как видим из графика, функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ является убывающей функцией, которая принимает все значения на промежутке $(0; +\infty)$.

Заметим, что график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можно получить из графика функции $y = f(x) = 2^x$ с помощью геометрических преобразований. Действительно, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$. Таким образом, график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричен графику функции $y=2^x$ относительно оси Oy (табл. 5, с. 35), и поэтому, если функция $y = 2^x$ является возрастающей, функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обязательно будет убывающей.

Оказывается, что всегда при $a > 1$ график функции $y = a^x$ похож на график функции $y = 2^x$, а при $0 < a < 1$ — на график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 135).

График показательной функции называется *экспонентой*.

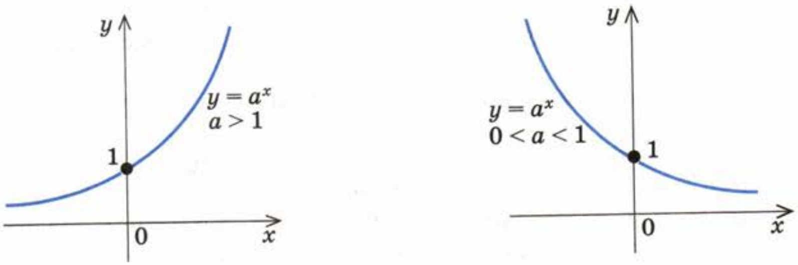


Рис. 135

2. Свойства показательной функции. Как было указано выше, *областью определения показательной* функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *являются все действительные числа*: $D(a^x) = \mathbf{R}$.

В курсе математического анализа доказывается, что *областью значений* функции $y = a^x$ является множество всех положительных чисел, иначе говоря *функция $y = a^x$ принимает только положительные значения*, причем любое положительное число является значением функции, то есть

$$E(a^x) = (0; +\infty).$$

Это означает, что график показательной функции $y = a^x$ всегда расположен выше оси Ox и любая прямая, которая параллельна оси Ox и находится выше нее, пересекает этот график.

При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает на всей области определения, а при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ убывает на всей области определения.

Обоснование области значений и промежутков возрастания и убывания показательной функции проводится так: эти свойства проверяются последовательно для натуральных, целых, рациональных показателей, а затем уже переносятся на любые действительные показатели. Следует учесть, что при введении понятия степени с иррациональным показателем мы уже пользовались возрастанием функции, когда проводили такие рассуждения: поскольку $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, то $2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$. Таким образом, в нашей системе изложения материала мы можем обосновать эти свойства только для рациональных показателей, но, учитывая громоздкость таких обоснований, примем их без доказательства. Все остальные свойства показательной функции легко обосновываются с помощью этих свойств.

Функция $y = a^x$ *не является ни четной, ни нечетной*, поскольку $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq f(x) = a^x$ (по определению $a \neq 1$). Также $f(-x) \neq -f(x)$, поскольку $f(-x) = a^{-x} > 0$ (по свойству 1), а $-f(x) = -a^x < 0$.

Точки пересечения с осями координат. **График функции $y = a^x$ пересекает ось Oy в точке $y = 1$.** Действительно, на оси Oy значение $x = 0$, тогда $y = a^0 = 1$.

График показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не пересекает ось Ox, поскольку на оси Ox $y = 0$, но значение $y = 0$ не принадлежит области значений показательной функции $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ только при $a = 0$, хотя по определению $a > 0$).

Промежутки знакопостоянства. $y > 0$ при всех действительных значениях x, поскольку $y = a^x > 0$ при $a > 0$.

Отметим еще одно свойство показательной функции. Поскольку график функции $y = a^x$ пересекает ось Oy в точке $y = 1$, то, учитывая возрастание функции при $a > 1$ и убывание при $0 < a < 1$, получаем следующие соотношения между значениями функции и соответствующими значениями аргумента:

Значение функции	Значение аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 1$	$x \in (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0)$
$0 < y < 1$	$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; +\infty)$

Функция $y = a^x$ *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений*, поскольку ее область значений — промежуток $(0; +\infty)$, который не содержит ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Свойства показательной функции, приведенные в пункте 8 таблицы 52:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v};\ \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v};\ (a^u)^v = a^{uv};\ (ab)^u = a^u b^u;\ \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u},$$

для рациональных показателей были обоснованы в разделе 3, а для произвольных действительных показателей примем их без доказательства.

Отметим еще одно свойство показательной функции, которое выделяет ее из ряда других функций: *если* $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, *то при любых действительных значениях аргументов* x_1 *и* x_2 *выполняется равенство*

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2).}$$

Действительно, $f(x_1) \cdot f(x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} = f(x_1 + x_2)$.

В курсах высшей математики это свойство (вместе со строгой монотонностью) является основой аксиоматического определения показательной функции. В этом случае дается определение, что *показательная функция* $y = f(x)$ *— это строго монотонная функция, определенная на всей числовой оси, которая удовлетворяет функциональному уравнению* $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, а затем обосновывается, что функция $f(x)$ совпадает с функцией $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Кроме общих свойств показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, отметим некоторые особенности поведения графиков показательных функций при конкретных значениях a. Так, на рисунке 136 приведены графики показательных функций $y = a^x$ при значениях основания $a = 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$.

Сравнивая эти графики, можно сделать вывод: *чем больше основание* $a > 1$, *тем круче поднимается график функции* $y = a^x$ *при движении точки вправо и тем быстрее график приближается к оси Ох при движении точки влево. Аналогично, чем меньше основание* $0 < a < 1$, *тем круче поднимается график функции* $y = a^x$ *при движении точки влево и тем быстрее график приближается к оси Ох при движении точки вправо.*

Заканчивая разговор о показательной функции, укажем причины, которые мешают рассматривать показательные функции с отрицательным или нулевым основанием.

Отметим, что выражение a^x можно рассматривать и при $a = 0$, и при $a < 0$. Но в этих случаях оно уже будет определено не при всех действительных значениях x, как показательная функция $y = a^x$. В частности, выражение 0^x определено при всех $x > 0$ (и тогда $0^x = 0$), а выражение $(-2)^x$ — при всех целых значениях x (например, $\left((-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}\right)$. По этой причине не берут основание показательной функции $a = 0$ (получаем постоянную функцию при $x > 0$) и $a < 0$ (получаем функцию, определенную только при достаточно «редких» значениях x: $x \in \mathbf{Z}$). Приведенные рассуждения относительно целесообразности выбора основания показательной функции не влияют на область допустимых значений выражения a^x (например, как мы видели выше, пара значений $a = -2$, $x = -3$ принадлежит его ОДЗ, и это приходится учитывать при решении некоторых задач).

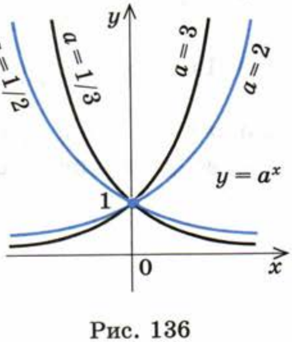


Рис. 136

Примеры решения задач

Задача 1 Сравните значения выражений:

$$1)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \text{ и } \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}; \quad 2)\ \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4} \text{ и } \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}.$$

Решение

1) ▶ Функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ является убывающей $\left(\frac{2}{3}<1\right)$, поэтому из неравенства $-3>-5$ получаем $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ◁

2) ▶ Функция $y=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^x$ является возрастающей $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}>1\right)$, поэтому из неравенства $4>3$ получаем

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}>\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}. ◁$$

Комментарий

Учтем, что функция $y=a^x$ при $a>1$ является возрастающей, а при $0<a<1$ — убывающей. Поэтому сначала сравним данное основание a с единицей, а затем, сравнивая аргументы, сделаем вывод о соотношении между данными значениями функции.

Задача 2 Сравните с единицей положительное основание a, если известно, что выполняется неравенство:

$$1)\ a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}; \qquad 2)\ a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}.$$

Решение

1) ▶Поскольку $\sqrt{5}<\sqrt{11}$ и по условию $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$, то функция a^x является убывающей, следовательно,

$$0<a<1. ◁$$

2) ▶Поскольку $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$ и по условию $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$, то функция a^x является возрастающей, следовательно, $a>1$. ◁

Комментарий

В каждом задании данные выражения — это два значения функции a^x.

Проанализируем, какое значение функции соответствует большему значению аргумента (для этого сначала сравним аргументы).

Если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция a^x является возрастающей и $a>1$. Если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция a^x является убывающей, и тогда $0<a<1$.

Задача 3 Постройте график функции:

1) $y = 1{,}7^x$; 2) $y = 0{,}3^x$.

Комментарий

При $a > 0$ значение $a^x > 0$, следовательно, график функции $y = a^x$ всегда расположен выше оси Ox. Этот график пересекает ось Oy в точке $y = 1$ $(a^0 = 1)$.

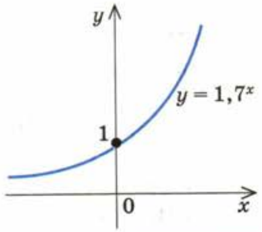
При $a > 1$ показательная функция ($y = 1{,}7^x$) возрастает, следовательно, ее графиком будет кривая (экспонента), точки которой при увеличении аргумента поднимаются.

При $0 < a < 1$ показательная функция ($y = 0{,}3^x$) убывает, следовательно, графиком функции $y = a^x$ будет кривая, точки которой при увеличении аргумента опускаются. (Напомним, что, опускаясь вниз, график приближается к оси Ox, но никогда ее не пересекает.)

Чтобы уточнить поведение графиков данных функций, найдем координаты нескольких дополнительных точек.

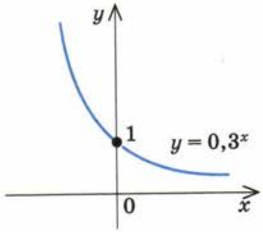
Решение

1) ▶ $y = 1{,}7^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	$1{,}7$	$2{,}89$

2) ▶ $y = 0{,}3^x$



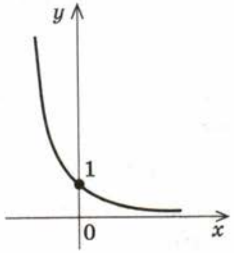
x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	$0{,}3$	$0{,}09$

Задача 4* Изобразите схематически график функции $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 3\right|$.

Решение

▶ Последовательно строим графики:

1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

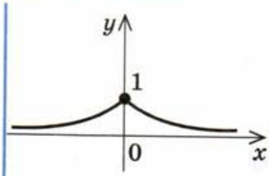


Комментарий

Составим план построения графика данной функции с помощью последовательных геометрических преобразований (табл. 5 на с. 35).

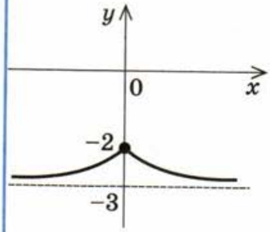
1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (основание $a = \frac{1}{3} < 1$ — показательная функция убывает).

2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$;



2. Затем можно построить график функции $y=g\,(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|\,x\,|)$: справа от оси Oy (и на самой оси) график функции $y=f\,(x)$ остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.

3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$;

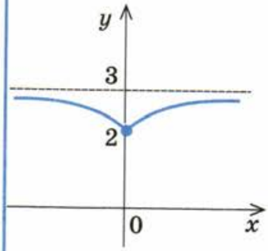


3. После этого можно построить график функции

$$y=\varphi\,(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g\,(x)-3:$$

параллельно перенести график $g\,(x)$ вдоль оси Oy на (-3) единицы.

4. $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$.



4. Затем можно построить график данной функции

$$y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi\,(x)|:$$

выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y=\varphi\,(x)$ должен остаться без изменений (но таких точек у графика функции $y=\varphi\,(x)$ нет, а ниже оси Ox — график функции $y=\varphi\,(x)$ необходимо отобразить симметрично относительно оси Ox).

Вопросы для контроля

1. Дайте определение показательной функции.
2. Постройте графики показательной функции $y=a^x$ при $a>1$ и при $0<a<1$ (выберите конкретные значения a). Через какую точку проходят графики всех показательных функций?
3. Пользуясь графиком показательной функции $y=a^x$ (при $a>1$ и при $0<a<1$), охарактеризуйте ее свойства.

4*. Обоснуйте свойства функции $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$).

5. Используя возрастание или убывание соответствующей показательной функции, сравните значения: а) 7^5 и 7^9; б) $0{,}7^5$ и $0{,}7^9$.

Упражнения

1. Укажите, какие из данных функций возрастают, а какие убывают:

1°) $y = 4^x$; 2°) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; 3°) $y = \sqrt{3}^x$; 4°) $y = \pi^x$; 5) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$;

6*) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$; 7*) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; 8*) $y = 2^{-x}$; 9*) $y = -5^x$.

2°. Постройте график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = 0{,}2^x$; 4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = 0{,}7^x$.

3. Зная, что $a > b > 1$, изобразите схематически в одной системе координат графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$.

4. Найдите область значений функции:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = -5^x$; 3) $y = 7^x - 2$; 4) $y = -\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

5. Постройте график функции:

1°) $y = -3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3$; 3*) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4*) $y = 5^{|x|}$; 5*) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$.

6. Сравните значения выражений:

1°) $3^{1,5}$ и $3^{1,4}$; 2°) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,3}$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,8}$; 3°) $0{,}78^{-0,7}$ и $0{,}78^{-0,6}$;

4) $(\sqrt{2})^{-3}$ и $(\sqrt{2})^{-5}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ и $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ и $2^{\sqrt{3}}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8$ и $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^5$;

10) $0{,}2^{-10}$ и 5^{11}.

7. Сравните показатели m и n, если известно, что верно неравенство:

1) $3{,}2^m < 3{,}2^n$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$; 3) $\left(\frac{7}{6}\right)^m > \left(\frac{7}{6}\right)^n$; 4) $0{,}99^m < 0{,}99^n$;

5) $(\sqrt{2})^m > (\sqrt{2})^n$; 6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$; 7) $(\sqrt{5} - 1)^m < (\sqrt{5} - 1)^n$;

8) $(\sqrt{2} - 1)^m < (\sqrt{2} - 1)^n$.

8. Сравните с единицей положительное основание a, если известно, что верно неравенство:

1) $a^{100} > a^{99}$; 2) $a^{0,2} < a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{7}}$;

4) $a^{\sqrt{17}} > a^4$; 5) $a^{-\frac{1}{17}} < a^{-\frac{1}{8}}$; 6) $a^{-0,25} > a^{-\sqrt{3}}$.

9. Сравните с единицей значение выражения:

1) $0{,}01^{1,2}$; 2) $0{,}99^{100}$; 3) $\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

5) $0{,}007^0$; 6) $100^{-0{,}01}$; 7) $3^{-\sqrt{2}}$; 8) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

10. Какой вывод можно сделать о знаке числа x, если:

1) $3^x = 0{,}6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$; 3) $10^x = 4$; 4) $0{,}3^x = 0{,}1$?

11. Расположите числа в порядке их возрастания:

1) $2^{\frac{1}{3}},\ 2^{-1{,}5},\ 2^{\sqrt{2}},\ 2^{-\sqrt{2}},\ 2^{1{,}4},\ 1$;

2) $0{,}3^9,\ 1,\ 0{,}3^{-\sqrt{5}},\ 0{,}3^{\frac{1}{2}},\ 0{,}3^{-9},\ 0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

12*. Известно, что когда при радиоактивном распаде количество вещества за сутки уменьшается вдвое, то через x суток от массы M_0 остается масса M, которая вычисляется по формуле $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Отсюда $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (где $x > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$) Покажите графически, как с изменением x изменяется отношение $\frac{M}{M_0}$.

Используя в случае необходимости построенный график, дайте ответы (точные или приближенные) на вопросы:

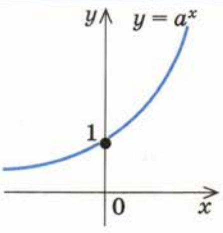
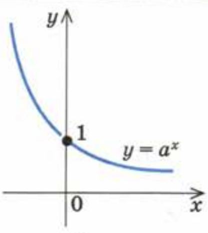
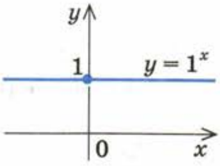
а) Во сколько раз уменьшится масса радиоактивного вещества через 1,5 суток; 2,5 суток; 3 суток; 4 суток?

б) Сколько времени должно пройти, чтобы начальная масса радиоактивного вещества уменьшилась в 2,5 раза; в 3 раза; в 4 раза?

§ 32. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

32.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Таблица 53

<table>
<tr><td colspan="4">1. Основные формулы и соотношения</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$
$(ab)^u = a^u \cdot b^u$
$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$
$(a^u)^v = a^{uv}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$</td><td colspan="3">График функции $y = a^x$ $(a > 0)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td><td>$a = 1$</td></tr>
<tr><td>
возрастает</td><td>
убывает</td><td>
постоянная</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 53

2. Схема равносильных преобразований простейших показательных уравнений		
Ориентир	Пример	
При $a > 0$ и $a \neq 1$ $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$	$3^{2x+4} = 9$. ▶ $3^{2x+4} = 3^2$, $2x + 4 = 2$, $x = -1$. *Ответ:* -1. ◁	$6^{x+3} = -36$. ▶ **Корней нет** (поскольку $6^t > 0$ для всех t) *Ответ:* **корней нет.** ◁

3. Приведение некоторых показательных уравнений к простейшим	
Ориентир	Пример
1) ***Если в левой и правой частях показательного уравнения стоят только произведения, частные, корни или степени, то целесообразно с помощью основных формул попробовать записать обе части уравнения как степени с одним основанием.***	$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}$. ▶ $2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}$, $2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2} - 4x}$, $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x$, $x = \frac{1}{2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$. ◁
2) ***Если в одной части показательного уравнения стоит число, а в другой все члены содержат выражение вида a^{kx} (показатели степеней отличаются только свободными членами), то удобно в этой части уравнения вынести за скобки наименьшую степень a.***	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$. ▶ $5^{x-2}(5^2 - 2) = 23$, $5^{x-2} \cdot 23 = 23$, $5^{x-2} = 1$, $5^{x-2} = 5^0$, $x - 2 = 0$, $x = 2$. **Ответ:** 2. ◁

Объяснение и обоснование

Показательными уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная входит в показатель степени (а основание этой степени не содержит переменной).

Рассмотрим простейшее показательное уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$. Поскольку при этих значениях a функция $y = a^x$ строго монотонна (возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$), то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Это означает, что **уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет единственный корень.** Чтобы его найти, достаточно представить b в виде $b = a^c$.

Очевидно, что $x = c$ является корнем уравнения $a^x = a^c$.

Графически это проиллюстрировано на рисунке 137.

Рис. 137

Например, чтобы решить уравнение $7^x = 49$, достаточно представить это уравнение в виде $7^x = 7^2$ и записать его единственный корень $x = 2$.

Если $b \leqslant 0$, то уравнение $a^x = b$ (при $a > 0$) корней не имеет, поскольку a^x всегда больше нуля. (На графиках, приведенных на рисунке 138, прямая $y = b$ не пересекает график функции $y = a^x$ при $b \leqslant 0$.)

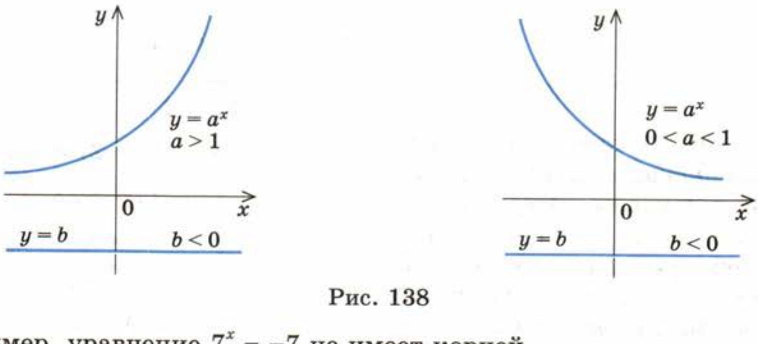


Рис. 138

Например, уравнение $7^x = -7$ не имеет корней.

Обобщая приведенные выше рассуждения относительно решения простейших показательных уравнений, отметим, что **при $a > 0$ и $a \neq 1$ уравнение вида**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{2}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

Коротко это утверждение можно записать так: **при $a > 0$ и $a \neq 1$**

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).}$$

Чтобы обосновать равносильность этих уравнений, достаточно заметить, что равенства (2) и (3) могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = a^t$ является строго монотонной и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента t (то есть из равенства степеней (2) обязательно вытекает равенство показателей (3)). Таким образом, все корни уравнения (2) (которые обращают это уравнение в верное равенство) будут корнями и уравнения (3), и наоборот, все корни уравнения (3) будут корнями уравнения (2). А это и означает, что уравнения (2) и (3) равносильны.

В простейших случаях при решении показательных уравнений пытаются с помощью основных формул действий над степенями (см. таблицу 48) привести (если это возможно) данное уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для решения более сложных показательных уравнений чаще всего используют замену переменных (применение этого метода рассмотрено в табл. 54, с. 384) или свойства соответствующих функций (применение этих методов рассмотрено в табл. 61, с. 443).

Заметим, что все равносильные преобразования уравнения всегда выполняются на его области допустимых значений (то есть на общей области определения для всех функций, входящих в запись этого уравнения). Но в показательных уравнениях чаще всего областью допустимых значений (ОДЗ) является множество всех действительных чисел. В этих случаях, как правило, ОДЗ явно не находят и не записывают в решении уравнения (см. ниже задачи 1–3). Но если в ходе решения показательных уравнений равносильные преобразования выполняются не на всем множестве действительных чисел, то в этом случае приходится вспоминать об ОДЗ (задача 4* на с. 383).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Решение

1) ▶ $4^x = 64$, $4^x = 4^3$, $x = 3$; ◁

2) ▶ $5^x = -1$ — корней нет, поскольку $5^x > 0$ всегда; ◁

3) ▶ $12^{x^2-4} = 1$, $12^{x^2-4} = 12^0$, $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$. ◁

Комментарий

При $a > 0$ всегда $a^x > 0$, поэтому уравнение $5^x = -1$ не имеет корней.

Другие уравнения приведем к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) и перейдем к равносильному уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Задача 2 Решите уравнение:

$$1)\ \frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot(0,04)^{x-2};\quad 2)\ 2^x\cdot 3^x=\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}.$$

Решение

1) ► Данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\frac{\left(5^{-1}\right)^{x-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}}=5\cdot\left(5^{-2}\right)^{x-2}$$

$$\frac{5^{-x+0,5}}{5^{\frac{1}{2}}}=5^1\cdot5^{-2x+4},$$

$$5^{-x+0,5-\frac{1}{2}}=5^{1+(-2x+4)},$$

$$5^{-x}=5^{5-2x},$$

$$-x=5-2x,$$

$$x=5.$$

Ответ: 5. ◁

2) ► Данное уравнение равносильно уравнениям:

$$(2\cdot3)^x=(6^{-1})^{2x-3},$$

$$6^x=6^{-2x+3},$$

$$x=-2x+3,$$

$$x=1.$$

Ответ: 1. ◁

Комментарий

В левой и правой частях данных уравнений стоят только произведения, частные, корни или степени. В этом случае для приведения уравнения к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ попробуем применить основные формулы действий над степенями, чтобы записать обе части уравнения как степени с одним основанием.

В уравнении 1 следует обратить внимание на то, что $0,2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=5^{-1}$, а $0,04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=5^{-2}$ и $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, таким образом, левую и правую части этого уравнения можно записать как степени числа 5.

Для преобразования уравнения 2 напомним, что все формулы можно применять как слева направо, так и справа налево. Например, для левой части этого уравнения воспользуемся формулой $a^u\cdot b^u=(ab)^u$, то есть запишем $2^x\cdot3^x=(2\cdot3)^x=6^x$.

Задача 3 Решите уравнение $3^{2x+2}+5\cdot3^{2x-2}=86$.

Решение

► Данное уравнение равносильно уравнениям:

$$3^{2x-2}(3^4+5)=86,$$

$$3^{2x-2}\cdot86=86,$$

$$3^{2x-2}=1,$$

$$3^{2x-2}=3^0,$$

$$2x-2=0,$$

$$x=1.$$

Ответ: 1. ◁

Комментарий

В левой части уравнения все члены содержат выражения вида 3^{2x} (показатели степеней отличаются только свободными членами). В этом случае в левой части уравнения удобно вынести за скобки наименьшую степень числа 3, то есть 3^{2x-2}.

Задача 4* Решите уравнение $(1+b^2)^{\sqrt{x}}=(1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

Решение

▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$, любое $b \in \boldsymbol{R}$.

Рассмотрим два случая.

1) При $b=0$ получаем уравнение $1^{\sqrt{x}}=1^{4-\sqrt{x}}$, корни которого — все действительные числа из ОДЗ, то есть $x \geqslant 0$.

2) При $b \neq 0$ значение $1+b^2 \neq 1$, и тогда данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x}=4-\sqrt{x}.$$

Отсюда $\sqrt{x}=2$, тогда $x=4$.

Ответ: 1) при $b=0$ $x \in [0;+\infty)$;

2) при $b \neq 0$ $x=4$. ◁

Комментарий

Это уравнение относительно переменной x, которое содержит параметр b. Анализируя основания степеней в уравнении, делаем вывод, что при любых значениях b основание $1+b^2 \geqslant 1$. Функция $y=a^x$ при $a>1$ является возрастающей, а при $a=1$— постоянной (см. графики функции $y=a^x$ в табл. 52).

Основание $1+b^2=1$ при $b=0$, а при всех других значениях b основание

$$1+b^2>1.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно, то есть: $b=0$ и $b \neq 0$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях показательное уравнение $a^x=b$ (где $a>0$ и $a \neq 1$) имеет корни. В каких случаях это уравнение не имеет корней? Приведите примеры. Проиллюстрируйте эти примеры графически.
2. Какому уравнению равносильно показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ при $a>0$ и $a \neq 1$? Приведите примеры.

3*. Изменится ли ответ на вопрос 2, если для основания степеней будет дано только одно ограничение $a>0$?

Упражнения

Решите уравнение (1–5).

1. 1°) $4^x=8$; 2°) $3^x=9^{x+1}$; 3°) $5^{3x-1}=0{,}2$; 4°) $7^{1-4x}=1$; 5°) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}=\sqrt[4]{2}$;

6°) $3^{x^2-4x}=9$; 7) $4^x=2^{6+x-x^2}$; 8) $2^{2^x}=2$; 9°) $2^x=4$; 10°) $2^x=16$;

11°) $3^x=-1$; 12°) $2^x=32$; 13°) $3^x=0$; 14°) $5^x=1$; 15) $3^x-3=0$;

16) $3^{2x}=81$; 17°) $2^{3x}=8$; 18) $3^{x^2-5x+8}=9$; 19) $7^x=7^{2-x}$; 20) $25^x=5^{3-x}$;

21*) $2^x \cdot 3^{x+1}=108$; 22*) $3^x \cdot 5^{2x-3}=45$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x=\frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^x=\frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$.

3. 1) $2^{x^2}=\frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}}=4^{-x}\cdot 8^{-4}$ 3) $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$;

4) $\frac{3^{x^2}}{27}=9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}\cdot 4^x$.

4. 1°) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$; 2°) $2\cdot 3^{x+1}-3^x=15$; 3°) $4^{x+1}+4^x=320$;

4°) $3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77$; 5°) $3^{x+2}-2\cdot 3^{x-2}=79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4{,}8$;

7) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=162$; 8) $5\cdot 9^x+9^{x-2}=406$.

5*. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2x-3}=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{x+5}$; 2) $(1+|a|)^x=(1+|a|)^{2-x}$;

3) $\left(1+\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\sqrt{a}\right)^{6-\frac{2}{x}}$.

32.2. РЕШЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Таблица 54

Схема поиска плана решения показательных уравнений	
Ориентир	Пример
1. **Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней** (используя справа налево основные формулы действий над степенями, приведенные в табл. 53).	$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0$. ► $4^x\cdot 4^1-3\cdot 2^x-10=0$. Учитывая, что $4^x=2^{2x}$, приводим все степени к одному основанию 2: $4\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-10=0$.
2. **Если возможно, приводим все степени (с переменной в показателе) к одному основанию** *и выполняем замену переменной.*	*Замена* $2^x=t$ дает уравнение $4t^2-3t-10=0$, $t_1=2$, $t_2=-\frac{5}{4}$. Обратная замена дает $2^x=2$, тогда $x=1$ или $2^x=-\frac{5}{4}$ — корней нет. *Ответ:* 1. ◁
3. Если нельзя привести к одному основанию, то пытаемся привести все степени **к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение** (*которое решается делением обеих частей уравнения на наибольшую степень одного из видов переменных*).	$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0$. ► Приведем все степени к основаниям 2 и 3: $2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0$. Имеем однородное уранение (у всех членов одинаковая суммарная степень — $2x$). Для его решения разделим обе части на $3^{2x}\neq 0$:

Продолж. табл. 53

	$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0.$$ *Замена* $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$ дает уравнение $t^2+3t-4=0,\ t_1=1,\ t_2=-4.$ Обратная замена дает $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=-4$ — корней нет или $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1,$ тогда $x=0.$ *Ответ:* 0. ◁
4. В других случаях **переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем разложить полученное уравнение на множители** или применяем специальные приемы решения, в которых **используются свойства соответствующих функций.**	$$6^x-9\cdot2^x-2\cdot3^x+18=0.$$ ▶ Если попарно сгруппировать члены в левой части уравнения и в каждой паре вынести за скобки общий множитель, то получаем $$2^x(3^x-9)-2(3^x-9)=0.$$ Теперь можно вынести за скобки общий множитель 3^x-9: $$(3^x-9)\cdot(2^x-2)=0.$$ Тогда $3^x-9=0$ или $2^x-2=0.$ Получаем два уравнения: 1) $3^x=9$, тогда $x=2$; 2) $2^x=2$, тогда $x=1$. *Ответ:* 2; 1. ◁

Объяснение и обоснование

Для решения более сложных показательных уравнений (в сравнении с теми, которые были рассмотрены в предыдущем пункте 32) чаще всего используют замену переменных. Чтобы сориентироваться, можно ли ввести замену переменных в данном показательном уравнении, часто бывает полезно в начале решения *избавиться от числовых слагаемых в показателях степеней,* используя формулы: $a^{u+v}=a^u\cdot a^v$; $a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$. Например, в уравнении

$$4^{x+1}-3\cdot2^x-10=0 \tag{1}$$

вместо 4^{x+1} записываем произведение $4^x\cdot4^1$ и получаем уравнение

$$4^x\cdot4-3\cdot2^x-10=0, \tag{2}$$

равносильное заданному.

Затем пробуем *все степени* (с переменной в показателе) *привести к одному основанию и выполнить замену переменной*. Например, в уравнении (2) степень с основанием 4 можно записать как степень с основанием 2: $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$ и получить уравнение

$$2^{2x}\cdot4-3\cdot2^x-10=0. \tag{3}$$

Напомним общий ориентир: **если в уравнение, неравенство или тождество переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).** Обращаем внимание на то, что $2^{2x} = \left(2^x\right)^2$. Таким образом, в уравнение (3) переменная входит фактически в одном виде — 2^x, поэтому в этом уравнении удобно ввести замену $2^x = t$. Получаем квадратное уравнение

$$4t^2 - 3t - 10 = 0, \qquad (4)$$

для которого находим корни, а затем выполняем обратную замену (см. решение в табл. 54).

Отметим, что как использование основных формул действий над степенями, так и использование замены и обратной замены всегда приводит к уравнению, равносильному данному на его ОДЗ (в уравнении (1) — на множестве всех действительных чисел). Это обусловлено тем, что все указанные преобразования мы можем выполнить и в прямом, и в обратном направлениях. (Таким образом, мы всегда сможем доказать, что каждый корень первого уравнения является корнем второго и наоборот, аналогично тому, как был обоснован равносильный переход для простейших показательных уравнений на с. 381).

В тех случаях, когда все степени (с переменной в показателе) в показательном уравнении, которое не приводится непосредственно к простейшему, не удается привести к одному основанию, следует *попытаться привести все степени к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение*.

Например, рассмотрим уравнение

$$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0. \qquad (5)$$

Все степени в этом уравнении можно записать через основания 2 и 3, поскольку

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x},\ 9^x = (3^2)^x = 3^{2x},\ 6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x.$$

Получаем уравнение

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0. \qquad (6)$$

Все одночлены, стоящие в левой части этого уравнения, имеют степень $2x$ (степень одночлена $2^x \cdot 3^x$ также равна $x + x = 2x$).

Напомним (см. раздел 3, с. 251):

> ***Если все члены уравнения, в левой и правой частях которого стоят многочлены от двух переменных (или от двух функций одной переменной), имеют одинаковую суммарную степень*, то уравнение называется однородным.***

Решается однородное уравнение делением обеих его частей на наибольшую степень одной из переменных.

Следовательно, уравнение (6) является однородным и его можно решить делением обеих частей или на 2^{2x}, или на 3^{2x}. Отметим, что при всех зна-

* Конечно, если уравнение имеет вид $f = 0$ (где f — многочлен), то речь идет только о степени членов многочлена f, поскольку нуль-многочлен степени не имеет.

чениях x выражения 2^{2x} и 3^{2x} не равны нулю. Таким образом, при делении на эти выражения не может произойти потери корней (как это могло быть, например, для однородных тригонометрических уравнений). В результате деления обеих частей уравнения на любое из этих выражений всегда получается уравнение, равносильное данному. Например, если разделить обе части уравнения (6) на $3^{2x} \neq 0$, получаем

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-\frac{4\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0 \text{ или после сокращения } \frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^x}{3^x}-4=0.$$

В последнем уравнении все члены можно представить как степени с одним основанием $\frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0$ и выполнить замену $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$. Далее решение полученного уравнения полностью аналогично решению уравнения (2). Полное решение этого уравнения приведено в таблице 54.

Составляя план решения показательного уравнения, необходимо учитывать, что при решении некоторых из них целесообразно *перенести все члены уравнения в одну сторону и попытаться разложить* полученное выражение *на множители*, например, с использованием группировки членов, как это сделано в таблице 51 для уравнения

$$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$$

Для решения некоторых показательных уравнений можно применить свойства соответствующих функций (эти методы рассмотрены в § 37).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\frac{6}{3^x}-\frac{4}{3^x+1}=1$.

Решение

▶ *Замена* $3^x = t$. Получаем

$$\frac{6}{t}-\frac{4}{t+1}=1.$$

Тогда $6(t+1) - 4t = t(t+1)$,
$t^2 - t - 6 = 0$. Отсюда

$$t_1 = -2,\ t_2 = 3.$$

Обратная замена дает
$3^x = -2$ — корней нет или
$3^x = 3$, тогда $x = 1$.

Ответ: 1. ◁

Комментарий

В данное уравнение переменная входит только в одном виде 3^x, и поэтому удобно ввести замену $3^x = t$ и, получив дробное уравнение, найти его корни, а затем выполнить обратную замену.

Как уже отмечалось, замена и обратная замена — это равносильные преобразования данного уравнения, но при решении полученного дробного уравнения следует позаботиться о том, чтобы не получить посторонних корней (для этого, например, достаточно учесть, что $t = 3^x > 0$, и поэтому ОДЗ полученного уравнения: $t \neq -1$ и $t \neq 0$ будет учтена автоматически).

Задача 2 Решите уравнение $25^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$.

Решение

▶ $25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot \frac{5^x}{5^1} - 3 = 0,$

$5^{2x} \cdot 5 - 2 \cdot 5^x - 3 = 0.$

Замена $5^x = t$ дает уравнение

$5t^2 - 2t - 3 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{3}{5}.$

Обратная замена дает $5^x = 1$, тогда

$x = 0$ или $5^x = -\frac{3}{5}$ — корней нет.

Ответ: 0. ◁

Комментарий

1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней.
2. Приводим все степени (с переменной в показателе) к одному основанию 5.
3. Выполняем замену $5^x = t$, решаем полученное уравнение, производим обратную замену и решаем полученные простейшие показательные уравнения (а также учитываем, что все преобразования были равносильными).

Задача 3 Решите уравнение $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Решение

▶ $2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0,$

$9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0 \mid : 3^x \neq 0,$

$9 \cdot \frac{2^x}{3^x} - \frac{4 \cdot 3^x}{3^x} = 0,$

$9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0,$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9},$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$

$x = 2.$

Ответ: 2. ◁

Комментарий

1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней, переносим все члены уравнения в одну сторону и приводим подобные члены.
2. Замечаем, что степени всех членов полученного уравнения $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ (с основаниями 2 и 3) одинаковые — x, следовательно, это уравнение однородное. Его можно решить делением обеих частей на наибольшую степень одного из видов выражений с переменной — или на 2^x, или на 3^x. Учитывая, что $3^x \neq 0$ при всех значениях x, в результате деления на 3^x получаем уравнение, равносильное предыдущему (а значит, и заданному).

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используются традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.

Задача 4 Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ 4^x+4^y=5. \end{cases}$

Решение

▶ Из первого уравнения системы

$$y = 1 - x.$$

Тогда из второго уравнения получаем $4^x + 4^{1-x} = 5$, то есть $4^x + \frac{4^1}{4^x} = 5$. *Замена* $4^x = t$ дает уравнение $t + \frac{4}{t} = 5$, из которого получаем уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$, имеющее корни: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Обратная замена дает $4^x = 1$, тогда $x_1 = 0$ или $4^x = 4$, откуда $x_2 = 1$. Находим соответствующие значения

$$y = 1 - x:$$

если $x_1 = 0$, то $y_1 = 1$;
если $x_2 = 1$, то $y_2 = 0$.

Ответ: (0; 1), (1; 0). ◁

Комментарий

Если из первого уравнения выразить y через x и подставить во второе уравнение, то получим показательное уравнение, которое мы умеем решать (аналогично решению задачи 2).

Выполняя замену, учитываем, что $t = 4^x \neq 0$. Тогда в полученном дробном уравнении $t + \frac{4}{t} = 5$ знаменатель $t \neq 0$.

Таким образом, это дробное уравнение равносильно уравнению

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Задача 5* Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^x - 3^y = 16, \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$

Решение

▶ Замена $5^{\frac{x}{2}} = u$ и $3^{\frac{y}{2}} = v$ дает систему

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 16, \\ u - v = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем $u = 2 + v$. Тогда из первого уравнения получаем $(2 + v)^2 - v^2 = 16$. Отсюда $v = 3$, тогда $u = 5$.

Обратная замена дает

$3^{\frac{y}{2}} = 3$, тогда $\frac{y}{2} = 1$, отсюда $y = 2$;

$5^{\frac{x}{2}} = 5$, тогда $\frac{x}{2} = 1$, отсюда $x = 2$.

Ответ: (2; 2). ◁

Комментарий

Если обозначить $5^{\frac{x}{2}} = u$ и $3^{\frac{y}{2}} = v$, то

$$5^x = u^2 \text{ и } 3^y = v^2.$$

Тогда данная система будет равносильна алгебраической системе, которую легко решить.

После обратной замены получаем систему простейших показательных уравнений.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно провести поиск плана решения показательных уравнений, которые не приводятся непосредственно к простейшим.
2. Какую замену переменных можно выполнить при решении уравнения $4^{2x} + 2 \cdot 4^x - 3 = 0$? Какое уравнение получим после замены?
3. Объясните, почему уравнения $5^x = 7^x$ и $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 5^x - 4 \cdot 5^{2x} = 0$ являются однородными. Как можно решить эти однородные уравнения?

Упражнения

Решите уравнение **(1–5)**.

1°. 1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$; 2) $6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$; 3) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$;

4) $\frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3$; 5) $\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2$.

2. 1) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$; 2) $64^x - 7 \cdot 8^x - 8 = 0$; 3) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

4) $3^x + 3^{2-x} = 10$; 5) $2^{x+1} + 4^x = 80$; 6) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

7) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; 8*) $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11$.

3. 1°) $7^x = 9^x$; 2°) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x = 0$;

3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; 4) $4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$;

5) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 5^x + 5^{x+1}$; 6) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

4. 1) $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$; 2) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$;

3) $4^x = 3 \cdot 49^x - 2 \cdot 14^x$; 4) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

5) $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

5*. 1) $6^x - 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 36 = 0$; 2) $5 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0$;

3) $4 \cdot 20^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 5 \cdot 4^{x+1} - 20 = 0$; 4) $8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0$.

6. Решите графически уравнение:

1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Проверьте подстановкой, действительно ли найденное значение x является корнем уравнения.

7*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 6, не имеют других корней, кроме найденных графически.

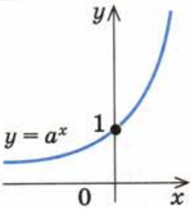
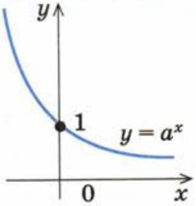
8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 5^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24; \end{cases}$ 5*) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$ 6*) $\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31. \end{cases}$

32.3. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 55

1. График показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$ и $a \neq 1$)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 возрастает	 убывает
2. Схема равносильных преобразований простейших показательных неравенств	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$ *знак неравенства сохраняется*	$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$ *знак неравенства меняется на противоположный*
Примеры	
$2^{x-3} > 4.$ ▶$2^{x-3} > 2^2$. Функция $y = 2^t$ является возрастающей, следовательно: $x - 3 > 2, \quad x > 5.$ *Ответ:* $(5; +\infty)$. ◁	$(0,7)^{x-3} > 0,49.$ ▶$(0,7)^{x-3} > (0,7)^2$. Функция $y = 0,7^t$ убывающая, следовательно: $x - 3 < 2, \quad x < 5.$ *Ответ:* $(-\infty; 5)$. ◁
3. Решение более сложных показательных неравенств	
Ориентир	Пример
I. **С помощью равносильных преобразований** (по схеме решения показательных уравнений, табл. 54) **данное неравенство приводится к неравенству известного вида** (квадратному, дробному и т. д.). После решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам.	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶$4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ *Замена* $2^x = t$ дает неравенство $4t^2 + 7t - 2 > 0$, решения которого $t < -2$ или $t > \frac{1}{4}$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $2^x < -2$ (решений нет) или $2^x > \frac{1}{4}$, откуда $2^x > 2^{-2}$, то есть $x > -2$. *Ответ:* $(-2; +\infty)$. ◁

Продолж. табл. 55

II. Применяем *метод интервалов*[1], приводя данное неравенство к виду $f(x) \gtrless 0$ и используя схему: **1. Найти ОДЗ.** **2. Найти нули $f(x)$.** **3. Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак неравенства.**	$3^x + 4^x > 7.$ ▶ Решим неравенство методом интервалов. Данное неравенство равносильно неравенству $3^x + 4^x - 7 > 0.$ Обозначим $f(x) = 3^x + 4^x - 7.$ 1. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$. 2. Нули функции: $f(x) = 0.$ $3^x + 4^x - 7 = 0.$ Поскольку функция $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то значение, равное нулю, она принимает только в одной точке области определения: $x = 1$ $(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0).$ 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства $f(x) > 0.$  *Ответ:* $(1; +\infty)$. ◁

Объяснение и обоснование

Решение простейших показательных неравенств вида $a^x > b$ (или $a^x < b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$) основывается на свойствах функции $y = a^x$, которая возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Например, чтобы найти решение неравенства $a^x > b$ при $b > 0$, достаточно представить b в виде $b = a^c$. Получаем неравенство

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функция a^x возрастает, следовательно, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, поэтому из неравенства (1) получаем $x > c$ (знак этого неравенства совпадает со знаком неравенства (1)).

При $0 < a < 1$ функция a^x убывает, следовательно, большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, поэтому из неравенства (1) получаем $x < c$ (знак этого неравенства противоположен знаку неравенства (1)).

[1] Напомним, что для решения неравенств методом интервалов мы пользуемся следующим свойством элементарной функции (которое доказывается в курсе математического анализа): *если на интервале $(a; b)$ элементарная функция $f(x)$ определена и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.*

Графически это проиллюстрировано на рисунке 139.

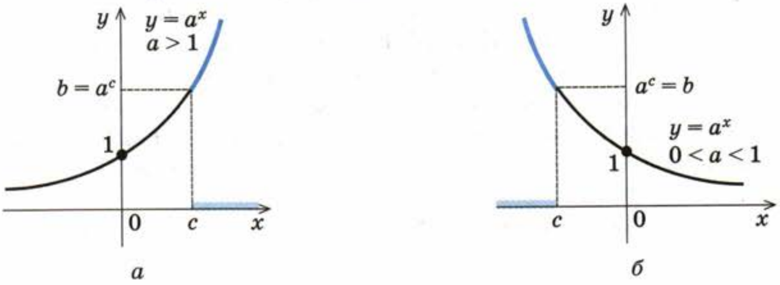


Рис. 139

Например, чтобы решить неравенство $5^x > 25$, достаточно представить это неравенство в виде $5^x > 5^2$, учесть, что $5 > 1$ (функция 5^x является возрастающей, следовательно, при переходе к аргументам знак неравенства не меняется), и записать решение: $x > 2$.

Заметим, что решение данного неравенства можно записывать в виде $x > 2$ или в виде промежутка $(2; +\infty)$.

Аналогично, чтобы решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, достаточно представить это неравенство в виде $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, учесть, что $\frac{1}{4} < 1$ (функция $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ является убывающей, таким образом, при переходе к аргументам знак неравенства меняется на противоположный), и записать решение: $x < 2$.

Учитывая, что при любых положительных значениях a значение a^x всегда больше нуля, получаем, что **при $b \leqslant 0$ неравенство $a^x < b$ решений не имеет, а неравенство $a^x > b$ выполняется при всех действительных значениях x.**

Например, неравенство $7^x < -7$ не имеет решений, а решениями неравенства $7^x > -7$ являются все действительные числа.

Обобщая приведенные выше рассуждения относительно решения простейших показательных неравенств, отметим, что

при $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $f(x) < g(x)$.

Коротко это утверждение можно записать так.

При $a > 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак неравенства сохраняется*).
При $0 < a < 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (*знак неравенства меняется на противоположный*).

Чтобы обосновать равносильность соответствующих неравенств, достаточно заметить, что при $a > 1$ неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{2}$$

$$f(x) > g(x) \tag{3}$$

могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = a^t$ при $a > 1$ является возрастающей и большему значению функции соответствует большее значение аргумента (и наоборот: большему значению аргумента соответствует большее значение функции). Таким образом, все решения неравенства (2) (которые обращают его в верное числовое неравенство) будут и решениями неравенства (3), и наоборот: все решения неравенства (3) будут решениями неравенства (2). А это и означает, что неравенства (2) и (3) являются равносильными.

Аналогично обосновывается равносильность неравенств $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$. ○

В простейших случаях при решении показательных неравенств, как и при решении показательных уравнений, пытаются с помощью основных формул действий над степенями привести (если это возможно) данное неравенство к виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для решения более сложных показательных неравенств чаще всего используют замену переменных или свойства соответствующих функций (эти методы рассмотрены в § 37).

Заметим, что аналогично решению показательных уравнений все равносильные преобразования неравенства всегда выполняются на его области допустимых значений (то есть на общей области определения для всех функций, входящих в запись этого неравенства). Для показательных неравенств достаточно часто областью допустимых значений (ОДЗ) является множество всех действительных чисел. В этих случаях, как правило, ОДЗ явно не находят и не записывают в решение неравенства (см. далее задачу 1). Но если в процессе решения показательного неравенства равносильные преобразования выполняются не на всем множестве действительных чисел, то в этом случае приходится учитывать ОДЗ (см. далее задачу 2).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $(0{,}6)^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Решение

▶ $(0{,}6)^{x^2-7x+6} \geqslant (0{,}6)^0$.

Поскольку функция $y = (0{,}6)^t$ является убывающей, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Отсюда $1 \leqslant x \leqslant 6$ (см. рисунок).

Ответ: [1; 6]. ◁

Комментарий

Запишем правую часть неравенства как степень числа 0,6: $1 = (0{,}6)^0$.

Поскольку $0{,}6 < 1$, то при переходе от степеней к показателям знак неравенства меняется на противоположный (получаем неравенство, равносильное данному).

Для решения полученного квадратного неравенства используем графическую иллюстрацию.

Задача 2 Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Решение

▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Замена $3^{\sqrt{x}} - t$ $(t > 0)$ дает неравенство $t - \frac{9}{t} \leqslant 8$, равносильное неравенству $\frac{t^2 - 8t - 9}{t} \leqslant 0$.

Поскольку $t > 0$, получаем $t^2 - 8t - 9 \leqslant 0$. Отсюда $-1 \leqslant t \leqslant 9$. Учитывая, что $t > 0$, имеем

$$0 < t \leqslant 9.$$

Выполняя обратную замену, получаем $0 < 3^{\sqrt{x}} \leqslant 9$. Тогда $3^{\sqrt{x}} \leqslant 3^2$.

Функция $y = 3^t$ является возрастающей, таким образом, $\sqrt{x} \leqslant 2$. Учитывая ОДЗ, получаем

$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: [0; 4]. ◁

Комментарий

Поскольку равносильные преобразования неравенств выполняются на ОДЗ исходного неравенства, то зафиксируем эту ОДЗ. Используя формулу $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$, избавляемся от числового слагаемого в показателе степени и получаем степени с одним основанием 3, что позволяет ввести замену $3^{\sqrt{x}} = t$, где $t > 0$.

В полученном неравенстве знаменатель положителен, поэтому это дробное неравенство можно привести к равносильному ему квадратному.

После выполнения обратной замены следует учесть не только возрастание функции $y = 3^t$, но и ОДЗ исходного неравенства.

Задача 3* Решите неравенство $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} > 0$.

Решение

▶ Решим неравенство методом интервалов. Обозначим $f(x) = 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1}$.

1. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$.
2. Нули функции: $f(x) = 0$.

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0,$$

$$2^{2x} \cdot 2 - 5 \cdot 6^x + 3^{2x} \cdot 3 = 0,$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0 \quad |: 3^{2x} \neq 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0.$$

Замена $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Получаем

$2t^2 - 5t + 3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Обратная замена дает: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$.

Комментарий

Данное неравенство можно решать или приведением к алгебраическому неравенству, или методом интервалов. Для решения его методом интервалов используем схему, приведенную в таблице 55.

При нахождении нулей функции приведем все степени к двум основаниям (2 и 3), чтобы получить однородное уравнение. Это уравнение решается делением обеих частей на наивысшую степень одного из видов переменных — на 3^{2x}.

Учитывая, что $3^{2x} \neq 0$ при всех значениях x, в результате деления на 3^{2x} получаем уравнение, равносильное предыдущему.

Отсюда $x = 0$ или $x = -1$.

3. Отметим нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из полученных промежутков и записываем решения неравенства $f(x) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. ◁

Разумеется, для решения данного неравенства можно было учесть, что $3^{2x} > 0$ всегда, и после деления данного неравенства на 3^{2x} и замены $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ получить алгебраическое неравенство.

Задача 4* Решите неравенство $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

Комментарий

Данное нестрогое неравенство также удобно решать методом интервалов. Записывая ответ, следует учитывать, что *в случае, когда мы решаем нестрогое неравенство $f(x) \leqslant 0$, все нули функции $f(x)$ должны войти в ответ.*

Решение

▶ Обозначим $f(x) = (3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

1. ОДЗ: $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$. Тогда $x \leqslant -2$ или $x \geqslant 4$ (см. рисунок).

2. Нули функции: $f(x) = 0$.

$(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$. Тогда $3^x - 9 = 0$ или $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$. Из первого уравнения: $x = 2$ — не принадлежит ОДЗ, а из второго: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

3. Отмечаем нули $f(x)$ на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства $f(x) \leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; -2]$ или $x = 4$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях показательные неравенства $a^x > b$ и $a^x < b$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) имеют решения. В каких случаях данные неравенства не имеют решений? Приведите примеры, проиллюстрируйте их графически.
2. Какому неравенству равносильно показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$? Приведите примеры.

Упражнения

1. Решите неравенство **(1–4)**.

1°) $2^x > 1$; 2°) $2^x > \frac{1}{2}$; 3) $3^x > 0$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$;

5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$; 7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$;

9*) $(0{,}3)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$; 10*) $(1{,}3)^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$; 2°) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 3) $3^{2x+1} + 8\cdot 3^x - 3 \geqslant 0$;

4) $6^{2x-1} - \frac{1}{3}\cdot 6^x - 4 \leqslant 0$; 5) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; 6) $9^x - 12\cdot 3^x + 27 \leqslant 0$.

3. 1) $3^x > 5^x$; 2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$; 3*) $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} \geqslant 0$;

4*) $5\cdot 3^{2x} + 15\cdot 5^{2x-1} \leqslant 8\cdot 15^x$.

4*. 1) $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$; 2) $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$;

3) $\sqrt{6\cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$; 4) $\sqrt{2\cdot 5^{x+1} - 1} > 5^x + 2$.

5*. 1) $\dfrac{4^{x^2+3x-2} - (0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leqslant 0$; 2) $\left(3^{\frac{x-1}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \geqslant 0$.

§ 33. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Таблица 56

1. Логарифм числа	
Определение	**Примеры**
***Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$)* называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.** Обозначение: $\log_a b$.	1) $\log_4 16 = 2$, поскольку $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, так как $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, поскольку $10^3 = 1000$.
Десятичный логарифм — это логарифм по основанию 10. Обозначение: $\log_{10} b = \lg b$.	
Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e (e — иррациональное число, приближенное значение которого: $e \approx 2{,}7$). Обозначение: $\log_e b = \ln b$.	4) $\ln\frac{1}{e^2} = -2$, так как $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Продолж. табл. 56

2. Основное логарифмическое тождество	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.
3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования ($a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$)	
1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$	*Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*
2) $\boxed{\log_a a = 1}$	
3) $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	*Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.*
4) $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	*Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.*
5) $\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$	*Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени.*
4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием	
$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$	
Следствия	
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Объяснение и обоснование

1. Логарифм числа. Если рассмотреть равенство $2^3 = 8$, то, зная любые два числа из этого равенства, мы можем найти третье:

Заданное равенство	Что известно	Что находим	Запись	Название
$2^3 = 8$	числа 2 и 3	**число 8**	$8 = 2^3$	**степень**
	числа 8 и 3	**число 2**	$2 = \sqrt[3]{8}$	**корень третьей степени**
	числа 8 и 2	**число 3**	$3 = \log_2 8$	**логарифм**

Первые две операции, представленные в этой таблице (возведение в степень и извлечение корня n-й степени), нам уже известны, а с третьей — логарифмированием, то есть нахождением логарифма данного числа, — мы познакомимся в этом параграфе.

В общем виде операция логарифмирования позволяет из равенства $a^x = b$ (где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) найти показатель x. Результат выполнения этой операции обозначается $\log_a b$. Таким образом,

логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.

Например: 1) $\log_2 8 = 3$, поскольку $2^3 = 8$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$, поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

3) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$, поскольку $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Отметим, что при положительных a и b ($a \neq 1$) уравнение $a^x = b$ всегда имеет единственное решение, поскольку функция $y = a^x$ принимает все значения из промежутка $(0; +\infty)$ и при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей (рис. 140).

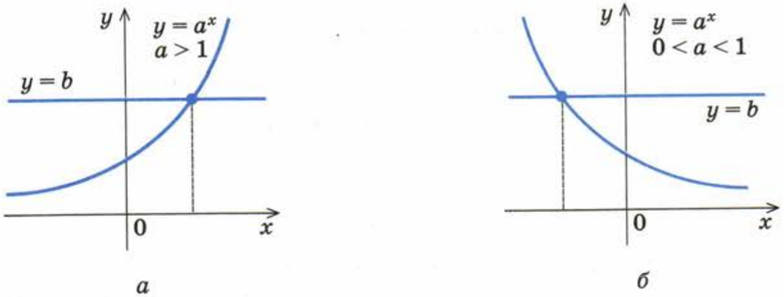


Рис. 140

Итак, каждое свое значение $b > 0$ функция a^x принимает только при одном значении x. Следовательно, *для любых положительных чисел b и a ($a \neq 1$) уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.*

При $b \leqslant 0$ уравнение $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не имеет корней, таким образом, *при $b \leqslant 0$ значение выражения $\log_a b$ не существует**.

Например, не существуют значения $\log_3(-9)$, $\log_{\frac{1}{2}}(-7)$, $\log_2 0$.

Отметим, что *логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается* lg.

Например, $\log_{10} 7 = \lg 7$, $\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$.

* Заметим, что при $a = 1$ уравнение $1^x = b$ не имеет решений при $b \neq 1$ (а при $b = 1$ имеет решением любое действительное число). Поэтому $\log_1 b$ не определен при любом $b > 0$.

В недалеком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение и составляли очень подробные таблицы их значений, которые использовались в разных вычислениях. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль. В современной науке и технике широко используются логарифмы, основанием которых является особенное число e (такое же знаменитое, как и число π). Число e, как и число π, — иррациональное, $e = 2{,}718281828459045...$. *Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается* ln.

Например, $\log_e 7 = \ln 7$, $\ln\frac{1}{e} = \log_e\frac{1}{e} = -1$.

2. Основное логарифмическое тождество. По определению логарифма, если $\log_a b = x$, то $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Подставляя в последнее равенство вместо x его значение, получаем равенство, которое называется *основным логарифмическим тождеством*:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Например: 1) $5^{\log_5 9} = 9$; 2) $10^{\lg 7} = 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2$.

3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования. Во всех приведенных ниже формулах $a > 0$ и $a \neq 1$.

1) Из определения логарифма получаем, что

$$\boxed{\log_a 1 = 0},$$

поскольку $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$). Таким образом, *логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*

2) Поскольку $a^1 = a$, то

$$\boxed{\log_a a = 1}.$$

3) Чтобы получить формулу логарифма произведения xy ($x > 0$, $y > 0$), обозначим $\log_a x = u$ и $\log_a y = v$. Тогда по определению логарифма

$$x = a^u \text{ и } y = a^v. \qquad (1)$$

Перемножив почленно два последних равенства, имеем $xy = a^{u+v}$. По определению логарифма и с учетом введенных обозначений из последнего равенства получаем $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Таким образом,

$$\boxed{\mathbf{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}}. \qquad (2)$$

Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

4) Аналогично, чтобы получить формулу логарифма частного $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), достаточно разделить почленно равенства (1). Тогда $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. По определению логарифма и с учетом введенных обозначений из последнего равенства получаем $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$. Таким образом,

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}\,. \tag{3}$$

Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

5) Чтобы получить формулу логарифма степени x^n (где $x > 0$), обозначим $\log_a x = u$. По определению логарифма $x = a^u$. Тогда $x^n = a^{nu}$, и по определению логарифма с учетом обозначения для u имеем $\log_a x^n = nu = n \log_a x$. Таким образом,

$$\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}\,. \tag{4}$$

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени. ○

Учитывая, что при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, по формуле (4) имеем:

$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$. То есть при $x > 0$ можно пользоваться формулой

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

(можно не запоминать эту формулу, а каждый раз записывать корень из положительного числа как соответствующую степень).

Замечание. Иногда приходится находить логарифм произведения xy и в том случае, когда числа x и y оба отрицательны ($x < 0$, $y < 0$). Тогда $xy > 0$ и $\log_a(xy)$ существует, но формулой (2) воспользоваться нельзя — она обоснована только для положительных значений x и y. В случае $xy > 0$ имеем $xy = |x| \cdot |y|$, и теперь $|x| > 0$ и $|y| > 0$. Таким образом, для логарифма произведения $|x| \cdot |y|$ можно воспользоваться формулой (2). Поэтому при $x < 0$ и $y < 0$ можем записать:

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|.$$

Отметим, что полученная формула справедлива и при $x > 0$ и $y > 0$, поскольку в этом случае $|x| = x$ и $|y| = y$. Таким образом,

при $xy > 0$
$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|}\,. \tag{2'}$$

Аналогично можно обобщить и формулы (3) и (4):

при $\frac{x}{y} > 0$
$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|}\,, \tag{3'}$$

при $x \neq 0$
$$\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|}\,. \tag{4'}$$

4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием

● Пусть $\log_a x = u$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тогда по определению логарифма $a^u = x$. Прологарифмируем обе части последнего равенства по основанию b ($b > 0$, $b \neq 1$). Получим $\log_b a^u = \log_b x$.

Используя в левой части этого равенства формулу логарифма степени, имеем $u \log_b a = \log_b x$. Тогда $u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Учитывая, что $u = \log_a x$, получаем:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Таким образом, *логарифм положительного числа x по одному основанию a равен логарифму этого же числа x по новому основанию b, деленному на логарифм прежнего основания a по новому основанию b.* ○

С помощью последней формулы можно получить следующие **следствия**.

1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$. Учитывая, что $\log_b b = 1$, имеем

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

2) Аналогично, учитывая формулу перехода от одного основания логарифма к другому и формулу логарифма степени, получаем (при $k \neq 0$)

$$\log_{a^k} b^k = \frac{\log_a b^k}{\log_a a^k} = \frac{k \log_a b}{k} = \log_a b.$$

Записав полученную формулу справа налево, имеем

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $k \neq 0$.

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите: 1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Решение

1) ▶ $\log_5 125 = 3$, поскольку $5^3 = 125$; ◁

2) ▶ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, так как

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3. \triangleleft$$

Комментарий

Учитывая определение логарифма, необходимо подобрать такой показатель степени, чтобы при возведении основания логарифма в эту степень получить число, стоящее под знаком логарифма.

Задача 2 Запишите решение простейшего показательного уравнения:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Решение

По определению логарифма:

1) ▶ $x = \log_5 3$; ◁

Комментарий

Для любых положительных чисел b и a ($a \neq 1$) уравнение $a^x = b$ имеет

2) ▶ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10;$ ◁

3) ▶ $x = \lg \frac{1}{3}.$ ◁

единственный корень. Показатель степени x, в которую необходимо возвести основание a, чтобы получить b, называется логарифмом b по основанию a, поэтому $x = \log_a b$.

Задача 3 Выразите логарифм по основанию 3 выражения $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (где $a > 0$ и $b > 0$) через логарифмы по основанию 3 чисел a и b. (Коротко говорят так: «*Прологарифмируйте заданное выражение по основанию 3*».)

Решение

▶ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$

$= \log_3 (3^3 a^2) - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$

$= \log_3 (3^3) + \log_3 a^2 - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$

$= 3\log_3 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b =$

$= 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b.$ ◁

Комментарий

Сначала запишем выражения, стоящие в числителе и знаменателе данного выражения, как степени чисел и букв. Далее учтем, что логарифм частного $\frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ положительных чисел равен разности логарифмов числителя и знаменателя, а затем то, что логарифм произведения $(3^3 a^2)$ равен сумме логарифмов множителей.

После этого учтем, что каждый из логарифмов степеней $(3^3;\ a^2;\ b^{\frac{1}{5}})$ равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени, а также то, что $\log_3 3 = 1$.

Задача 4 Известно, что $\log_2 5 = a$, $\log_2 7 = b$. Выразите $\log_2 700$ через a и b.

Решение

▶ $\log_2 700 = \log_2 (7 \cdot 5^2 \cdot 2^2) =$

$= \log_2 7 + \log_2 5^2 + \log_2 2^2 =$

$= \log_2 7 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 =$

$= b + 2a + 2.$ ◁

Комментарий

Сначала представим число 700 как произведение степеней данных чисел 5 и 7 и основания логарифма 2, а далее используем свойства логарифмов и подставим в полученное выражение значения $\log_2 5$ и $\log_2 7$.

Задача 5* Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{ab^3}{c^2}$.

Решение

▶ Если $\frac{ab^3}{c^2} > 0$, то

$\lg\frac{ab^3}{c^2} = \lg|ab^3| - \lg|c^2| =$

$= \lg(|a|\cdot|b^3|) - \lg|c|^2 =$

$= \lg|a| + \lg|b^3| - 2\lg|c| =$

$= \lg|a| + 3\lg|b| - 2\lg|c|$. ◁

Комментарий

Поскольку логарифмы существуют только для положительных чисел, то мы можем прологарифмировать данное выражение только в случае, когда $\frac{ab^3}{c^2} > 0$.

Из условия не следует, что в данном выражении значения a, b, c положительны. Поэтому будем пользоваться обобщенными формулами логарифмирования (2′–4′), а также учтем, что $|ab^3| = |a|\cdot|b^3|$, $|b^3| = |b|^3$, $|c^2| = |c|^2$.

Иногда приходится искать выражение, зная его логарифм. Такую операцию называют *потенцированием*.

Задача 6 Найдите x по его логарифму:

1) $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$;

2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$.

Решение

1) ▶ $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$,

$\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$,

$\lg x = \lg\frac{5\cdot 2^3}{3^2}$, $x = \frac{5\cdot 2^3}{3^2} = \frac{40}{9}$;

2) ▶ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$,

$\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$,

$\log_a x = \log_a\frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$, $x = \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$. ◁

Комментарий

Пользуясь формулами логарифмирования справа налево, запишем правые части данных равенств в виде логарифма какого-либо выражения.

Из полученного равенства

$$\log_a x = \log_a M \qquad (1)$$

получаем $x = M$

(как будет показано в § 34, значение x, удовлетворяющее равенству (1), — единственное).

Задача 7* Вычислите значение выражения $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Решение

▶ Поскольку $\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5\sqrt{3}} =$

Комментарий

Попытаемся привести показатель степени данного выражения к виду

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\log_5 3}=\frac{2}{\log_5 3},\text{ то}$$

$$\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}=\frac{4}{\frac{2}{\log_5 3}}=2\log_5 3=\log_5 3^2=\log_5 9.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}\log_5 4=\log_5 4^{\frac{1}{2}}=\log_5\sqrt{4}=\log_5 2.$$

Тогда $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4=\log_5 9+\log_5 2=$

$$=\log_5(9\cdot 2)=\log_5 18.$$

Итак, $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4}=5^{\log_5 18}=18.$ ◁

$\log_5 b$, чтобы можно было воспользоваться основным логарифмическим тождеством:

$$5^{\log_5 b}=b.$$

Для этого перейдем в показателе степени к одному основанию логарифма (к основанию 5).

Вопросы для контроля

1. Дайте определение логарифма положительного числа b по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$).
2. Какой логарифм называют десятичным логарифмом и какой натуральным логарифмом? Приведите примеры записи и вычисления таких логарифмов.
3. 1) Запишите основное логарифмическое тождество. Приведите примеры его использования. 2*) Обоснуйте основное логарифмическое тождество.
4. 1) Запишите и сформулируйте формулы логарифмирования. Приведите примеры их использования. 2*) Обоснуйте формулы логарифмирования.
5. 1) Запишите формулу перехода от одного основания логарифма к другому. Приведите примеры ее использования. 2*) Обоснуйте формулу перехода от одного основания логарифма к другому.

6*. Можно ли в том случае, когда значения x и y оба отрицательны, прологарифмировать выражение: xy, $\frac{x}{y}$, x^4? Как это сделать? Обоснуйте соответствующие формулы.

Упражнения

1°. Проверьте, верно ли равенство:

1) $\log_2 16=4$; 2) $\log_3 27=3$; 3) $\log_2\frac{1}{4}=-2$;

4) $\log_{\sqrt{2}} 4=4$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$; 6) $\log_{0,2} 0{,}008=3$.

2. Вычислите:

1°) $\log_5 25$; 2°) $\log_4 64$; 3°) $\log_3\frac{1}{9}$; 4°) $\log_6\sqrt{6}$; 5) $\log_9\frac{1}{27}$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$;

7*) $\log_2\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$; 8*) $\log_7\sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$; 9*) $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})$ 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5})$.

3°. Пользуясь определением логарифма, запишите решение простейшего показательного уравнения:

1) $4^x = 9$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 3) $10^x = 11$; 4) $5^x = 19$; 5) $0{,}2^x = 0{,}7$; 6) $e^x = 3$.

4. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, упростите выражение:

1) $5^{\log_5 7}$; 2) $3^{\log_3 4}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$; 4) $3{,}5^{\log_{3,5} 13}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6 - 2}$.

5. Прологарифмируйте данное выражение по заданному основанию, зная, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1°) $10a^3c^4$ по основанию 10; 2) $\dfrac{0{,}1a^2b^5}{c^7}$ по основанию 10;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ по основанию e; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ по основанию e;

5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ по основанию 3; 6) $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ по основанию 3.

6*. Прологарифмируйте данное выражение по основанию 10, зная, что $ab > 0$ и $c \neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\dfrac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

7. Известно, что $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Выразите через a и b:
1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

8. Найдите x, если:

1) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$; 2) $\lg x = \frac{1}{3}\lg(5a) - 2\lg b + 5\lg c$;

3) $\lg x = 3\lg m + \frac{2}{7}\lg n - \frac{1}{5}\lg p$; 4) $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_3 8 - 2\log_3 20 - 3\log_3 2$.

9. Замените данный логарифм логарифмом по основанию 3:
1) $\log_{\frac{1}{3}} a$; 2) $\log_9 a$; 3) $\log_{\frac{1}{9}} a$; 4) $\log_{\sqrt{3}} a$; 5) $\log_2 a$.

10*. Вычислите значение выражения:

1) $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{4}\log_3 16}$;

3) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$; 4) $\log_9 10 \cdot \lg 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 27$;

5) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$; 6) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7} \cdot \frac{1}{49} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{49}}\right)$.

11*. 1) Найдите $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$;
2) найдите $\log_9 15$, если $\log_{45} 25 = a$;
3) найдите $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$ и $\log_5 14 = b$;
4) найдите $\log_{150} 200$, если $\log_{20} 50 = a$ и $\log_3 20 = b$.

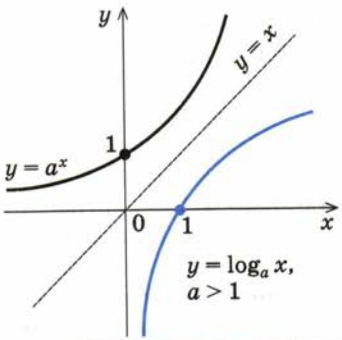
§ 34. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

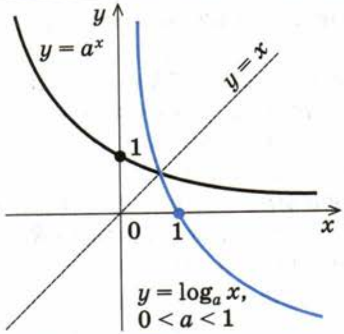
Таблица 57

Определение. ***Логарифмической функцией* называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.**

1. График логарифмической функции

Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) — взаимно обратные функции, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$.





2. Свойства логарифмической функции

1. *Область определения:* $x > 0$. $\boxed{D(\log_a x) = (0; +\infty)}$

2. *Область значений:* $\boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\log_a x) = \boldsymbol{R}}$

3. *Функция* ***ни четная, ни нечетная.***

4. *Точки пересечения с осями координат:*

с осью Oy $\boxed{\text{нет}}$ с осью Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = 1 \end{cases}}$

5. *Промежутки возрастания и убывания:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функция $\log_a x$ возрастает при $a > 1$ на всей области определения	*функция $\log_a x$ убывает при $0 < a < 1$ на всей области определения*

6. *Промежутки знакопостоянства:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$, $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$, $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$

Продолж. табл. 57

7.	*Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.*
8.	$\log_a a = 1$ $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v\ (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v\ (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a u^n = n \log_a u\ (u > 0)$

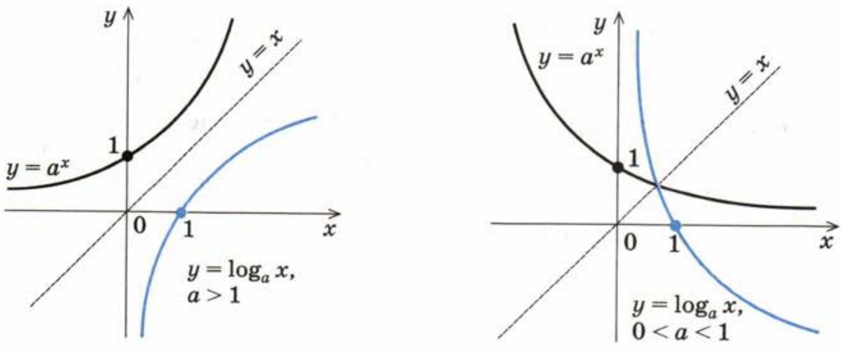
Объяснение и обоснование

1. Понятие логарифмической функции и ее график. *Логарифмической функцией называется функция вида* $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Покажем, что эта функция является обратной к функции $y = a^x$.

Действительно, показательная функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$, а при $0 < a < 1$ — убывает на множестве $\boldsymbol{R}$. Область значений функции $f(x) = a^x$ — промежуток $(0; +\infty)$. Таким образом, функция $f(x)$ обратима и имеет обратную функцию (с. 222) с областью определения $(0; +\infty)$ и областью значений $\boldsymbol{R}$. Напомним, что для записи формулы обратной функции достаточно из равенства $y = f(x)$ выразить x через y и в полученной формуле $x = g(y)$ аргумент обозначить через x, а функцию — через y. Тогда из уравнения $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ по определению логарифма получаем $x = \log_a y$ — формулу обратной функции, в которой аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, имеем формулу $y = \log_a x$ — функции, обратной к функции $y = a^x$.

Как известно, графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Таким образом, график функции $y = \log_a x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$ можно получить из графика функции $y = a^x$ симметричным отображением относительно прямой $y = x$. На рисунке 141 приведены графики логарифмических функций при $a > 1$ и при $0 < a < 1$. График логарифмической функции называют *логарифмической кривой*.



а *б*

Рис. 141

2. Свойства логарифмической функции. Свойства логарифмической функции, указанные в пункте 8 таблицы 57, были обоснованы в § 33. Другие свойства функции $y = \log_a x$ прочитаем из полученного графика этой функции и обоснуем, опираясь на свойства функции $y = a^x$.

Поскольку область определения прямой функции является областью значений обратной, а область значений прямой функции — областью определения обратной, то, зная эти характеристики для функции $y = a^x$, получаем соответствующие характеристики для функции $y = \log_a x$:

Характеристика	Функция	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$(0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$

1) ***Областью определения* функции $y = \log_a x$ является множество R_+ всех положительных чисел** ($x > 0$).
2) *Областью значений функции $y = \log_a x$ является множество* $\boldsymbol{R}$ *всех действительных чисел* (тогда функция $y = \log_a x$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений).
3) Функция $y = \log_a x$ не может быть *ни четной, ни нечетной*, поскольку ее область определения не симметрична относительно точки 0.
4) **График функции $y = \log_a x$ не пересекает ось Oy**, поскольку на оси Oy $x = 0$, а это значение не принадлежит области определения функции $y = \log_a x$. **График функции $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке $x = 1$**, поскольку $\log_a 1 = 0$ при всех значениях a ($a > 0$, $a \neq 1$).
5) Из графиков функции $y = \log_a x$, приведенных на рисунке 141, видно, что ***при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения, а при $0 < a < 1$ — убывает на всей области определения.***

Обоснуем это, опираясь на свойства функции $y = a^x$.
Например, при $a > 1$ возьмем $x_2 > x_1 > 0$. По основному логарифмическому тождеству можно записать: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. Тогда, учитывая, что $x_2 > x_1$, имеем $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Поскольку при $a > 1$ функция $y = a^x$ является возрастающей, то из последнего неравенства получаем $\log_a x_2 > \log_a x_1$. А это и означает, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения. Аналогично можно обосновать, что при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает на всей области определения.

6) *Промежутки знакопостоянства.* Поскольку график функции $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$), то, учитывая возрастание функции при $a > 1$ и убывание при $0 < a < 1$, имеем:

Значение функции	Значение аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

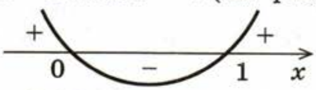
1) $y = \log_5(3 - x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$; 3) $y = \log_7(x^2 - x)$.

Решение

1) ▶ Область определения функции $y = \log_5(3 - x)$ задается неравенством $3 - x > 0$. Отсюда $x < 3$. То есть $D(y) = (-\infty;\ 3)$. ◁

2) ▶ Область определения функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$ задается неравенством $x^2 + 3 > 0$. Это неравенство выполняется при всех действительных значениях x. Таким образом, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

3) ▶ Область определения функции $y = \log_7(x^2 - x)$ задается неравенством $x^2 - x > 0$. Решая это квадратное неравенство, получаем $x < 0$ или $x > 1$ (см. рисунок).



То есть $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. ◁

Комментарий

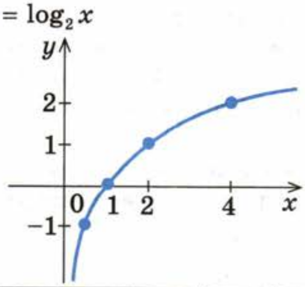
Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, то для нахождения области определения заданной функции необходимо найти те значения аргумента x, при которых выражение, стоящее под знаком логарифма, будет положительным.

Задача 2 Изобразите схематически график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решение

1) ▶ $y = \log_2 x$



x	1	$\frac{1}{2}$	2	4
y	0	-1	1	2

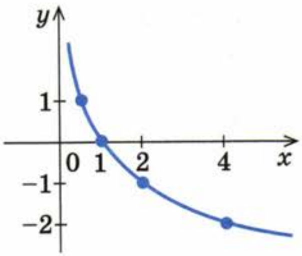
◁

Комментарий

Область определения функции $y = \log_a x$ — значения $x > 0$, следовательно, график этой функции всегда расположен справа от оси Oy. Этот график пересекает ось Ox в точке $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$).

При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, таким образом, графиком функции $y = \log_2 x$ будет логарифмическая кривая, точки которой при увеличении аргумента поднимаются.

2) ▶ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$



x	1	$\frac{1}{2}$	2	4
y	0	1	−1	−2

◁

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, таким образом, графиком функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ будет логарифмическая кривая, точки которой при увеличении аргумента опускаются.

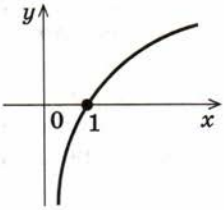
Чтобы уточнить поведение графиков данных функций, найдем координаты нескольких дополнительных точек.

Задача 3* Изобразите схематически график функции $y = \log_3 |x - 2|$.

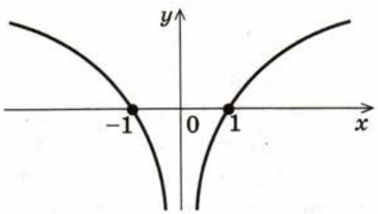
Решение

▶ Последовательно строим графики:

1. $y = \log_3 x$;



2. $y = \log_3 |x|$;



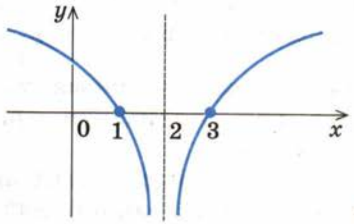
Комментарий

Составим план последовательного построения графика данной функции с помощью геометрических преобразований (см. табл. 5, с. 35).

1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = \log_3 x$ (основание логарифма $a = 3 > 1$ — логарифмическая функция возрастает).

2. Затем можно построить график функции
$$y = g(x) = \log_3 |x| = f(|x|)$$
(справа от оси Oy график функции $f(x)$ остается без изменений, и эта же часть графика симметрично отображается относительно оси Oy).

3. $y = \log_3 |x - 2|$.



◁

3. После этого можно построить график заданной функции

$$y = \log_3 |x - 2| = g(x - 2)$$

параллельным переносом графика функции $g(x)$ вдоль оси Ox на 2 единицы.

Задача 4 Сравните положительные числа b и c, зная, что:

1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Решение

1) ▶Поскольку функция $y = \log_3 x$ является возрастающей, то для положительных чисел b и c из неравенства $\log_3 b > \log_3 c$ получаем $b > c$. ◁

2) ▶Поскольку функция $y = \log_{0,3} x$ является убывающей, то для положительных чисел b и c из неравенства $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ получаем $b < c$. ◁

Комментарий

В каждом задании данные выражения — это значения логарифмической функции $y = \log_a x$ в точках b и c.

Используем возрастание или убывание соответствующей функции:

1) при $a = 3 > 1$ функция $y = \log_3 x$ возрастающая, и поэтому большему значению функции соответствует большее значение аргумента;
2) при $a = 0,3 < 1$ функция $y = \log_{0,3} x$ убывающая, и поэтому большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 5 Сравните с единицей положительное число a, зная, что $\log_a 6 < 0$.

Решение

▶ Поскольку $6 > 1$, а из условия получаем, что $\log_a 6 < 0 = \log_a 1$ (то есть $\log_a 6 < \log_a 1$), то функция $y = \log_a x$ убывающая, поэтому $0 < a < 1$. ◁

Комментарий

Числа $\log_a 6$ и 0 — это два значения функции $\log_a x$. Исходя из данного неравенства, выясняем, является эта функция возрастающей или убывающей, и учитываем, что она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение логарифмической функции.
2. Как расположены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) относительно прямой $y = x$? Ответ объясните. Постройте эти графики при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.
3. Используя график функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), охарактеризуйте ее свойства.
4*. Обоснуйте свойства функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. Учитывая возрастание или убывание соответствующей логарифмической функции, сравните значения: а) $\log_5 7$ и $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ и $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

Упражнения

1. Найдите область определения функции:

1°) $y = \log_{11}(2x + 6)$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x - 3)$; 3) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 1)$;

4) $y = \log_{5,2}(3x - x^2)$; 5) $y = \log_{\frac{3}{8}}(2x^2 + 1)$; 6) $y = \log_{\pi}(x^2 + x + 1)$;

7*) $y = \log_{0,4}\frac{2x-6}{x+2}$; 8*) $y = \log_{\sqrt{7}}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$; 9*) $y = \log_{3,1}\frac{|x|+5}{|x|-3}$;

10*) $y = \log_x(2x - x^2)$; 11*) $y = \log_{2x-3}(5x - x^2)$.

Изобразите схематически график функции **(2–3)**.

2. 1°) $y = \log_3 x$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3°) $y = \log_{0,3} x$;

4) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 5) $y = \log_{\frac{1}{6}} x$; 6) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

3. 1) $y = \log_2(-x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 1)$; 3) $y = \log_4(x + 3)$;

4) $y = \log_4 x + 3$; 5) $y = -\log_6 x$; 6*) $y = |\log_3 |x||$;

7*) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4)\right|$; 8*) $y = \log_4 \frac{x^2}{|x|}$; 9*) $y = \log_3 \log_3 x$.

4. Сравните числа:

1) $\log_2 3{,}5$ и $\log_2 4{,}5$; 2) $\log_{0,1} 1{,}3$ и $\log_{0,1} 1{,}1$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ и $\log_{\frac{1}{5}} 5$;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2{,}3$ и $\log_{\sqrt{3}} 0{,}2$; 5) $\log_{\pi} 5$ и $\log_{\pi} 7$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ и $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

7) $\log_2 3$ и 0; 8) $\log_7 \frac{1}{3}$ и 0; 9) $\log_3 4$ и 1; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ и 1.

5. Сравните положительные числа b и c, зная, что:

1) $\log_5 b > \log_5 c$; 2) $\log_{0,5} b > \log_{0,5} c$; 3) $\log_{\sqrt{7}} b < \log_{\sqrt{7}} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b < \log_{\frac{1}{3}} c$.

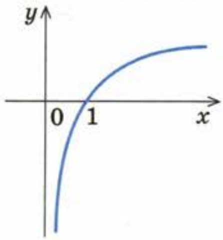
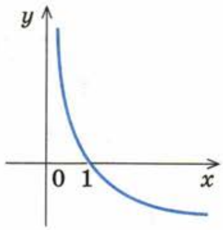
6. Сравните с единицей положительное число a, зная, что:

1) $\log_a 5 > 0$; 2) $\log_a \frac{1}{3} > 0$; 3) $\log_a 2{,}3 < 0$; 4) $\log_a 0{,}2 < 0$.

§ 35. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

35.1. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Таблица 58

<table>
<tr><td colspan="3">1. Основные определения и соотношения</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.
$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c}$</td><td colspan="2">График функции $y = \log_a x$
($a > 0$, $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
возрастает</td><td>
убывает</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Решение простейших логарифмических уравнений</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td>Если a — число ($a > 0$ и $a \neq 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(используем определение логарифма)</td><td colspan="2">$\log_3(x-1) = 2$.
▶ $x - 1 = 3^2$,
$x = 10$.
Ответ: 10. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Использование уравнений-следствий</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td>Если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то гарантируем, что получаем уравнения-следствия. При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.</td><td colspan="2">$\log_x(x+2) = 2$.
▶ По определению логарифма получаем
$x + 2 = x^2$,
$x^2 - x - 2 = 0$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Проверка. $x = -1$ — посторонний корень (в основании логарифма получаем отрицательное число);
$x = 2$ — корень ($\log_2(2+2) = 2$, $\log_2 4 = 2$, $2 = 2$).
Ответ: 2. ◁</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 58

4. Равносильные преобразования логарифмических уравнений	
Замена переменных	
Ориентир	Пример
Если в уравнение (или неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$ ▶ *Замена:* $\lg x = t$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Следовательно, $\lg x = -1$ или $\lg x = 3$. Тогда $x = 10^{-1} = 0{,}1$ или $x = 10^3 = 1000$. *Ответ:* 0,1; 1000. ◁
Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$	
Ориентир	Пример
$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ОДЗ}}$ *(учитываем ОДЗ и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов)*	$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5).$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям: $x^2 - 2 = 4x - 5$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x = 1$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ); $x = 3$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ). *Ответ:* 3. ◁
Равносильные преобразования уравнений в других случаях	
Ориентир	Пример
1. **Учитываем ОДЗ** данного уравнения (и *избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ*); 2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.**	$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3).$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$ На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям: $\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$, $\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3$, $(x + 1)(x + 3) = 2^3$, $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. Проверка:

Продолж. табл. 58

	$x = 1$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ); $x = -5$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ). *Ответ:* 1. ◁

Объяснение и обоснование

1. Решение простейших логарифмических уравнений. Простейшим логарифмическим уравнением обычно считают уравнение $\log_a x = c$ ($a > 0$ и $a \neq 1$).

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на всей своей области определения, то есть при $x > 0$ (см. графики в пункте 1 табл. 58), и поэтому каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Учитывая, что логарифмическая функция принимает все действительные значения, уравнение

$$\log_a x = c \tag{1}$$

всегда имеет единственный корень, который можно записать, исходя из определения логарифма: $x = a^c$.

Если рассмотреть уравнение

$$\log_a f(x) = c \tag{2}$$

и выполнить замену переменной: $f(x) = t$, то получим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a t = c$, имеющее единственный корень $t = a^c$. Выполняя обратную замену, получаем, что решения уравнения (2) совпадают с корнями уравнения

$$f(x) = a^c. \tag{3}$$

Следовательно, уравнения (2) и (3) равносильны. Таким образом, мы обосновали, что *для равносильного преобразования простейшего логарифмического уравнения* (1) или уравнения (2) (которое мы также будем относить к простейшим при условии, что основание a — число) *достаточно применить определение логарифма.* Если обозначить равносильность уравнений значком $\Leftrightarrow$, то коротко этот результат можно записать так:

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}.$$

Напомним, что все равносильные преобразования уравнения выполняются на его области допустимых значений (ОДЗ). Для уравнения (2) ОДЗ задается условием $f(x) > 0$. Но для всех корней уравнения (3) это условие выполняется автоматически (потому что $a > 0$). Поэтому *в явном виде ОДЗ для простейших логарифмических уравнений можно не записывать* (поскольку оно учитывается автоматически при переходе от уравнения (2) к уравнению (3)).

Например, уравнение $\log_5(2x - 3) = 2$ равносильно уравнению $2x - 3 = 5^2$, корень которого $x = 14$ и является корнем заданного уравнения.

Аналогично записано и решение простейшего уравнения $\log_3(x - 1) = 2$ в таблице 58.

2. Использование уравнений-следствий при решении логарифмических уравнений. При решении уравнения главное — не потерять его корни, и поэтому важно следить за тем, чтобы каждый корень первого уравнения оставался корнем следующего уравнения — в этом случае получаем уравнения-следствия. Напомним, что каждый корень заданного уравнения обращает его в верное числовое равенство. Используя это определение, можно обосновать, что в случае, когда преобразования уравнений проводятся так: *если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то мы получаем уравнения-следствия* (поскольку каждый корень первого уравнения будет и корнем следующего уравнения). Напомним, что хотя при использовании уравнений-следствий и не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому *проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения при использовании уравнений-следствий.*

Пример решения логарифмического уравнения с помощью уравнений-следствий и оформление такого решения приведены в пункте 3 таблицы 58.

3. Равносильные преобразования логарифмических уравнений. Одним из часто используемых способов равносильных преобразований уравнений является **замена переменной.**

Напомним общий ориентир, которого мы придерживались при решении уравнений из других разделов: *если в уравнение* (неравенство или тождество) *переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).*

Например, в уравнение $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ переменная входит только в виде $\lg x$, поэтому для его решения целесообразно применить замену $\lg x = t$, получить квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$, а затем выполнить обратную замену и получить простейшие логарифмические уравнения: $\lg x = -1$ и $\lg x = 3$. Тогда, по определению логарифма, корнями данных уравнений являются $x = 10^{-1} = 0{,}1$ и $x = 10^3 = 1000$.

Принимая во внимание то, что замена переменной (вместе с обратной заменой) является равносильным преобразованием уравнения на любом множестве, для выполнения замены не обязательно находить ОДЗ данного уравнения. После выполнения обратной замены мы получили простейшие логарифмические уравнения, ОДЗ которых (как было показано выше) учитываются автоматически и могут также не записываться. Таким образом, в приведенном решении ОДЗ данного уравнения учтена автоматически, и поэтому в явном виде ОДЗ можно не записывать в решение. Именно так и оформлено решение этого уравнения в пункте 4 таблицы 58.

Рассмотрим также **равносильные преобразования уравнения вида**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0 \text{ и } a \neq 1). \qquad (4)$$

● Как уже говорилось, все равносильные преобразования уравнения выполняются на его области допустимых значений. Для уравнения (4) ОДЗ задается системой неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Поскольку логарифмическая функция $\log_a t$ возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$) на всей своей области определения и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, то равенство (4) может выполняться (на ОДЗ) тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$. Учитывая ОДЗ, получаем, что уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (6) \\ g(x) > 0. & (7) \end{cases}$$

Символично полученный результат зафиксирован в пункте 4 таблицы 58, а коротко его можно сформулировать так:

чтобы решить уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ с помощью равносильных преобразований, учитываем ОДЗ этого уравнения и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов. ○

Пример использования этого ориентира приведен в таблице 58.

Замечание 1. Полученную систему (5)–(7) можно несколько упростить. Если в этой системе выполняется равенство (5), то значения $f(x)$ и $g(x)$ между собой равны, поэтому если одно из этих значений будет положительным, то второе также будет положительным. Таким образом, уравнение (4) равносильно системе, состоящей из уравнения (5) и одного из неравенств (6) или (7) (обычно выбирают простейшее из этих неравенств).

Например, уравнение $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$, рассмотренное в таблице 58, равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 2 = 4x - 5, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ Но учитывая, что ограничения ОДЗ этого уравнения: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0, \end{cases}$ мы не решали, а только проверяли, удовлетворяют ли найденные корни этим ограничениям, приведенное упрощение не дает существенного выигрыша при решении этого уравнения.

Замечание 2. Как было обосновано выше, если выполняется равенство (4), то обязательно выполняется и равенство (5). Таким образом, уравнение (5) является следствием уравнения (4), и поэтому для нахождения корней уравнения (4): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ достаточно найти корни уравнения-следствия (5): $f(x) = g(x)$ и выполнить проверку найденных корней подстановкой в данное уравнение. (При таком способе решения ОДЗ уравнения (4) будет учтено опосредствованно, в момент проверки полученных корней, и его не придется явно записывать.)

Выполняя **равносильные преобразования логарифмических уравнений в более сложных случаях**, можно придерживаться следующего ориентира (он следует из определения равносильных уравнений и обоснован в § 3 раздела 1):

1) Учитываем ОДЗ данного уравнения.

2) Следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.

Например, решим уравнение

$$\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x+3) \tag{8}$$

с помощью равносильных преобразований.

Для этого достаточно учесть ОДЗ уравнения $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а затем, выполняя каждое преобразование уравнения, все время следить за тем, можно ли на ОДЗ выполнить это преобразование и в обратном направлении. Если ответ положителен, то выполненные преобразования равносильны. Если же какое-то преобразование для всех значений переменной из ОДЗ можно выполнить только в одном направлении (от исходного уравнения к следующему), а для его выполнения в обратном направлении необходимы какие-то дополнительные ограничения, то мы получим только уравнение-следствие, и полученные корни придется проверять подстановкой в исходное уравнение.

Применим этот план к решению уравнения (8).

Чтобы привести это уравнение к простейшему, перенесем все члены уравнения с логарифмами влево. Получим равносильное уравнение

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3. \tag{9}$$

(Равносильность уравнений (8) и (9) следует из известной теоремы: если из одной части уравнения перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному на любом множестве. Равносильность этих уравнений следует также из того, что мы можем не только перейти от равенства (8) к равенству (9), но и выполнить обратное преобразование, пользуясь свойствами числовых равенств.)

Учитывая, что сумма логарифмов положительных (на ОДЗ) чисел равна логарифму произведения, получаем уравнение

$$\log_2\big((x+1)(x+3)\big) = 3. \tag{10}$$

На ОДЗ данного уравнения можно выполнить и обратное преобразование: поскольку $x+1>0$ и $x+3>0$, то логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей. Таким образом, от равенства (10) можно вернуться к равенству (9), то есть этот переход также приводит к равносильному уравнению. Уравнение (10) — это простейшее логарифмическое уравнение. Оно равносильно уравнению, которое получается по определению логарифма:

$$(x+1)(x+3) = 2^3.$$

Выполняя равносильные преобразования полученного уравнения, имеем:

$$x^2 + 4x - 5 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -5.$$

Поскольку все равносильные преобразования выполнялись на ОДЗ данного уравнения, учтем ее, подставляя полученные корни в ограничения ОДЗ:

$x = 1$ — корень, потому что удовлетворяет условиям ОДЗ;

$x = -5$ не является корнем (посторонний корень), потому что не удовлетворяет условиям ОДЗ. Таким образом, данное уравнение имеет только один корень $x = 1$.

Замечание. Рассмотренное уравнение можно было решить и с использованием уравнений-следствий.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение

$$\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2. \qquad (1)$$

Решение

$$2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2, \qquad (2)$$

$$\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2, \qquad (3)$$

$$\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4, \qquad (4)$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4, \qquad (5)$$

$$(x-2)^2=4(3x-6), \qquad (6)$$

$$x^2-16x+28=0, \qquad (7)$$

$$x_1=2,\ x_2=14.$$

Проверка. $x = 2$ — посторонний корень (под знаком логарифма получаем 0),

$x = 14$ — корень, поскольку имеем

$$\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2,$$

$$\lg 12-\frac{1}{2}\lg 36=\lg 2,$$

$$\lg 12-\lg\sqrt{36}=\lg 2,$$

$$\lg\frac{12}{6}=\lg 2,$$

$$\lg 2=\lg 2.$$

Ответ: 14.

Комментарий

Решим данное уравнение с помощью уравнений-следствий. Напомним, что *при использовании уравнений-следствий главное — гарантировать, что в случае, когда первое равенство будет верным, то и все последующие также будут верными.*

Чтобы избавиться от дробного коэффициента, умножим обе части уравнения (1) на 2 (если равенство (1) верно, то и равенство (2) также верно). Если равенства (1) и (2) верны (при тех значениях x, которые являются корнями этих уравнений), то при таких значениях x существуют все записанные логарифмы, и тогда выражения $x - 2$ и $3x - 6$ — положительны. Следовательно, для положительных a, b, c можно воспользоваться формулами:

$2\lg a=\lg a^2$, $\lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c}$, таким образом, равенства (3) и (4) также будут верны. Учитывая, что функция $y=\lg t$ является возрастающей и, следовательно, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, из равенства логарифмов (4) получаем равенство соответствующих аргументов (5).

Если равенство (5) верно, то знаменатель дроби не равен нулю, и после умножения обеих ее частей на $3x - 6 \neq 0$ получаем верное равенство (6) (а значит, и верное равенство (7)). Поскольку мы пользовались уравнениями-следствиями, то в конце необходимо выполнить проверку.

Задача 2 Решите уравнение

$$\log_2(x-5)^2 - 2 = 2\log_2(2x). \qquad (1)$$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)^2>0,\\ 2x>0.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}x\neq 5,\\ x>0.\end{cases}$

На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\log_2(x-5)^2 - \log_2 2^2 = 2\log_2(2x),$$

$$\log_2\frac{(x-5)^2}{2^2} = \log_2(2x)^2, \qquad (2)$$

$$\frac{(x-5)^2}{2^2} = (2x)^2, \qquad (3)$$

$$(x-5)^2 = 4\cdot 4x^2,$$

$$15x^2 + 10x - 25 = 0,$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что $x = 1$ входит в ОДЗ, таким образом, является корнем; $x = -\frac{5}{3}$ не входит в ОДЗ, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Ответ: 1. ◁

Комментарий

Решим данное уравнение с помощью равносильных преобразований. Напомним, что для этого достаточно *учесть ОДЗ данного уравнения и следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.*

Заметим, что на ОДЗ выражение $x - 5$ может быть как положительным, так и отрицательным, и поэтому мы не имеем права применять к выражению $\log_2(x-5)^2$ формулу: $\log_2(x-5)^2 = 2\log_2(x-5)$ (это приведет к потере корня). Применение обобщенной формулы логарифмирования приведет к уравнению с модулем. Используем другой способ преобразований, учтя, что $2 = \log_2 2^2$. Поскольку на ОДЗ все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны, то все преобразования от уравнения (1) к уравнению (2) будут равносильными. Выполнить равносильные преобразования уравнения (2) можно с использованием ориентира, приведенного на с. 418. Также равносильность уравнений (2) и (3) может быть обоснована через возрастание функции $y = \log_2 t$, которая каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента.

Задача 3* Решите уравнение $\log_4 x + 6 \log_x 4 = 5$.

Решение

► ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_4 x} = 5.$$

Замена: $\log_4 x = t$. Получаем:

$$t + \frac{6}{t} = 5, \quad (1)$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0, \quad (2)$$

$$t_1 = 2,\ t_2 = 3;$$

$\log_4 x = 2$ или $\log_4 x = 3$;

$x = 4^2 = 16$ или $x = 4^3 = 64$

(оба корня входят в ОДЗ).

Ответ: 16; 64. ◁

Комментарий

Выполним равносильные преобразования данного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$). Поскольку в уравнение входят логарифмы с разными основаниями, то приведем их к одному основанию (желательно числовому, иначе можно потерять корни уравнения). В данном случае приводим к основанию 4 по формуле $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

После приведения логарифмов к одному основанию переменная входит в уравнение только в одном виде $\log_4 x$. Выполним замену $\log_4 x = t$. Поскольку по ограничениям ОДЗ $x \neq 1$, то $t \neq 0$. Тогда полученное дробное уравнение (1) равносильно квадратному уравнению (2).

Поскольку замена и обратная замена являются равносильными преобразованиями на ОДЗ, то для полученных решений достаточно проверить, входят ли они в ОДЗ.

Задача 4* Решите уравнение

$$x^{\lg x - 2} = 1000. \quad (1)$$

Решение

► ОДЗ: $x > 0$.

На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\lg (x^{\lg x - 2}) = \lg 1000, \quad (2)$$

$$(\lg x - 2) \lg x = 3. \quad (3)$$

Замена: $\lg x = t$. Получаем:

$(t - 2)\, t = 3$, $t^2 - 2t - 3 = 0$,

Комментарий

Выполним равносильные преобразования данного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ и используем ориентир: *если переменная входит и в основание, и в показатель степени, то для решения такого уравнения можно попытаться*

$$t_1 = -1,\ t_2 = 3.$$

Обратная замена дает

$$\lg x = -1 \text{ или } \lg x = 3.$$

Отсюда $x = 10^{-1} = 0{,}1$ или

$$x = 10^3 = 1000.$$

Ответ: 0,1; 1000. ◁

прологарифмировать обе части уравнения (только если они положительны). В запись уравнения уже входит десятичный логарифм, поэтому прологарифмируем обе части по основанию 10 (на ОДЗ обе части данного уравнения положительны).

Поскольку функция $y = \lg t$ является возрастающей, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Следовательно, если выполняется равенство (1), то выполняется и равенство (2), и наоборот: если выполняется равенство (2), то выполняется и равенство (1). Таким образом, уравнения (1) и (2) равносильны на ОДЗ. При $x > 0$ применение формулы $\lg x^\alpha = \alpha \lg x$ является равносильным преобразованием, а значит, уравнения (2) и (3) также равносильны.

Обоснование равносильности дальнейших преобразований полностью совпадает с аналогичным обоснованием в предыдущей задаче.

Задача 5 Решите уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Решение

▶ $$3^x - 8 = 3^{2-x}, \qquad (1)$$

$$3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}.$$

Замена: $3^x = t$. Получаем

$$t - 8 = \frac{9}{t}, \qquad (2)$$

$$t^2 - 8t - 9 = 0, \qquad (3)$$

$$t_1 = 9,\ t_2 = -1.$$

Обратная замена дает

$3^x = 9$, $x = 2$ или $3^x = -1$ — корней нет.

Ответ: 2. ◁

Комментарий

Если сначала рассмотреть данное уравнение как простейшее логарифмическое, то по определению логарифма оно равносильно уравнению $3^x - 8 = 3^{2-x}$. Как уже отмечалось (с. 416), ОДЗ данного уравнения $3^x - 8 > 0$ для всех корней уравнения (1) учитывается автоматически, поскольку $3^{2-x} > 0$ всегда. После этого уравнение (1) решается по схеме решения показательных уравнений (табл. 54, с. 384).

Поскольку $t = 3^x > 0$, то $t \neq 0$, и поэтому уравнение (2) равносильно уравнению (3).

Задача 6 Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$

Решение

▶ $\begin{cases}\log_2(xy)=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases}xy=2^2,\\ y-x=3.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы получаем $y = x + 3$ и подставляем в первое уравнение:

$$x(x+3)=4,$$
$$x^2+3x-4=0,$$
$$x_1=1,\ x_2=-4.$$

Тогда $y_1 = 4$, $y_2 = -1$.

Проверка. $\begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}$ — решение заданной системы.

$$\left(\begin{cases}\log_2 1+\log_2 4=2,\\ \log_3(4-1)=1;\end{cases}\quad \begin{cases}2=2,\\ 1=1\end{cases}\right)$$

$\begin{cases}x=-4,\\ y=-1\end{cases}$ — постороннее решение (под знаком логарифма получаем отрицательные числа).

Ответ: (1; 4). ◁

Комментарий

Как и логарифмические уравнения, системы логарифмических уравнений можно решать как с помощью *систем-следствий* (*каждое решение первой системы является решением второй*), так и с помощью равносильных преобразований систем (все решения каждой из них являются решениями другой).

Кроме того, при решении логарифмических систем можно применить те же способы, что и при решении других видов систем (способ алгебраического сложения, подстановка некоторого выражения из одного уравнения в другое, замена переменных).

Например, решим данную систему с помощью систем-следствий. Для этого достаточно гарантировать, что в случае, когда заданная система состоит из верных равенств, каждая следующая система также будет содержать верные равенства. Как и для уравнений, *при использовании систем-следствий необходимо выполнить проверку полученных решений подстановкой в исходную систему.*

Замечание. Данную систему можно было решить и с помощью равносильных преобразований систем. При этом пришлось бы учесть ОДЗ данной системы $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ y-x>0,\end{cases}$ следить за равносильностью выполненных преобразований (в данном случае все написанные преобразования являются равносильными на ОДЗ), а в конце проверить, удовлетворяют ли полученные решения условиям ОДЗ (пара чисел $\begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}$ удовлетворяет условиям ОДЗ, а $\begin{cases}x=-4,\\ y=-1\end{cases}$ не удовлетворяет условиям ОДЗ).

Задача 7 Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

Тогда из первого уравнения имеем

$$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2.$$

Замена $t = \log_x y$ дает уравнения

$\frac{1}{t} + t = 2,\ t^2 - 2t + 1 = 0,\ t = 1.$

Обратная замена дает

$\log_x y = 1$, то есть $y = x$.

Тогда из второго уравнения системы имеем $x^2 - x - 20 = 0$,

$x_1 = -4$ (не принадлежит ОДЗ),

$x_2 = 5$ (принадлежит ОДЗ).

Таким образом, решение данной системы

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases}$$

Ответ: (5; 5). ◁

Комментарий

Решим данную систему с помощью равносильных преобразований. Для этого достаточно учесть ее ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$) и гарантировать, что на каждом шагу были выполнены именно равносильные преобразования уравнения или всей системы. В первом уравнении системы все логарифмы приведем к одному основанию x (на ОДЗ $x > 0$, $x \neq 1$): $\log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y} = \frac{1}{\log_x y}$.

На ОДЗ $y \neq 1$, следовательно, $\log_x y \neq 0$. Тогда после замены $t = \log_x y$ имеем $t \neq 0$, и поэтому переход в решении от дробного уравнения к квадратному является равносильным.

Поскольку замена (вместе с обратной заменой) является равносильным преобразованием, то, заменяя первое уравнение системы равносильным ему (на ОДЗ) уравнением $y = x$, получаем систему, равносильную данной (на ее ОДЗ).

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно решать простейшие логарифмические уравнения, используя определение логарифма.
2*. Обоснуйте справедливость равносильного перехода:
$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c\ (a > 0,\ a \neq 1).$$
3. Объясните, как можно решить уравнение $\log_5(x - 2) = \log_5(x^2 - 2)$:
   а) с помощью уравнений-следствий;
   б*) с помощью равносильных преобразований.
4. Объясните на примере применение замены переменных при решении логарифмических уравнений. В каких случаях целесообразно применять замену переменных?

Упражнения

Решите уравнение **(1–5)**.

1°. 1) $\log_2 x = 4$; 2) $\log_{0,2} x = -1$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\lg x = 2$.

2. 1°) $\log_3(2x-1)=2$; 2°) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-21)=-2$;
3) $\log_\pi(x^2+2x-2)=0$; 4) $\lg(3-x)=-1$.

3. 1°) $\lg(x+9)+\lg(2x+8)=2$; 2°) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;
3) $2\log_2 x-\log_2(3x-4)=1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5(x-4)+\frac{1}{2}\log_5(2x-1)=\log_5 3$.

4. 1°) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$; 2°) $\frac{1}{3-\lg x}+\frac{1}{1+\lg x}=1$;
3) $\log_3^2 x+\log_3 x^2=8$; 4) $\lg^3 x^2=8\lg x$.

5. 1) $\log_2(10-2^x)=x+2$; 2) $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$;
3) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$; 4) $\log_2 2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

6. Решите графически уравнение:
1) $\log_2 x=3-x$; 2) $\log_3 x=\log_{\frac{1}{2}} x$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-1$; 4) $\lg x=11-x$.

Проверьте подстановкой, что найденное значение x действительно является корнем уравнения.

7*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 6, не имеют других корней, кроме найденных графически.

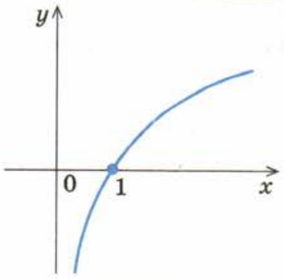
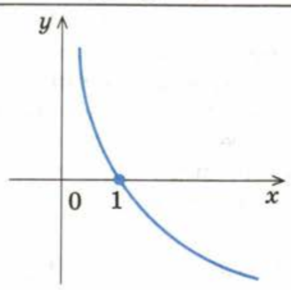
8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\lg(xy)=3,\\ \lg x\cdot\lg y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2(y-1)=3,\\ 2x-y=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ \log_2(x+y-3)=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3},\\ xy=16.\end{cases}$

35.2. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 59

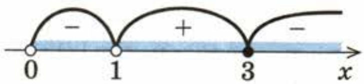
1. График функции $y=\log_a x$ $(a>0;\ a\neq 1)$	
$a>1$	$0<a<1$
 возрастает	 убывает

Продолж. табл. 59

2. Равносильные преобразования простейших логарифмических неравенств	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$
Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ.	*Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ.*
Примеры	
$\log_2(x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $\log_2(x-5) > \log_2 2^3.$ Функция $y = \log_2 t$ возрастающая, тогда $x - 5 > 2^3,$ $x > 13.$ Учитывая ОДЗ, имеем $x > 13$. *Ответ:* $(13; +\infty)$. ◁	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$ Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ убывающая, тогда $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$. Учитывая ОДЗ, имеем $5 < x < 5\frac{1}{8}$. Ответ: $\left(5; 5\frac{1}{8}\right)$. ◁

3. Решение более сложных логарифмических неравенств	
Ориентир	Пример
I. С помощью равносильных преобразований данное неравенство приводится к неравенству известного вида.	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенствам: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$.

Продолж. табл. 59

Схема равносильных преобразований неравенства: 1. **Учитываем ОДЗ** заданного неравенства (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ). 2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.**	*Замена* $\lg x = t$. Тогда $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, то есть $t^2 + t - 2 \geqslant 0$. Решение этого неравенства $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 1$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $\lg x \leqslant -2$ или $\lg x \geqslant 1$. Тогда $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ или $\lg x \geqslant \lg 10$. Учитывая, что функция $y = \lg x$ является возрастающей, получаем: $x \leqslant 10^{-2}$ или $x \geqslant 10$. С учетом ОДЗ имеем: $0 < x \leqslant 0{,}01$ или $x \geqslant 10$. *Ответ:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10;\ +\infty)$. ◁
II. Применяется метод интервалов (данное неравенство приводится к неравенству $f(x) \geq 0$) и используется схема: 1. **Найти ОДЗ.** 2. **Найти нули $f(x)$.** 3. **Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** 4. **Записать ответ, учитывая знак неравенства.**	$\log_x(2x + 3) < 2$. ▶ Решим неравенство методом интервалов. Оно равносильно неравенству $\log_x(2x + 3) - 2 < 0$. Обозначим $f(x) = \log_x(2x + 3) - 2$. 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\log_x(2x + 3) - 2 = 0$. Тогда $\log_x(2x + 3) = 2$. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнению $2x + 3 = x^2$ (полученному по определению логарифма). То есть $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. В ОДЗ входит только $x = 3$. Итак, $f(x)$ имеет единственный нуль функции $x = 3$. 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решения неравенства $f(x) < 0$.  Ответ: $x \in (0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Решение простейших логарифмических неравенств. *Простейшими логарифмическими неравенствами* обычно считают неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (где } a > 0 \text{ и } a \neq 1). \qquad (1)$$

- Для решения такого неравенства можно применять равносильные преобразования. Для этого необходимо учесть его ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ и рассмотреть два случая: основание логарифма больше 1 и основание меньше 1 (но больше 0).

I. При $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a t$ возрастает на всей своей области определения (то есть при $t > 0$), и поэтому большему значению функции соответствует большее значение аргумента. Таким образом, переходя в неравенстве (1) от значений функции к значениям аргумента (в данном случае переходя к выражениям, стоящим под знаком логарифма), мы должны оставить тот же знак неравенства, то есть

$$f(x) > g(x). \qquad (2)$$

Учитывая, что на ОДЗ указанный переход можно выполнить и в обратном направлении (большему положительному значению аргумента соответствует большее значение функции), получаем, что на ОДЗ неравенство (1) равносильно неравенству (2). Коротко это можно записать так:

При $a > 1$ $\qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), & (2) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$

II. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция $y = \log_a t$ убывает на всей своей области определения (то есть при $t > 0$), и поэтому большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Следовательно, переходя в неравенстве (1) от значений функции к значениям аргумента, мы должны знак неравенства изменить на противоположный, то есть

$$f(x) < g(x). \qquad (5)$$

Учитывая, что на ОДЗ указанный переход можно выполнить и в обратном направлении (меньшему положительному значению аргумента соответствует большее значение функции), получаем, что при $0 < a < 1$ неравенство (1) на его ОДЗ равносильно неравенству (5). Коротко это можно записать так:

При $0 < a < 1$ $\qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$

Суммируя полученные результаты, отметим, что

для решения неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ с помощью равносильных преобразований необходимо учесть его ОДЗ, а при переходе от значений функции к значениям аргумента (то есть к выражениям, стоящим под знаком логарифма) — значение a:
при $a > 1$ знак неравенства не меняется,
при $0 < a < 1$ знак неравенства меняется на противоположный.

Примеры использования этих ориентиров приведены в таблице 59.

Замечание. Системы неравенств, полученные для случаев I и II, можно несколько упростить. Например, если в системе выполняются неравенство (2): $f(x) > g(x)$ и неравенство (4): $g(x) > 0$, то из этих неравенств следует, что $f(x) > 0$. Следовательно, неравенство (3) этой системы выполняется автоматически, когда выполняются неравенства (2) и (4), и его можно не записывать в эту систему (см. пункт 2 табл. 59).

Аналогично обосновывается, что в случае II в системе неравенство (4) является следствием неравенств (3) и (5), и его также можно не записывать в систему.

Например, решим неравенство $\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3$.

$$\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3.$$

(ОДЗ данного неравенства $x^2 - 2x > 0$ учтено автоматически, поскольку, если $x^2 - 2x > 3$, то выполняется и неравенство $x^2 - 2x > 0$.)

Решаем неравенство $x^2 - 2x > 3$. Тогда $x^2 - 2x - 3 > 0$, отсюда (см. рисунок) $x < -1$ или $x > 3$ — решение заданного неравенства (его можно записать и так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$).

2. Решение более сложных логарифмических неравенств выполняется или с помощью равносильных преобразований данного неравенства (и приведения его к известному виду неравенств), или с помощью метода интервалов*.

Схема равносильных преобразований логарифмических неравенств полностью аналогична схеме равносильных преобразований логарифмических уравнений:

1) ***учитываем ОДЗ данного неравенства;***
2) ***следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.***

В этом случае на ОДЗ каждое решение данного неравенства будет и решением второго и, наоборот, каждое решение второго неравенства будет решением первого, то есть эти неравенства будут равносильными (на ОДЗ).

Примеры решения логарифмических неравенств с помощью равносильных преобразований и методом интервалов и оформления такого решения приведены в таблице 59. Рассмотрим еще несколько примеров.

---

* Еще раз напомним, что для решения неравенств методом интервалов мы пользуемся следующим свойством элементарной функции (которое доказывается в курсе математического анализа): *если на интервале $(a; b)$ элементарная функция $f(x)$ определена и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.*

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$.

Комментарий

Решим данное неравенство с помощью равносильных преобразований. Как и для уравнений, для этого достаточно *учесть ОДЗ данного неравенства и следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства*. Поскольку на ОДЗ выражения, стоящие под знаком логарифмов, положительны, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для положительных b и c можно применить как в прямом, так и в обратном направлениях. Таким образом, выполняя преобразование неравенства по этой формуле, получим неравенство, равносильное данному (на его ОДЗ).

Чтобы применить свойства логарифмической функции, запишем число (-1) как значение логарифмической функции: $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (понятно, что эту формулу можно применить как в прямом, так и в обратном направлениях) и учтем, что $(0,2)^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Решение

► ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\x+3>0.\end{cases}$ Тогда $x>1$.

На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

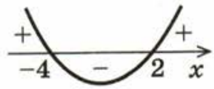
$$\log_{0,2}\big((x-1)(x+3)\big)\geqslant\log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функция $y=\log_{0,2}t$ убывающая, поэтому $(x-1)(x+3)\leqslant(0,2)^{-1}$.

Получаем $x^2+2x-3\leqslant 5$, $x^2+2x-8\leqslant 0$.

Последнее неравенство имеет решения:

$-4\leqslant x\leqslant 2$ (см. рисунок).



Учитывая ОДЗ, получаем $1<x\leqslant 2$.

Ответ: (1; 2]. ◁

Задача 2* Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>-1$.

Решение

► $$\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Учитывая ОДЗ данного неравенства и то, что функция $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ убывающая, получаем

$$0<\log_2\frac{x-1}{2-x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

Комментарий

ОДЗ данного неравенства задается системой

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{x-1}{2-x}>0, & (6)\\[2mm] \dfrac{x-1}{2-x}>0. & (7)\end{cases}$$

то есть $0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < 3$.

Тогда $\log_2 1 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \log_2 2^3$.

Учитывая, что функция $y = \log_2 t$ возрастающая, получаем

$$1 < \frac{x-1}{2-x} < 2^3. \qquad (3)$$

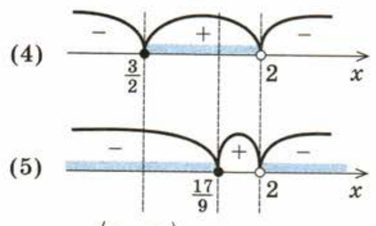
Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} > 1, \\ \frac{x-1}{2-x} < 8, \end{cases}$ которая равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2-x} > 0, & (4) \\ \frac{9x-17}{2-x} < 0. & (5) \end{cases}$$

Решаем неравенства (4) и (5) методом интервалов и находим их общее решение (см. рисунок).

Для неравенства (4) ОДЗ: $x \neq 2$, нули функции $f(x) = \frac{2x-3}{2-x}$: $x = \frac{3}{2}$.

Для неравенства (5) ОДЗ: $x \neq 2$, нули функции $g(x) = \frac{9x-17}{2-x}$: $x = \frac{17}{9}$.



Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{9}\right)$. ◁

При выполнении равносильных преобразований главное — не записать ОДЗ, а учесть ее в ходе решения. При переходе от неравенства (1) к неравенству (2) в записи последнего неравенства остается выражение $\log_2 \frac{x-1}{2-x}$, для которого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Следовательно, при таком переходе ограничение (7) будет неявно учтено и поэтому достаточно учесть только ограничение (6) (что и сделано в левой части неравенства (2)). Чтобы применить свойства соответствующих логарифмических функций, записываем сначала

$$-1 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

(и учитываем, что $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$),

а затем — $0 = \log_2 1$ и $3 = \log_2 2^3$.

При переходе от неравенства (2) к неравенству (3) получаем $\frac{x-1}{2-x} > 1$, таким образом, и в этом случае неравенство (7) учтено автоматически. Для нахождения общих решений неравенств (4) и (5) удобно их решения методом интервалов разместить одно над другим так, чтобы одинаково обозначенные точки находились одна над другой. Тогда из приведенного рисунка легко увидеть общее решение системы неравенств.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно решать простейшие логарифмические неравенства, используя свойства логарифмической функции.

2*. Обоснуйте справедливость равносильных переходов:

1) при $a > 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$

2) при $0 < a < 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. Объясните на примере применение метода интервалов к решению логарифмических неравенств.

Упражнения

Решите неравенство **(1–6)**.

1°. 1) $\log_3 x > 2$; 2) $\log_{0,2} x > -1$;

3) $\log_{0,5} x < 1$; 4) $\lg x < 2$.

2. 1) $\log_2(3x - 2) > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > -2$;

3) $\log_5(3x - 2) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) > -1$;

3°. 1) $\lg(2x - 1) > \lg(x + 2)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;

3) $\log_{0,2} x < \log_{0,2}(3x - 6)$; 4) $\log_4(2x - 1) \leqslant \log_4(x + 3)$.

4. 1) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{3-\lg x} + \dfrac{1}{1+\lg x} > 1$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 \leqslant 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geqslant 0$.

5. 1) $\lg x + \lg(x - 9) > 1$; 2) $\log_{0,1}(x + 4) + \log_{0,1}(x - 5) \leqslant -1$;

3) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$; 4) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x \geqslant \log_\pi 2$.

6*. 1) $\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \geqslant 0$; 2) $\log_x \sqrt{x+12} > 1$;

3) $\log_2 x + \log_x 2 \leqslant 2,5$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3 < 0$.

7*. 1) $\log_{2x+3} x^2 < 1$; 2) $\log_5(x+2) + \log_5(1-x) \leqslant \log_5\big((1-x)(x^2-8x-8)\big)$;

3) $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leqslant 0$; 4) $\dfrac{\log_5(2-x) + \log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}}{\log_5(2x-1) + \log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}} \geqslant 0$.

§ 36. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Таблица 60

<table>
<tr><td colspan="2">Показательно-степенные уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Показательно-степенными уравнениями обычно называют уравнения, содержащие выражения вида $(f(x))^{g(x)}$, то есть уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ (основанием степеней, стоящих в левой и правой частях показательно-степенного уравнения, является $f(x)$ — выражение с переменной).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основные способы решения уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. $f(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>Используем (если возможно) основное логарифмическое тождество в виде
$a^{\log_a N} = N$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$</td><td>1. ▶ $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x_1 = -1 \text{ или } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
Ответ: 2. ◁</td></tr>
<tr><td>Логарифмируем (если возможно) обе части уравнения по числовому основанию или представляем все степени как степени с одним и тем же числовым основанием по формуле
$U(x) = a^{\log_a U(x)}$,
где $(a > 0,\ a \neq 1,\ U(x) > 0)$</td><td>2. $x^{2\lg x + 1} = 100x$.
▶ На ОДЗ $(x > 0)$ обе части уравнения положительны, поэтому после логарифмирования по основанию 10 получаем уравнение, равносильное данному:
$\lg(x^{2\lg x + 1}) = \lg(100x)$.
Отсюда
$(2\lg x + 1)\lg x = \lg 100 + \lg x$.
Замена: $\lg x = t$. $(2t + 1)t = 2 + t$, $t^2 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тогда $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$, то есть $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$ (оба корня входят в ОДЗ).
Ответ: 10; 0,1. ◁</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 60

II. $f(x)$ — произвольное выражение	
Две степени с одинаковыми основаниями $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *могут быть равными в одном из четырех случаев:* 1) $f(x) = -1$ *и для корней этого уравнения* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— целые числа одинаковой четности.* 2) $f(x) = 0$ *и для корней этого уравнения* $g(x) > 0$ *и* $\varphi(x) > 0$. 3) $f(x) = 1$ *и для корней этого уравнения* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *существуют.* 4) $g(x) = \varphi(x)$ *и для корней этого уравнения существуют* $(f(x))^{g(x)}$ *и* $(f(x))^{\varphi(x)}$.	**3.** $x^{2x+4} = x^{20}$. ▶ Если предположить, что основание степени x является числом, то *сначала рассмотрим три особых случая (основание степени равно* −1; 0; 1*), а затем приравняем показатели степеней*: 1) при $x = -1$ получаем верное равенство $(-1)^2 = (-1)^{20}$; 2) при $x = 0$ $0^4 = 0^{20}$ — верное равенство; 3) при $x = 1$ $1^6 = 1^{20}$ — верное равенство; 4) при $2x + 4 = 20$, то есть $x = 8$, $8^{20} = 8^{20}$ — верное равенство. *Ответ:* −1; 0; 1; 8. Замечание. Если предположить, что основание x является переменной, то функция $f(x) = x^{2x+4}$ считается определенной только при $x > 0$. В этом случае данное уравнение имеет только корни 1 и 8, и получаем *ответ:* 1; 8. ◁ Таким образом, ответ к такому уравнению нельзя записать однозначно.

Объяснение и обоснование

Показательно-степенными уравнениями и неравенствами обычно называют уравнения и неравенства, содержащие выражения вида $f(x)^{g(x)}$ (в которых переменная входит и в основание, и в показатель степени).

Анализируя показательно-степенные уравнения, представленные в таблице 60, следует помнить, что в школьном курсе математики понятие уравнения на разных этапах вводилось по-разному, а именно: в 4–5 классах уравнением называлось *числовое равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой*. Значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство, называлось *корнем* или *решением* этого уравнения. Например, для уравнения $2x = 6$ корнем является значение $x = 3$.

С точки зрения приведенного определения в уравнении $2x = 6$ буквой x обозначено хотя и неизвестное нам, но конкретное число, поэтому x может принимать единственное значение $x = 3$. Но такое определение затрудняет в дальнейшем работу с уравнением. Когда x принимает единственное значение, мы не можем применять, например, графическое решение уравнения (имея только одно значение x, невозможно получить график $y = 2x$ как прямую линию на плоскости). Поэтому, начиная с 6–7 классов, *уравнение* определяется как *равенство с переменной* (а корнем или решением уравнения соответственно называется такое значение переменной, при котором это уравнение обращается в верное числовое равенство). Тогда x в уравнении $2x = 6$ — это переменная, для которой нет ни одного ограничения, и поэтому x может быть любым числом (ОДЗ уравнения: $\boldsymbol{R}$). При таком подходе каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной $2x$. Таким образом, это уравнение можно решить графически, построив графики функций $y = 2x$ и $y = 6$. Кроме того, при таком подходе можно записать уравнение в общем виде как равенство $f(x) = \varphi(x)$ и обоснованно применить свойства функций для решения уравнений.

Для всех видов уравнений, которые рассматривались в курсе алгебры или алгебры и начал анализа, приведенные два определения уравнения приводят к одному и тому же результату при решении уравнений. Но в случае показательно-степенного уравнения иногда можно получить разные ответы, используя разные подходы к определению уравнения.

Например, решим уравнение $x^{2x+1} = x^5$.

▶ Если рассматривать такое уравнение как числовое равенство, то две степени с одинаковым основанием x могут быть равными только в одном из четырех случаев. А именно: если основанием степени является одно из значений -1, 0, 1 ($x = -1$, $x = 0$, $x = 1$), то степени могут быть равными даже тогда, когда их показатели будут разными (при условии, что эти степени существуют). Во всех остальных случаях степени с одинаковым основанием будут равными только тогда, когда показатели этих степеней будут равными ($2x + 1 = 5$, то есть $x = 2$). Следовательно, для получения всех корней данного уравнения достаточно проверить значения x, равные -1, 0, 1, 2. Все эти числа являются корнями, так как при подстановке каждого из них в данное уравнение оно обращается в верное числовое равенство.

Если же рассматривать это уравнение как равенство с переменной и встать на функциональную точку зрения, то функция $f(x) = x^{2x+1}$, как правило, считается определенной только при $x > 0$, и тогда данное уравнение имеет только два корня: 1 и 2. ◁

Таким образом, в рассмотренном уравнении ответ нельзя записать однозначно (поскольку каждый из указанных подходов к определению уравнения имеет право на существование и реально используется в математике). Поэтому в подобных ситуациях приходится приводить оба варианта ответа.

Аналогичный пример приведен в таблице 60.

Обобщая приведенные выше рассуждения, заметим, что в том случае, когда при решении уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *из условия не следует, что основание степени* $f(x) > 0$, *необходимо рассмотреть три особых случая: основание* $f(x)$ *равно* -1, 0, 1 *(понятно, что в этих случаях степе-*

ни $(f(x))^{g(x)}$ *и* $(f(x))^{\varphi(x)}$ *могут быть равными даже тогда, когда показатели* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *разные), а затем приравнять показатели* $(g(x) = \varphi(x))$. Если же из условия следует, что $f(x) > 0$, то рассматриваем только один особый случай — основание степени равно 1 $(f(x) = 1)$ — и приравниваем показатели степеней $(g(x) = \varphi(x))$.

Например, решим уравнение $(x^2 - 1)^{3x-7} = (x^2 - 1)^8$.

▶ Из условия не следует, что основание степени $x^2 - 1 > 0$, следовательно, приходится рассматривать все случаи.

1) Если $x^2 - 1 = -1$, то $x^2 = 0$, и тогда $x = 0$.
Подставляя это значение в данное уравнение, имеем $(-1)^{-7} = (-1)^8$, то есть $-1 = 1$ (неверное равенство). Таким образом, $x = 0$ не является корнем данного уравнения.
2) Если $x^2 - 1 = 0$, то есть $x = \pm 1$, то при этих значениях x данное уравнение обращается в неверное числовое равенство (поскольку значения выражений 0^{-4} и 0^{-10} не существуют). Таким образом, числа 1 и -1 не являются корнями данного уравнения.
3) Если $x^2 - 1 = 1$, то есть $x = \pm\sqrt{2}$, то данное уравнение обращается в верное равенство $(1 = 1)$, следовательно, $x = \pm\sqrt{2}$ — корни данного уравнения.
4) Приравняем показатели степеней данного уравнения (основания степеней в левой и правой частях уравнения одинаковы): $3x - 7 = 8$, тогда $x = 5$ (при подстановке получаем верное равенство $24^8 = 24^8$).
Объединяя полученные результаты, получаем ответ.

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 5. ◁

З а м е ч а н и е. При $f(x) > 0$ для решения уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ можно прологарифмировать обе его части по любому числовому основанию, получить равносильное уравнение, в котором уже не придется рассматривать особый случай — он будет учтен автоматически. Это связано с тем, что функция $y = a^x$ при $a > 0$ имеет особый случай, если $a = 1$ (см. график функции $y = a^x$ при $a > 0$ на с. 378), а функция $y = \log_b x$ (где $b > 0$, $b \neq 1$) особых случаев не имеет.

Также отметим, что *при решении неравенств вида* $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{\varphi(x)}$ *обычно* используют функциональный подход и *считают, что* $f(x) > 0$.

Заметим, что в тех случаях, *когда в показательно-степенное уравнение входят выражения вида* $a^{\log_a N}$, *для решения такого уравнения может использоваться основное логарифмическое тождество*. В этом случае следует учитывать ОДЗ данного уравнения (см. пример 1 в табл. 60).

Достаточно часто для решения показательно-степенных уравнений используется логарифмирование обеих частей. Конечно, это можно сделать только тогда, когда на ОДЗ данного уравнения обе части уравнения положительны (см. пример 2 в табл. 60).

Приведем еще несколько примеров решения показательно-степенных уравнений и неравенств.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1.$

Решение

Поскольку $x = 3$ не является корнем данного уравнения (0^0 не существует), то при $x \neq 3$ обе его части положительны. После логарифмирования (по основанию 10) обеих частей данного уравнения получаем равносильные ему уравнения:

$$\lg|x-3|^{3x^2-10x+3}=\lg 1,$$
$$(3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0,$$
$$3x^2-10x+3=0 \text{ или } \lg|x-3|=0.$$

Из первого полученного уравнения имеем $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=3$ (не является корнем), а из второго $|x-3|=1$, тогда $x-3=1$ или $x-3=-1$. То есть
$$x=4 \text{ или } x=2.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; 2; 4. ◁

Комментарий

Поскольку $|x-3| \geqslant 0$, то из особых случаев можно рассмотреть только один — основание равно 0 ($|x-3|=0$, то есть $x=3$). Чтобы не рассматривать случай, когда основание равно 1, достаточно при $x \neq 3$ прологарифмировать обе части уравнения по числовому основанию (например, по основанию 10).

При $x \neq 3$ обе части данного уравнения положительны, поэтому после логарифмирования получаем уравнение, равносильное данному. Поскольку все дальнейшие преобразования являются равносильными (при $x \neq 3$), то все полученные решения (не равные 3) являются корнями данного уравнения.

Задача 2 Решите уравнение $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10.$

Комментарий

Прологарифмировать обе части данного уравнения не удается (в левой части стоит сумма), поэтому попытаемся все степени представить в виде степеней с одним и тем же числовым основанием. Учитывая, что в данном уравнении есть логарифм по основанию 2, представим все данные степени как степени с основанием 2 по формуле $u=a^{\log_a u}$, где $u>0$, $a>0$, $a \neq 1$. Тогда

$$5^{\log_2 x}=2^{\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)}=2^{\log_2 x \log_2 5}, \quad (1)$$
$$x^{\log_2 5}=2^{\log_2\left(x^{\log_2 5}\right)}=2^{\log_2 5 \log_2 x}$$

(то есть слагаемые, стоящие в левой части данного уравнения, одинаковы). После получения уравнения (2) (см. решение) можно использовать равенство (1) справа налево. Можно также записать правую часть уравнения (2) как степень числа 2 или прологарифмировать обе его части по основанию 2.

Решение

ОДЗ: $x>0$. На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$2^{\log_2 x \log_2 5}+2^{\log_2 5 \log_2 x}=10,$$

$$2 \cdot 2^{\log_2 x \log_2 5} = 10,$$
$$2^{\log_2 x \log_2 5} = 5, \qquad (2)$$
$$5^{\log_2 x} = 5,$$
$\log_2 x = 1$, $x = 2$ (принадлежит ОДЗ).

Ответ: 2. ◁

Задача 3 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Комментарий

Используем равносильные преобразования системы. Для этого учтем ОДЗ и проследим за тем, чтобы на этой ОДЗ все преобразования уравнений как в прямом, так и в обратном направлении сохраняли верные равенства.

В первом уравнении данной системы запишем все степени как степени с основанием 3 (см. выше комментарий к задаче 2). После равносильных (на ОДЗ) преобразований первого уравнения получаем систему (1) (см. решение), в которую переменные входят только в виде $\log_3 x$ и $\log_3 y$, поэтому удобно использовать замену переменных. После обратной замены применяем определение логарифма.

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ На этой ОДЗ первое уравнение заданной системы равносильно уравнениям: $3^{\log_3\left(x^{\log_3 y}\right)} + 3^{\log_3\left(y^{\log_3 x}\right)} = 18$, $3^{\log_3 y \log_3 x} + 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18$,
$2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18$, $3^{\log_3 x \log_3 y} = 9$, $3^{\log_3 x \log_3 y} = 3^2$, $\log_3 x \log_3 y = 2$.
Тогда заданная система уравнений равносильна системе
$$\begin{cases} \log_3 x \log_3 y = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Замена $\log_3 x = u$, $\log_3 y = v$ дает систему уравнений $\begin{cases} uv = 2, \\ u + v = 3. \end{cases}$

Из второго уравнения последней системы $v = 3 - u$, из первого уравнения получаем $u(3 - u) = 2$, то есть $u^2 - 3u + 2 = 0$. Отсюда $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Тогда $v_1 = 2$, $v_2 = 1$.

Обратная замена дает $\begin{cases} \log_3 x = 1, \\ \log_3 y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 y = 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x = 3, \\ y = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 9, \\ y = 3 \end{cases}$ (найденные решения входят в ОДЗ).

Ответ: (3; 9), (9; 3). ◁

Задача 4 Решите неравенство $|x-4|^{\lg(x-2)} \geqslant |x-4|^{\lg(6-x)}$.

I способ

Комментарий

Попытаемся выполнить равносильные преобразования данного неравенства, применив рассуждения, аналогичные тем, что приводились при решении показательно-степенных уравнений (см. пункт II табл. 60). Поскольку $|x-4| \geqslant 0$, то из особых случаев необходимо рассмотреть только два: основание равно 0 (то есть $x = 4$) и основание равно 1 (то есть $|x-4| = 1$). При других значениях x основание — положительное число, не равное 1. Рассмотрим два случая: 1) основание больше 1 (при переходе от степеней к показателям в данном неравенстве знак неравенства не меняется); 2) основание меньше 1, но больше 0 (при переходе от степеней к показателям в данном неравенстве знак неравенства меняется на противоположный). При таких преобразованиях получаем неравенства, равносильные данному (на его ОДЗ), поскольку можем гарантировать правильность не только прямых, но и обратных переходов.

При решении полученных простейших логарифмических неравенств учитываем, что функция $y = \lg t$ является возрастающей.

В ответ следует включить все решения полученных систем неравенств и все особые значения, которые являются решениями данного неравенства.

Решение

► ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ 6-x>0, \end{cases}$ то есть $2 < x < 6$.

При $x = 4$ данное неравенство выполняется ($0^{\lg 2} \geqslant 0^{\lg 2}$, $0 \geqslant 0$ — верное неравенство), таким образом, $x = 4$ — одно из решений этого неравенства.

Если $|x-4| = 1$ (то есть $x-4 = 1$ или $x-4 = -1$, тогда $x = 5$ или $x = 3$ — эти значения входят в ОДЗ), то данное неравенство также выполняется. При $x = 5$ и $x = 3$ получаем верное неравенство $1 \geqslant 1$. Таким образом, эти числа также являются решениями данного неравенства.

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ и $x \neq 3$ на ОДЗ данное неравенство равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} |x-4|>1, \\ \lg(x-2) \geqslant \lg(6-x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<|x-4|<1, \\ \lg(x-2) \leqslant \lg(6-x). \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ x-4<-1 \text{ или } x-4>1, \\ x-2 \geqslant 6-x \end{cases}$ или $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ -1<x-4<1, \\ x-2 \leqslant 6-x. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2 < x < 6, \\ x < 3 \text{ або } x > 5, \\ x \geqslant 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2 < x < 6, \\ 3 < x < 5, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

Таким образом, $5 < x < 6$ или $3 < x < 4$. Учитывая особые значения, которые являются решениями, получаем: $3 \leqslant x \leqslant 4$ или $5 \leqslant x < 6$.

Ответ: $[3; 4] \cup [5; 6)$. ◁

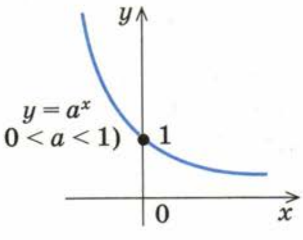
II способ решения неравенства $|x - 4|^{\lg(x-2)} \geqslant |x - 4|^{\lg(6-x)}$.

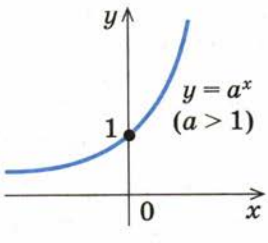
Комментарий

Решим данное неравенство методом интервалов, для этого приведем его к виду $f(x) \geqslant 0$.

Для нахождения нулей $f(x)$ необходимо решить показательно-степенное уравнение (2). Поскольку $|x - 4| \geqslant 0$, то из особых случаев необходимо рассмотреть только два — основание равно 0 (то есть $x = 4$) или основание равно 1 (то есть $|x - 4| = 1$). При других значениях x из ОДЗ в уравнении (3) основание — положительное число, не равное 1. Тогда можно приравнять показатели степеней (получаем уравнение, равносильное данному).

Для нахождения знаков $f(x)$ удобно использовать графики функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ и при $a > 1$.





Решение

▶ 1. ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 6 - x > 0, \end{cases}$ то есть $2 < x < 6$.

На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

$$|x - 4|^{\lg(x-2)} - |x - 4|^{\lg(6-x)} \geqslant 0. \qquad (1)$$

2. Пусть $f(x) = |x - 4|^{\lg(x-2)} - |x - 4|^{\lg(6-x)}$. Нули $f(x)$:

$$|x - 4|^{\lg(x-2)} - |x - 4|^{\lg(6-x)} = 0. \qquad (2)$$

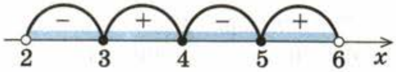
На ОДЗ уравнение (2) равносильно уравнению

$$|x - 4|^{\lg(x-2)} = |x - 4|^{\lg(6-x)}. \qquad (3)$$

При $x = 4$ равенство (3) выполняется ($0^{\lg 2} = 0^{\lg 2}$; $0 = 0$ — верное равенство), таким образом, $x = 4$ — корень уравнения (3).

Если $|x - 4| = 1$ (то есть $x - 4 = 1$ или $x - 4 = -1$, тогда $x = 5$ или $x = 3$), то равенство (3) также выполняется. При $x = 5$ и $x = 3$ получаем верное равенство $1 = 1$. Таким образом, эти числа также являются корнями уравнения (3).

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ и $x \neq 3$ на ОДЗ уравнение (3) равносильно уравнению $\lg(x - 2) = \lg(6 - x)$. Тогда $x - 2 = 6 - x$, то есть $x = 4$ — не удовлетворяет условию $x \neq 4$. Следовательно, на последнем множестве уравнение (3) корней не имеет.



3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (см. рисунок).

Ответ: $[3;\ 4] \cup [5;\ 6)$. ◁

Задача 5 Решите неравенство $x^{\log_a x+1} > a^2 x$.

Комментарий

На ОДЗ обе части неравенства положительны, поэтому попытаемся прологарифмировать обе части неравенства. Поскольку в данное неравенство уже входит $\log_a x$, то удобно прологарифмировать по основанию a. Но при логарифмировании по основанию больше 1 знак неравенства не меняется, а при логарифмировании по основанию меньше 1 знак неравенства меняется. Приходится рассматривать два случая (в каждом из них получаем неравенство, равносильное данному на его ОДЗ).

Решение

▶ ОДЗ: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Прологарифмируем обе части неравенства.

1) При $a > 1$ данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенствам:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) > \log_a(a^2 x),\ (\log_a x + 1)\log_a x > \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x > 2 + \log_a x,\ \ \log_a^2 x > 2.$$

Таким образом, $\log_a x < -\sqrt{2}$ или $\log_a x > \sqrt{2}$.

То есть $\log_a x < \log_a a^{-\sqrt{2}}$ или $\log_a x > \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Учитывая ОДЗ ($x > 0$) и то, что $a > 1$, получаем $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ или $x > a^{\sqrt{2}}$.

2) При $0 < a < 1$ данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенствам:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) < \log_a(a^2 x),\ (\log_a x + 1)\log_a x < \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x < 2 + \log_a x,\ \ \log_a^2 x < 2.$$

Таким образом, $-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$, то есть $\log_a a^{-\sqrt{2}} < \log_a x < \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Учитывая ОДЗ ($x > 0$) и то, что $0 < a < 1$, получаем $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

Ответ: 1) при $a > 1$ $x \in \left(0;\ a^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(a^{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$; 2) при $0 < a < 1$ $x \in \left(a^{\sqrt{2}};\ a^{-\sqrt{2}}\right)$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, какими способами можно решать показательно-степенные уравнения.
2. Объясните, почему при переходе от уравнения $x^{\lg x} = x^2$ к уравнению $\lg x = 2$ (основания равны — приравняли показатели) теряется корень данного уравнения.

Упражнения

1. Решите уравнение:

1) $x^{\lg x} = x^3$; 2) $x^{2\lg x} - 10x = 0$; 3) $x^{2\log_{16} x} = \dfrac{64}{\sqrt{x}}$; 4) $x^{\log_x (x^2-3)} = 2x$;

5) $x^{x+2} = x^6$: а) при $x > 0$; б) при $x \in \boldsymbol{R}$; 6) $|x-1|^{x^2-1} = 1$;

7) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3 (x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$; 8) $4^{\log_4^2 x} + x^{\log_4 x} = 8$;

9) $2x^{2\lg(x-1)} = 1 + (x-1)^{\lg x}$.

2 (СПбГИЭУ). Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

3 (ВГУ). Решите неравенство:

1) $(x^2 - x + 1)^{x^2-2{,}5x+1} < 1$; 2) $|x+1|^{x^2-2x} \geqslant |x+1|^3$;

3) $|x-2|^{\log_3(x-2)} \leqslant |x-2|^{\log_3(8-x)}$; 4) $x^{\log_a x+4} < a^4 x$;

5) $x^{3+\log_a x} > a^2 x^2$.

§ 37. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Некоторые показательные и логарифмические уравнения можно решить, используя свойства соответствующих функций. Напомним основные приемы, которые применяются при решении уравнений с помощью свойств функций, и приведем примеры решения уравнений и неравенств, содержащих показательные, логарифмические и другие функции.

Таблица 61

Ориентир	Пример
Конечная ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.	$2^{\sqrt{x-1}} + 3^x = 4^{1-\sqrt{2-2x}}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 2-2x \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$ Итак, ОДЗ: $x = 1$.

Продолж. табл. 61

Проверка. $x = 1$ — корень $\left(2^{\sqrt{1-1}} + 3^1 = 4^{1-\sqrt{2-2}},\ 4 = 4\right)$.

Других корней нет, поскольку в ОДЗ входит только одно число.

Ответ: 1. ◁

2. Оценка значений левой и правой частей уравнения

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = g(x) \\ \hline f(x) \geqslant a \\ g(x) \leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

Если требуется решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно будут равны a.

$$2^{x^2} = \cos\frac{x}{2}.$$

▶ Оценим значения левой и правой частей данного уравнения:

$f(x) = 2^{x^2} \geqslant 1$ (поскольку $x^2 \geqslant 0$);

если $g(x) = \cos\frac{x}{2}$, то $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

Итак, $f(x) \geqslant 1$, $g(x) \leqslant 1$. Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2^{x^2} = 1, \\ \cos\frac{x}{2} = 1. \end{cases}$

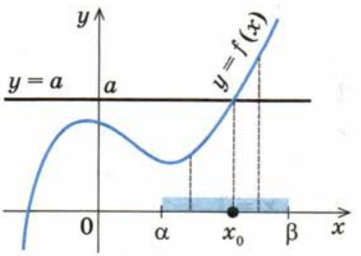
Из первого уравнения получаем $x^2 = 0$, то есть $x = 0$, что удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: 0. ◁

3. Использование монотонности функций

Схема решения уравнения

1. *Подбираем один или несколько корней уравнения.*
2. *Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку значений левой и правой частей уравнения).*



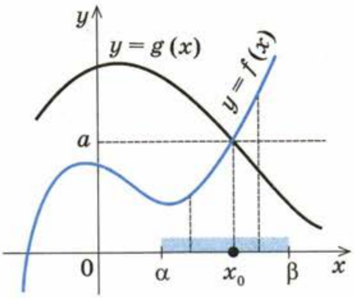
Теоремы о корнях уравнения

1. **Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.**

Пример

Уравнение $2^x + 3^x = 5$ имеет единственный корень $x = 1$ ($2^1 + 3^1 = 5$, то есть $5 = 5$), поскольку функция $f(x) = 2^x + 3^x$ возрастает (на всей области определения $\boldsymbol{R}$) как сумма двух возрастающих функций.

Продолж. табл. 61

	**2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.** Пример Уравнение $5^x = 27 - x$ имеет единственный корень $x = 2$ ($5^2 = 27 - 2$, то есть $25 = 25$), поскольку $f(x) = 5^x$ возрастает, а $g(x) = 27 - x$ убывает (при всех $x \in \boldsymbol{R}$).

4. «Ищи квадратный трехчлен»	
Ориентир	Пример
Попытайтесь рассмотреть заданное уравнение как квадратное относительно некоторой переменной (или относительно некоторой функции).	$4^x - (7 - x)\cdot 2^x + 12 - 4x = 0.$ ▶ Запишем $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем $t^2 - (7 - x)\cdot t + 12 - 4x = 0.$ Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t. Его дискриминант $D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$ Тогда $t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x + 1)}{2}$, то есть $t_1 = 4$, $t_2 = 3 - x$. Обратная замена дает $2^x = 4$ (отсюда $x = 2$) или $2^x = 3 - x$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 1$, так как $f(x) = 2^x$ возрастает, а $g(x) = 3 - x$ убывает (при всех $x \in \boldsymbol{R}$). *Ответ:* 1; 2. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Решение

▶ Если $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$. Получаем $t + \frac{1}{t} = 4$.

Отсюда $t^2 - 4t + 1 = 0$. Тогда

$$t_1 = 2 - \sqrt{3},\quad t_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Обратная замена дает

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$ (отсюда $x = 2$)

Комментарий

Замечаем, что

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

Таким образом, если $\sqrt{2-\sqrt{3}} = a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{a}$. То есть данное уравнение имеет вид $a^x + \frac{1}{a^x} = 4$, и его или $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$ (отсюда $x = -2$).

Ответ: -2; 2. ◁

можно решить с помощью замены $a^x = t$. Но теперь эту замену можно непосредственно применить для данного уравнения, не вводя промежуточные обозначения. После обратной замены учитываем, что

$2+\sqrt{3} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

Задача 2 Решите уравнение $4^x + \dfrac{1}{4^x} + 2^x - \dfrac{1}{2^x} - 4$.

Комментарий

Если привести все степени к одному основанию 2 и обозначить $2^x = t$, то получим уравнение (1) (см. решение), в котором можно ввести замену $t - \dfrac{1}{t} = u$ $\left(\text{тогда } u^2 = t^2 - 2 + \dfrac{1}{t^2}, \text{ отсюда } t^2 + \dfrac{1}{t^2} = u^2 + 2\right)$. На ОДЗ данного уравнения (все $x \in \boldsymbol{R}$) все замены и обратные замены являются равносильными преобразованиями этого уравнения. Таким образом, решив уравнения, полученные в результате замен, и выполнив обратные замены, мы получим корни данного уравнения.

Решение

▶ $$2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} + 2^x - \frac{1}{2^x} = 4.$$

Замена $2^x = t$ дает уравнение

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + t - \frac{1}{t} = 4. \qquad (1)$$

Обозначим $t - \dfrac{1}{t} = u$, тогда $t^2 + \dfrac{1}{t^2} = u^2 + 2$, таким образом, из уравнения (1) получаем уравнение $u^2 + u - 2 = 0$, которое имеет корни: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$.

Обратная замена дает $t - \dfrac{1}{t} = 1$ или $t - \dfrac{1}{t} = -2$.

Тогда $t^2 - t - 1 = 0$ или $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Получаем $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $t_3 = -1+\sqrt{2}$, $t_4 = -1-\sqrt{2}$.

Тогда $2^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{отсюда } x = \log_2 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ или $2^x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{корней нет, поскольку } \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$, или $2^x = -1+\sqrt{2}$ $\left(\text{отсюда } x = \log_2(\sqrt{2}-1)\right)$, или $2^x = -1-\sqrt{2}$ (корней нет, поскольку $-1-\sqrt{2} < 0$).

Ответ: $\log_2 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2(\sqrt{2}-1)$. ◁

Задача 3 Решите уравнение $4^x + \frac{1}{4^x} = 2\cos 2x$.

I способ

Комментарий

Учитывая, что $4^x > 0$, получаем, что в левой части уравнения стоит *сумма двух взаимно обратных положительных чисел, которая всегда больше или равна* 2. (Действительно, если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0$, таким образом, при всех $a > 0$ $\quad a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.)

Для оценки значений правой части достаточно вспомнить, что областью значений функции $\cos 2x$ является промежуток $[-1;\ 1]$, таким образом, $-2 \leqslant 2\cos 2x \leqslant 2$.

Решение

▶ Оценим значения левой и правой частей уравнения. $f(x) = 4^x + \frac{1}{4^x} \geqslant 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел. Если $g(x) = 2\cos 2x$, то $-2 \leqslant g(x) \leqslant 2$. Таким образом, $f(x) \geqslant 2$, $g(x) \leqslant 2$, тогда данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4^x + \frac{1}{4^x} = 2, \\ 2\cos 2x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения, используя замену $4^x = t$, получаем

$$t + \frac{1}{t} = 2, \text{ то есть } t^2 - 2t + 1 = 0. \text{ Отсюда } t = 1.$$

Тогда $4^x = 1$, отсюда $x = 0$, что удовлетворяет и второму уравнению.
Ответ: 0. ◁

II способ решения уравнения $4^x + \frac{1}{4^x} = 2\cos 2x$.

Комментарий

Если обозначить $4^x = t$, то данное уравнение приводится к уравнению (2) (см. решение), которое можно рассматривать как квадратное относительно переменной t. Заметим, что $t = 4^x \neq 0$, поэтому при таких значениях t уравнения (1) и (2) являются равносильными. Далее используем условие существования корней квадратного уравнения.

Решение

▶ После замены $4^x = t$ $(t > 0)$ из данного уравнения получаем равносильное уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 2\cos 2x, \tag{1}$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$t^2 - (2\cos 2x)\,t + 1 = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (2) как квадратное относительно переменной t.

Тогда его дискриминант $D = 4\cos^2 2x - 4$.

Уравнение (2) может иметь корни только тогда, когда $D \geqslant 0$, то есть когда $4\cos^2 2x - 4 \geqslant 0$. Отсюда

$$\cos^2 2x \geqslant 1. \qquad (3)$$

У этого неравенства знак «больше» не может выполняться ($\cos^2 2x \leqslant 1$ всегда), таким образом, неравенство (3) равносильно уравнению $\cos^2 2x = 1$. Тогда $\cos 2x = 1$ или $\cos 2x = -1$. Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем две системы: $\begin{cases}\cos 2x = 1,\\ t^2 - 2t + 1 = 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos 2x = -1,\\ t^2 + 2t + 1 = 0.\end{cases}$ Во второй системе из второго уравнения имеем $t = -1$, что не удовлетворяет условию $t > 0$. Таким образом, данное уравнение равносильно только первой системе. Из второго уравнения первой системы имеем $t = 1$, тогда $4^x = 1$, то есть $x = 0$, что удовлетворяет и первому уравнению этой системы.

Ответ: 0. ◁

Задача 4 Решите уравнение $2^{|x|} - |2^{x+1} - 2| = 2^{x+1}$.

Комментарий

Для решения уравнения с несколькими модулями можем применить общую схему (с. 77):

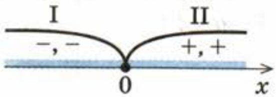
1) найти ОДЗ;
2) найти нули всех подмодульных функций;
3) отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;
4) найти решения уравнения в каждом из промежутков.

Решение

▶ ОДЗ: $\boldsymbol{R}$.

Нули подмодульных функций: $x = 0$ и $2^{x+1} - 2 = 0$, $2^{x+1} = 2$, $x + 1 = 1$, $x = 0$.

Этот нуль ($x = 0$) разбивает ОДЗ на два промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (см. рисунок).



Промежуток I. При $x \in (-\infty; 0]$ имеем уравнение $2^{-x} + 2^{x+1} - 2 = 2^{x+1}$. Тогда $2^{-x} = 2$, таким образом, $x = -1 \in (-\infty; 0]$.

Промежуток II. При $x \in [0; +\infty)$ имеем уравнение $2^x - (2^{x+1} - 2) = 2^{x+1}$. Тогда $2^x = \frac{2}{3}$, отсюда $x = \log_2 \frac{2}{3}$. Но $\log_2 \frac{2}{3} < 0$, таким образом, в промежутке II данное уравнение корней не имеет.

Ответ: −1. ◁

Задача 5 Решите уравнение $\lg^2(x + 1) = \lg(x + 1)\lg(x - 1) + 2\lg^2(x - 1)$.

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x + 1 > 0,\\ x - 1 > 0.\end{cases}$ То есть $x > 1$.

Комментарий

Если выполнить замену $\lg(x + 1) = u$, $\lg(x - 1) = v$, то получим *уравнение* $u^2 = uv + 2v^2$, *все члены которого*

Поскольку $x = 2$ не является корнем данного уравнения, то при делении обеих частей уравнения на $\lg^2(x-1) \neq 0$ получаем равносильное (на ОДЗ при $x \neq 2$) уравнение

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)} = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} + 2.$$

После замены $t = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$ имеем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, корни которого:

$$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

Выполнив обратную замену, получаем

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = -1 \text{ или } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = 2.$$

Тогда на ОДЗ (при $x \neq 2$) имеем равносильные уравнения:

$\lg(x+1) = -\lg(x-1)$ или $\lg(x+1) = 2\lg(x-1)$,

$\lg(x+1) = \lg(x-1)^{-1}$ или $\lg(x+1) = \lg(x-1)^2$,

$x+1 = \frac{1}{x-1}$ или $x+1 = (x-1)^2$,

$x^2 - 1 = 1$ или $x + 1 = x^2 - 2x + 1$,

$x^2 = 2$ или $x^2 - 3x = 0$,

$x = \pm\sqrt{2}$ или $x = 0$, или $x = 3$.

Учитывая ОДЗ, получаем

$x = \sqrt{2}$ или $x = 3$.

Ответ: $\sqrt{2}$; 3. ◁

имеют одинаковую суммарную степень — два. Напомним, что такое уравнение *называется однородным и решается делением обеих частей на наибольшую степень одной из переменных*. Разделим, например, обе части на v^2 (то есть на $\lg^2(x-1)$).

Чтобы не потерять корни уравнения при делении на выражение с переменной, необходимо те значения переменной, при которых это выражение равно нулю, рассмотреть отдельно. Значение x, при котором $\lg(x-1) = 0$ (тогда $x - 1 = 1$), то есть $x = 2$, подставляем в данное уравнение.

Для реализации полученного плана решения не обязательно вводить переменные u и v, достаточно заметить, что данное уравнение однородное, разделить обе части на $\lg^2(x-1)$, а затем ввести новую переменную t.

В конце учитываем, что все преобразования были равносильными на ОДЗ, следовательно, необходимо выбирать только те из найденных корней, которые входят в ОДЗ.

Задача 6 Решите уравнение $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right) = 0.$

Комментарий

Логарифмические функции, стоящие в левой части данного уравнения, принимают только неотрицательные значения.

Действительно, на всей области определения $1+\sqrt{x-2} \geqslant 1$, таким образом, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right) \geqslant 0$; аналогично, поскольку $1 - |x^2 - 4| \leqslant 1$, то на своей области определения $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right) \geqslant 0$. *В этом случае сумма двух неотрицательных функций может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждая из этих функций равна нулю.*

Заметим, что при переходе от данного уравнения к системе уравнений ОДЗ не изменяется, таким образом, ее можно не записывать в явном виде. При решении полученных простейших логарифмических уравнений ОДЗ также учитывается автоматически, поэтому ее можно вообще не записывать в решение.

Решение

▶ Поскольку на всей области определения $\log_2(1+\sqrt{x-2})\geqslant 0$ и $\log_{\frac{1}{3}}(1-|x^2-4|)\geqslant 0$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2(1+\sqrt{x-2})=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}(1-|x^2-4|)=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тогда $\sqrt{x-2}=0$, то есть $x = 2$, что удовлетворяет и второму уравнению системы.

Ответ: 2. ◁

Задача 7 (МГУ, ИСАА) При каких значениях параметра a неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$ выполняется для любых значений x?

Комментарий

Сначала воспользуемся формулой $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Далее запишем правую часть неравенства как значение логарифмической функции и, переходя к аргументу, учтем, что в случае, когда основание этой функции больше 1, функция возрастает, а когда меньше 1 (но больше 0) — убывает.

При дальнейшем анализе полученных неравенств учитываем, что неравенство $\sin t > b$ выполняется для любых значений t тогда и только тогда, когда $b < -1$, а неравенство $\sin t < c$ — когда $c > 1$.

Решение

▶ Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Это неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}\frac{2a-15}{5}>1,\\ \frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}0<\frac{2a-15}{5}<1,\\ 0<\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} a>10, \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>5-\frac{a}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ \frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<5-\frac{a}{2}. \end{cases}$

Неравенства с переменной x в последней совокупности систем будут выполняться для любых значений x при условии:

$\begin{cases} a>10, \\ 5-\frac{a}{2}<-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ \frac{5-a}{2}<-1, \\ 5-\frac{a}{2}>1. \end{cases}$ То есть $\begin{cases} a>10, \\ a>12 \end{cases}$ или $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ a>7, \\ a<8. \end{cases}$

Тогда $a > 12$ или $7{,}5 < a < 8$.

Ответ: при любом $a \in (7{,}5;\ 8) \cup (12;\ +\infty)$. ◁

Задача 8 При каких значениях параметра а уравнение $\log_2 (4^x - a) = x$ имеет единственный корень?

Комментарий

Выполняя равносильные преобразования данного уравнения, учитываем, что при использовании определения логарифма для решения этого простейшего логарифмического уравнения его ОДЗ учитывается автоматически.

При выполнении замены переменной в задании с параметром учитываем, что после замены требование задачи может измениться.

Исследуя расположение корней квадратного трехчлена $f(t) = t^2 - t - a$, применим условия, приведенные на с. 104 в таблице 13 (для записи соответствующих условий используем обозначение: D — дискриминант, t_0 — абсцисса вершины параболы). Как известно, *для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(t)$ (с положительным коэффициентом при t^2) были расположены по разные стороны от числа A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(A) < 0$.*

Решение

▶ Данное уравнение равносильно уравнению

$$4^x - a = 2^x. \qquad (1)$$

То есть $2^{2x} - a = 2^x$. *Замена* $2^x = t$ $(t > 0)$ дает уравнение

$$t^2 - t - a = 0. \qquad (2)$$

Требование задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение (2) будет иметь единственный положительный корень. Это будет в одном из двух случаев:

1) уравнение (2) имеет единственный корень, и он положительный;
2) уравнение (2) имеет два корня, из которых только один положительный, а второй — отрицательный или нуль.

Для первого случая получаем $\begin{cases} D=0, \\ t_0>0, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} 1+4a=0, \\ t_0=\frac{1}{2}>0. \end{cases}$

Таким образом, $a=-\frac{1}{4}$.

Для второго случая значение $t = 0$ исследуем отдельно.

При $t = 0$ из уравнения (2) получаем $a = 0$. При $a = 0$ уравнение (2) имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Таким образом, условие задачи при $a = 0$ выполняется.

Остается еще один случай — корни уравнения (2) имеют разные знаки (расположены по разные стороны от нуля). Это будет тогда и только тогда, когда будет выполняться условие $f(0) < 0$ (где $f(t) = t^2 - t - a$), то есть условие $-a < 0$, тогда $a > 0$. Объединяя все результаты, получаем ответ.

Ответ: при $a=-\frac{1}{4}$ или $a \geqslant 0$ данное уравнение имеет единственный корень. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно применить свойства функций к решению показательных и логарифмических уравнений.

Упражнения

Решите уравнение **(1–5)**.

1. 1) $2^{2x} = 5 - x$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$; 3) $3^x + 4^x = 5^x$; 4) $2^x+2^{-x}=2\cos\frac{x}{3}$;
5) $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}x+4$; 6) $\log_2(3^x + 4) = 2 - 5^x$; 7) $\log_2|x| = 5 - x^2$;
8) $\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$; 9) $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$.

2 (МЭСИ). 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$;
3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

3. 1) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$; 2) $x^2 + (x - 3)\log_2 x = 4x - 3$;
3) $2\lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1)\cdot\lg(2x + 1)$.

4 (УрГУ). 1) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$; 2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}}x\right|+3=\left|1+\log_5 x\right|$.

5 (МГУ, ВМК). 1) $25^x - (a - 1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$; 2) $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a$.

6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+2^x=y+2^y, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=y-x, \\ x^3+y^3=54. \end{cases}$

7 (МГТУ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4^x + a\cdot 2^{x+1} - a = 0$ не имеет корней.

8 (МИСиС). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a\cdot 9^x + 4(a - 1)\cdot 3^x + a > 1$ выполняется при всех x.

9 (МГУ, ВМК). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3^x + 3^{-x} = 2\cos x + a + 4$ имеет единственный корень.

10 (СПбГУКиТ). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_3(9^x + a) = x$ имеет единственный корень.

11 (СПбГУТ). Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения $|\lg x| = -(x-1)^2 + a$.

12. Сколько корней имеет уравнение $\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$ в зависимости от значения параметра a?

13. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\frac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$ имеет решения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 5

Вычислите **(1–4)**.

1 (СПбГУАП). 1) $10\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 2) $9^{\log_{16}2+\log_3\sqrt{5}}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$; 4) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. 1) $\sqrt[4]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+64^{\log_4 5}$; 2) (МГУИЭ) $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}}+\log_4 9\cdot\log_3 4-7^{\log_{\sqrt{7}}3}$;

3) (ГФА) $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11}9\cdot\log_5 121$; 4) $\left(15+3^{1+\log_3 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4$;

5) $\left(30-5^{1+\log_5 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{5}\cdot\log_5 4$.

3 (УрГУ). 1) $\frac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$; 2) $\log_{7,3}\sqrt[5]{8}:\log_{7,3}\sqrt[20]{8}$;

3) $\log_2 27-2\log_2 3+\log_2\frac{2}{3}$; 4) $\log_6 34-\log_6 17+\log_6 18$.

4 (РЭА). 1) $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}}\cdot(0,25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $49^{0,5(\log_7 9-\log_7 6)}-16\cdot 5^{-\log_{\sqrt{5}}4}$.

5 (ВШЭ). 1) Найдите $\log_{b^{-\frac{1}{4}}}\left(\frac{a^4}{b^6}\right)$, если $\log_a b=-5$.

2) Найдите $\log_{b^5}\left(a^5b^5\right)$, если $\log_a b=5$.

3) Найдите $\log_{b^6}\left(a^6b^6\right)$, если $\log_a b=6$.

4) Найдите $\lg 800$, если $\lg 2=0,301$.

6 (МФТИ). 1) Найдите $\log_{15}81$, если $\log_{75}\sqrt[3]{9}=a$.

2) Найдите $\log_4 20$, если $\lg 2=a$.

3) Найдите $\log_{70}32$, если $\log_{70}5=a$, $\log_{70}7=b$.

4) Найдите $\log_{30}12$, если $\log_{24}3=a$, $\log_{24}5=b$.

Сравните значения данных числовых выражений **(7–8)**.

7 (МГУ, биол. ф-т). 1) $\log_{0,5}\frac{7}{4}$ и $\log_{0,125}\frac{7}{164}$; 2) $\log_{0,25}\frac{5}{256}$ и $\log_{0,5}\frac{5}{16}$;

3) $\sqrt{11}$ и $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{3}{2}\log_8 2}$; 4) $\sqrt{15}$ и $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)\cdot 2\log_{27}3}$; 5) $\sqrt{8}$ и $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9}$.

8. 1) $7^{\log_5 2}-0{,}1$ и $2^{\log_5 7}$; 2) $5^{\log_3 7}+0{,}1$ и $7^{\log_3 5}$; 3) $2^{\log_7 3}+0{,}1$ и $3^{\log_7 2}$.

Найдите область определения функции **(9–10)**.

9. 1) (ВШЭ) $y=\sqrt{\log_2(x^2-2x-2)}$; 2) (ВШЭ) $y=\sqrt{\log_4(x^2-4x-4)}$;

3) (МГУ, физ. ф-т) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}$;

4) (МГУ, физ. ф-т) $y=\sqrt{1-\log_4(x^2-3x)}$.

10. 1) $f(x)=\sqrt{2\cdot 3^{1-x}+1-3^x}$; 2) $f(x)=\lg\left((1{,}25)^{1-x^2}-(0{,}4096)^{1+x}\right)$;

3) $f(x)=\sqrt{27^x-9^{x^2+0{,}5}}$; 4) $f(x)=\sqrt{(4-x)(3^x-9)}$.

11 (ЕГЭ С). Найдите множество значений функции:

1) $y=\log_{0,1}\left(\dfrac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right)$; 2) $y=\log_{0,25}\left(\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}\right)$;

3) $y=\log_{0,5}\left(\dfrac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}\right)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{7}}\left(\dfrac{10+\log_7(7+|x|)}{77}\right)$.

Решите уравнение **(12–13)**.

12 (ЕГЭ С). 1) $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3}=504^{x-2}$; 2) $2^{9x+9}\cdot 3^{7x+3}\cdot 5^{6x}=720^{x+3}$;

3) $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x}=360^{x+2}$; 4) $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

13 (ЕГЭ С). 1) $3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$;

2) $2\log_{12}\left(x+\dfrac{6}{x-5}\right)=3\log_{12}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}\right)+5$;

3) $\sqrt{33+\dfrac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$; 4) $\sqrt{7-\dfrac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0{,}5\sqrt{x}\right)$.

14 (ЕГЭ С). При каких значениях a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

15 (ЕГЭ С). При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ будет больше единицы при всех x?

16 (ЕГЭ С). При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

17 (ЕГЭ С). При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

18 (ЕГЭ С). При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всех допустимых значениях x?

19 (ЕГЭ С). При каких значениях a выражение $(\cos x)^{\log_3(\cos x)-|a|}$ больше выражения $3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 1

Основные свойства числовых равенств и неравенств	
Свойства числовых равенств	Свойства числовых неравенств
1. Если $a = b$, то $b = a$	1. Если $a > b$, то $b < a$
2. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (*транзитивность равенства*)	2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (*транзитивность неравенства*)
3. Если $a = b$, то $a + c = b + c$	3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$
4. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$	4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$
5. Если $a = b$ и $c \neq 0$, то $ac = bc$	5. а) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ б) Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$
6. Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$	6. Если $a > b$ $(a > 0,\ b \geqslant 0)$ и $c > d$ $(c > 0,\ d \geqslant 0)$, то $ac > bd$
7. Если $a = b$, то $a^n = b^n$	7. а) Если $a > b$ $(a > 0,\ b \geqslant 0)$, то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Если $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Если $a = b$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$, то $\sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a = b$, то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Если $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a > b$, то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Если $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Если $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $ab < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$
11. $\frac{a}{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$	11. а) $\frac{a}{b} > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $\frac{a}{b} < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$

Таблица 2

Нахождение области определения функции

№	Вид функции	Ограничения, которые учитываются при нахождении области определения функции*	
1	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	*Знаменатель дроби не равен нулю*
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$	$f(x)\geqslant 0$	*Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение*
3	$y=\lg(f(x))$	$f(x)>0$	*Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение*
4	$y=\log_{f(x)}a$ $(a>0)$	$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)\neq 1\end{cases}$	*В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице*
5	$y=\operatorname{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(k\in Z)$	*Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное* $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (*k — целое*)
6	$y=\operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq\pi k$, $k\in Z$	*Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное* πk (*k — целое*)
7	$y=\arcsin(f(x))$	$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1$, то есть $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$	*Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице*
8	$y=\arccos(f(x))$		
9	$y=x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральное*	x — любое число	
	б) α — *целое отрицательное или нуль*	$x\neq 0$	
	в) α — *нецелое положительное число*	$x\geqslant 0$	
	г) α — *нецелое отрицательное число*	$x>0$	

* При записи этих ограничений предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на рассматриваемом множестве.

Таблица 3

Системы уравнений	
Понятия системы и ее решений	**Примеры**
Если ставится задача найти все общие решения двух (или больше) уравнений с одной или несколькими переменными, то говорят, что требуется решить **систему** уравнений. Записывают систему уравнений, объединяя их фигурной скобкой. ***Решением системы*** **называется такое значение переменной или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), которые удовлетворяют всем уравнениям системы.** *Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.* Если система не имеет решения, то ее называют несовместной.	$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя переменными. Пара чисел (5; 1), то есть $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ — решение системы. $\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трех уравнений с тремя переменными. Тройка (1; 4; 3), то есть $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ — одно из решений системы.
Равносильность систем уравнений	
Две системы уравнений называются *равносильными на некотором множестве*, если на этом множестве они имеют одинаковые решения (то есть каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой). Если изменить порядок уравнений заданной системы, то получим систему, равносильную заданной. **Если одно из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение, то получим систему, равносильную заданной.**	***Областью допустимых значений (ОДЗ) системы*** **называется общая область определения всех функций, входящих в запись этой системы.** Все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.

Продолж. табл. 3

Основные способы решения систем уравнений
Способ подстановки
Выражаем из одного уравнения системы одну переменную через другую (или через другие) и подставляем полученное выражение вместо соответствующей переменной во все другие уравнения системы (затем решаем полученное уравнение или систему и подставляем результат в выражение для первой переменной).
Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=3. \end{cases}$ Решение. Из первого уравнения системы $y = 2x - 3$. Подставляем во второе уравнение системы и получаем $x + 2x - 3 = 3$. Отсюда $x = 2$. Тогда $y = 2x - 3 = 1$. *Ответ:* (2; 1).
Способ сложения
Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$ (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной.
Пример. Решить систему $\begin{cases} 5x-3y=9, & \vert \cdot 2 \\ 3x+2y=13. & \vert \cdot 3 \end{cases}$ Решение. Умножим обе части первого уравнения системы на 2, а второго — на 3 (чтобы получить как коэффициенты при переменной y противоположные числа) и почленно сложим полученные уравнения. Из полученного уравнения находим значение x, подставляем результат в любое уравнение системы и находим значение y. $\begin{cases} 10x-6y=18, \\ 9x+6y=39. \end{cases} \vert +$ $19x=57,$ $x=3.$ Тогда $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$. *Ответ:* (3; 2).

Продолж. табл. 3

Графическое решение систем уравнений с двумя переменными

Выполняем равносильные преобразования заданной системы так, чтобы удобно было строить графики всех уравнений, входящих в систему. Затем строим соответствующие графики и находим координаты точек пересечения построенных линий — эти координаты и являются решениями системы.

Примеры

1. Решить графически систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Решение. Заданная система равносильна системе $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графиком каждого из уравнений системы является прямая.

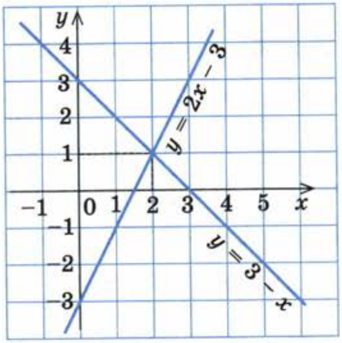
Для построения прямой достаточно построить две ее точки. Например, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2



Графики пересекаются в единственной точке M (2; 1). Итак, пара чисел (2; 1) — единственное решение заданной системы.

Ответ: (2; 1).

2. Решить графически систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Решение. Заданная система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

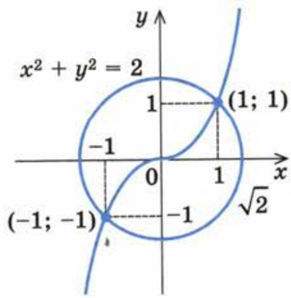


График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а график второго — кубическая парабола $y = x^3$.

Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами (−1; −1) и (1; 1).

Ответ: (−1; −1), (1; 1) — решение системы.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Раздел 1

§ 1. **13.** 34. **14.** 80 %.

§ 2. **Пункт 2.1.** **1.** 1) 2,5; -2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) -3; -2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **2.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;\ +\infty)$; 3) $x \neq -1$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $[1;\ 5]$; 8) $[-3;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 9) $[-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$; 11) $[0;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; 12) $\boldsymbol{R}$. **3.** 1) $\{5\}$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $[-5;\ +\infty)$; 7) $[3;\ +\infty)$. **4.** а) $D(f) = [-3;\ 5]$; $E(f) = [-3;\ 2]$; возрастает: $[-2;\ 3]$; убывает: $[-3;\ -2]$ и $[3;\ 5]$; $f(1) = 0$; б) $D(f) = [0;\ 6]$; $E(f) = [0;\ 4]$; возрастает: $[0;\ 2]$ и $[5;\ 6]$; убывает: $[2;\ 5]$; $f(1) = 2$. **10.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая; 4) убывающая. **11.** 2) 4. **Пункт 2.2.** **1.** 3) четная; 4) нечетная; 5) четная и нечетная; 6) нечетная. **2.** 1) $k > 0$, $b > 0$; 2) $k < 0$, $b < 0$; 3) $k > 0$, $b < 0$. **6.** 1) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$; 2) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$; 4) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

§ 3. **Пункт 3.1.** **2.** 1) а) Да; б) да; 2) а) да; б) нет. **6.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет. **7.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) -4; 3) -4; 4) -3; $\frac{2}{3}$. **8.** 1) Корней нет; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) корней нет. **9.** 1) $x \neq 1{,}5$ (условие для корней); 2) $x \geqslant 0$. **11.** 1) 7; 2) 0; 4,5; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **Пункт 3.2.** **1.** 1) 2; 2) 3; 3) (1; 0). **2.** 1) 0; 2) 0; 3) -1; 4) 0,5. **3.** 1) 3; 2) $(-2;\ 5)$; 3) $(3;\ 1)$; 4) корней нет; 5) $(2;\ 1)$; 6) $(-1;\ 2;\ -3)$. **4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6; 5) 2; 6) 1. **5.** 1) $(-5;\ -5)$; $(2;\ 2)$; 2) $(-2;\ -2)$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $(-2;\ -2)$; $(2;\ 2)$.

§ 4. **1.** 1) $(-\infty;\ -2] \cup (1;\ 2] \cup (4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -2) \cup (3;\ 8)$; 3) $(4;\ 5]$; 4) $[-10;\ -2) \cup (4;\ +\infty)$. **2.** 1) $[-2;\ -1] \cup [1;\ 2]$; 2) $(-\infty;-1) \cup \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$; 3) $(-\infty;\ -3] \cup (0;\ 3]$; 4) $(-6;\ 2)$. **3.** 1) $(-2;\ 2) \cup [4;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ -1)$ или 1; 3) $(-\infty;\ 0) \cup [2;\ 3]$; 4) $(-\infty;\ -1) \cup [4;\ +\infty)$.

§ 5. **1.** 1) $-\frac{2}{3}$; 4; 2) 0,5; 3,5; 3) -1; 2; 3; 6. **2.** 1) $(-\infty;\ -1) \cup (4;\ +\infty)$; 2) $(-0{,}8;\ 2)$; 3) $(-3;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(-2;2\frac{2}{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) -1; -3. **4.** 1) $[1;\ 3]$; 2) -8; 12; 3) $[-5;\ 8]$. **5.** 1) Решений нет; 2) $[2;\ +\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right) \cup (8;+\infty)$. **6.** 1) $[1;\ 2]$; 2) $-2\frac{1}{3}$; 3. **7.** 1) -3; 5; 2) $[-1;\ 4]$. **8.** 1) $-\frac{2}{3}$; 0,5; 2; 2) $-2-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **9.** 1) 0; ± 2; 4; 2) -2; 1; 3; 6. **10.** 1) $(-1;\ 5)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right) \cup (-1;2) \cup \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2};+\infty\right)$. **11.** 1) $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; 2) $[1;\ 3]$. **12.** 1) $(-5;\ -2) \cup (-1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -5) \cup (-3;\ 3) \cup (5;\ +\infty)$. **13.** 1) $[-6;\ -2] \cup [4;\ 8]$; 2) $(-\infty;\ -8) \cup (2;\ +\infty)$. **14.** 1) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;\ -5] \cup [4;\ +\infty)$. **15.** 1) $\left[-3-\sqrt{5};-4\right) \cup (-2;0]$; 2) $\left[-1-2\sqrt{2};\ -3\right) \cup (1;3]$.

§ 7. **1.** 3) при $a < 0$ решений нет, при $a \geqslant 0$ x — любое действительное число. **2.** 2) при $a < -2$ или $a > 2$ решений нет, при $a = -2$ любое $x \in [-2;\ 0]$, при $a = 2$ любое $x \in [0;\ 2]$; при $-2 < a < 2$ $x_1 = \frac{a}{2} - 1$, $x_2 = \frac{a}{2} + 1$. **4.** 1) $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$. **5.** 1) $a = 0$; 2) $a = 0$, $a = 1$. **7.** $a = 1$, $a = -1$. **9.** $2 < m < 5$. **13.** 400 или 2500.

§ 9. **4.** 70. **5.** 6) 9. **6.** 1) 4; 2) 1; 3) 12. **10.** (13; 78), (78; 13), (26; 39), (39; 26). **11.** (90; 24). **12.** (8; 3), (28; 27). **14.** 72. **16.** 2 или 6. **18.** 45 или 54. **20.** 3) (26; 650), (650; 26), (30; 150), (150; 30), (50; 50). Указание. Можно записать уравнение в виде $m=25+\frac{625}{n-25}$ и учесть, что равенство может выполняться только в случае, когда число $n-25$ — натуральный делитель 625.

§ 10. **Пункт 10.1.** **1.** 1) $a=4,\ b=5,\ c=0,\ d=1$; 2) $a=2,\ b=0,\ c=1,\ d=2$. **2.** $a=0,\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2}$. **5.** $a=1, b=2$. **6.** $a=\frac{6}{11},\ b=-\frac{10}{11}$. **Пункт 10.2.** **1.** 1) $3x^2+x+4$; 2) $x^8-x^6+x^4-x^2+1$; 3) x^3-2x^2+4x-2. **2.** 1) $Q(x)=4x^2-6x-1$, $R(x)=12x+3$; 2) $Q(x)=x^3+2x^2+5x+10$, $R(x)=20x+21$. **3.** 1) $a=-18$, $b=-35$; 2) $a=-8$, $b=20$; 3) $a=-1$, $b=-2$. **4.** 1) $Q(x)=x+6$, $R(x)=12x+12$; 2) $Q(x)=x$, $R(x)=-20x-30$. **Пункт 10.3.** **1.** -101. **2.** $a=-3$. **3.** $x+3$. **4.** $a=-1$, $b=1$. **5.** 8; $5\frac{2}{3}$. **7.** $-2x^3+8x^2+14x-20$. **8.** $a=-2$. **9.** 3. **10.** $2x^3-10x^2+6x+18$. **11.** $a=3$, $b=9$. **12.** $x^2+5x+1=0$. **13.** $x^2-5x+2=0$. **14.** $x^2-30x+9=0$. **Пункт 10.4.** **1.** 1) $Q(x)=x^2+2x+1$, $R(x)=0$; 2) $Q(x)=5x^2-x+20$, $R(x)=96$; 3) $Q(x)=x^2-18x+64$, $R(x)=-168$. **2.** 1) Да; 2) да. **3.** 1) $2x^2-5x-3$; 2) $2x^2-11x+5$. **Пункт 10.5.** **1.** 1) 1; 2) -3; 2; 3) -4; 4) -2; 1. **2.** 1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) ±1; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{2}{3}$. **3.** 1) $(2x+1)(x+1)(x-2)$; 2) $(x+1)(x+3)\times(x+5)$; 3) $(x-1)^3(x+1)$; 4) $(x-1)^2(x+5)(x-5)$. **4.** 1) 1; $-1\pm\sqrt{3}$; 2) -2; -1; 3; 3) $-0{,}5$; 1; 4) 0,5; $1\pm\sqrt{2}$. Указание. Сначала найдите рациональный корень $(x=\alpha)$ многочлена и разделите многочлен на $x-\alpha$. **5.** 1) $(x^2+3x-2)(x^2-2x+3)$; 2) $(x^2+3x-1)(x^2-7x+2)$. **6.** 1) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$; 2) $((1+\sqrt{2})x^2-\sqrt{2}x+1)\times((\sqrt{2}-1)x^2)-\ \sqrt{2}-1)$; 3) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$.

Дополнительные упражнения. **4.** 1) -6; 1; 2) -5; 3; 3) -3; 1; 4) -3; 8; $\frac{5\pm\sqrt{73}}{2}$; 5) 1; $-2\pm\sqrt{3}$. **5.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (5; 3), $(-3; -5)$, $\left(\sqrt{17};\sqrt{17}\right)$; $\left(-\sqrt{17};-\sqrt{17}\right)$; 3) $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$; 4) $(4-\alpha;\ \alpha)$, $(\alpha-2;\ \alpha)$, где α — любое число из промежутка [2; 3]; 5) $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{9+3\sqrt{69}}{10};\frac{3+\sqrt{69}}{10}\right)$; $\left(\frac{9-3\sqrt{69}}{10};\frac{3-\sqrt{69}}{10}\right)$. **6.** 1) $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty]$; 4) $(0;2)\cup\{-1\}$. **10.** 7. **12.** -3. **14.** 8 деталей. **15.** 9 часов. **16.** На 30 %. **17.** За 4 часа. **18.** 20 км/ч. **19.** 15 км/ч. **20.** 150 г и 450 г. **21.** 170 кг. **22.** 24. **23.** 5 берез и 11 лип. **24.** 119 человек. **25.** 11 гвоздик и 7 роз.

Раздел 2

§ 11. **3.** 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) $-72°$; 4) 210°; 5) $-10°$; 6) 330°; 7) $-22{,}5°$; 8) $\frac{540°}{\pi}$.

§ 12. **1.** 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV.

§ 13. **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) -1; 8) $\sqrt{3}$. **2.** 2) $T=\pi$; 4) $T=\frac{\pi}{3}$; 5) T — любое действительное число, кроме 0. Наименьшего положительного числа не существует. **3.** 1) π (πk, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$); 2) $\frac{\pi}{5}$ $\left(\frac{\pi k}{5},\ k \neq 0,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$; 3) 3π ($3\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$); 4) $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi k}{3},\ k \neq 0,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$; 5) 5π ($5\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

§ 14. **5.** 1) $\sin 3{,}9$, $\sin 3{,}3$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$, $\cos 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$, $\operatorname{ctg} 0{,}5$.

§ 15. **1.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) да. **2.** 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -5$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-2\operatorname{tg}\alpha$. **5.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) а) 2; б) 2.

§ 16. <u>**Пункт 16.1.**</u> **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\cos\beta$; 5) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 7) $\operatorname{tg} 7\alpha$; 8) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 9) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 10) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. <u>**Пункт 16.2.**</u> **1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **4.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$. **5.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **6.** 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $-1\frac{1}{119}$; 4) $-\frac{119}{120}$. **7.** 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **8.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{7}{24}$. **9.** $-0{,}8$. **10.** $-1{,}125$; 0. <u>**Пункт 16.3.**</u> **1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$; 5) 1. <u>**Пункт 16.4.**</u> **1.** 1) 0; 2) $-\sin 18^\circ$; 3) $\sqrt{2}\sin 25^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 5^\circ$; 5) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$; 6) $4\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 7) $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10}\right)$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. <u>**Пункт 16.5.**</u> **1.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$. **2.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{3}$. **3.** $3+2\sqrt{2}$. **4.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$. **5.** 0,6. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 2. **8.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Указание. Если $\alpha = 18^\circ$, то $36^\circ = 2\alpha$ и $54^\circ = 3\alpha$ (где $\sin\alpha > 0$).

Дополнительные упражнения. **1.** 1) 0; 2) $|\sin\beta + \cos\beta|$; 3) 13; 4) $\sin\beta$. **2.** 1) $2\operatorname{tg}\alpha$; 2) -1; 3) 1; 4) 1. **7.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{1}{(m+1)^2}$; 3) $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. Указание. Из условия следует, что $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, где $|\cos\alpha| \leqslant 1$; 4) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Раздел 3

§ 17. **1.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D=\mathbf{R}$, $E=\mathbf{R}$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D=\mathbf{R}$, $E=\mathbf{R}$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 5) $y=x^2$, $D=[0;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$. **3.** 1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{x}+2$; 4) $y=-\sqrt{x}+2$.

§ 18. **1.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **2.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **5.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. **6.** 1) 7; 2) 3; 3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **8.** 1) $\sqrt{7}$; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 4) $\frac{3}{5}$. **9.** 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $7-2\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $8-2\pi$; 5) $\frac{\pi}{5}$; 6) $4-\pi$; 7) $\frac{\pi}{9}$; 8) $10-3\pi$.

§ 19. **1.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) корней нет; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) корней нет. **3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}6+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 3{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arcctg} 2{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **6.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **7.** 1) $(-1)^n\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{15\pi}{4}+10\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4}+7\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **8.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm 2\pi+6\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **9.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **11.** 1) $-\frac{5\pi}{12}-\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi-2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-8\pi n$; $-\frac{4\pi}{3}-8\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18}$; $\pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$. **13.** 1) $-\frac{17\pi}{18}$; $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{19\pi}{18}$; 2) 0; $\pm 2\pi$; 4π; 3) 0; 2π; 4π; 4) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{4}$.

§ 20. 1. 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pi+4\pi n,\ (-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\pi+6\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **3.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$. **4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ 2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **5.** 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **7.** 1) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **8.** 1) $2\pi n,\ \pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $4\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **9.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **10.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **11.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}2+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$. **15.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$. **16.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$. **19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **20.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

§ 21. **1.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; -\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-2\pi n; -\frac{\pi}{3}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}-2\pi n; -\pi-2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi+2\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k); \frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n); \frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(k+n); \frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(n+k); -\frac{5\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 22. **1.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) корней нет; 3) $3 + 4n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) 1; 5) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $(0{,}5; \pi + 4\pi n)$, $(-0{,}5; \pi - 4\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) 1; 2) $-0{,}25$; 3) 1; 4) 1; 5) $0{,}125$; 6) 0; ± 1. **6.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(2k-n); \frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(2k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k+n); \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(\pi n; \pi k)$, $(-0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi n; -0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi n; 0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(-0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; -0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; 0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. Указание. Представить систему в виде $\begin{cases} 4\sin(3x+2y) = -\sin x, \\ \sin y = -4\sin(2x+3y) \end{cases}$ и перемножить соответственно правые и левые части полученных уравнений. Учесть, что при таких преобразованиях возможно появление посторонних решений системы. При решении промежуточного уравнения $4 \sin 5x + \sin x = 0$ удобно воспользоваться тем, что $\sin 5x = \sin(x + 4x)$.

§ 23. **1.** 1) При $-1 < a < 1$ корней нет; при $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 1$ $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a < -0{,}5$ или $a > 0{,}5$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{2a}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $a = 0$, или $a < -1$, или $a > 1$ $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1 \leqslant a < 0$ или $0 < a \leqslant 1$ $x = \pi n$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $-1 < a < 1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) При $a < -0{,}5$ или $a > 4$ корней нет; при $a = -0{,}5$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-0{,}5 < a \leqslant 0$ $x=(-1)^n \arcsin\frac{1\pm\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $0 < a \leqslant 4$ $x=(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $a < -1{,}25$ или $a \geqslant 5$ $x = \pi n$, $n \in Z$; при $a = -1{,}25$ $x = \pm\arccos 0{,}25 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1{,}25 < a < 1$ $x = \pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $1 \leqslant a < 5$ $x = \pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $b = 0$ уравнение не определено; при $b \neq 0$ и $a = 0$ $x \neq \frac{\pi k}{b}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при $b \neq 0$ и $a \neq 0$ $x=\frac{\pi n}{a}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq \frac{ak}{b}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a = -1$ или $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a < -1$, или $-1<a\leqslant 2-2\sqrt{2}$, или $a \geqslant 2+2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2+a}{a\sqrt{2}}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $-2\sqrt{5} \leqslant a \leqslant 2\sqrt{5}$; 2) $-5 \leqslant b \leqslant 5$; 3) $a \in \boldsymbol{R}$; 4) $a \in \boldsymbol{R}$; 5) $\frac{4-\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{4+\pi}{2}$. **4.** $3-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<3+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** (0; 1); (1; 1).
7. 1) При $a < -2$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $-2 \leqslant a < 2$ $x \in \left(\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 2$ решений нет; 2) при $a \leqslant \frac{1}{3}$ $x \in \left(-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n;\ \arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\frac{1}{3}<a<3$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a \geqslant 3$ $x \in \left(\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $a < -1$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a = -1$ $x \in (-\pi + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1 < a < 0$ или $0<a<3$ $x \in \left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;\ \arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = 0$ $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 3$ $x \in \left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;\ -\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right) \cup \cup \left(\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;\ \arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$; 2) $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$.
9. 1) $a < -2$, $a = 1$, $a > 2$; 2) $a < 0$, $a = 1$, $a > 4$; 3) $a = 2$. **10.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a < -2$ $x \in \left[\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\right.$

$2\pi-\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\Big]\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $-2\leqslant a\leqslant 2$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, при $a>2$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 24. 1. 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) решений нет; 4) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\left(\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
5. 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\ \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+6\pi n;\ \frac{11\pi}{2}+6\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{9\pi}{2}+6\pi n;\ 6\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
7. 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi n}{3};\ -\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
8. 1) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **9.** 1) $\left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** 1) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **11.** 1) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{2\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{7}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{7}+2\pi n;\ \frac{6\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{6\pi}{7}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** $\left(-\frac{7\pi}{12};\ -\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[0;\ \frac{\pi}{12}\right)$.
16. $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$. **17.** 1) При $a\leqslant -2$ $x\in\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $-2<a<-\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a=-\sqrt{2}$ $x \in\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ $x \in\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a=\sqrt{2}$ $x \in\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\sqrt{2}<a<2$ $x \in\left(2\pi n; \arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\right.$ $\left.2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 2$ $x \in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Дополнительные упражнения. **1.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πn, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\pi+2\pi n$, $4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n$, $\pi+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arcctg} 2+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $2\pi n$, $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **9.** 1) $-\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$, π; 3) $67{,}5°$; 4) $240°$. **10.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{5}$. **11.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 15+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg} 13+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pi+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **15.** 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$,

$n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$. **16.** 1) $\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **17.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2},\ (-1)^n\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7},\ n \in \mathbf{Z}$.

18. 1) $\pi+2\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **19.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **20.** 1) $\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3},\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+(-1)^n\arcsin\frac{4}{\sqrt{34}}+\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **21.** 1) $2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **22.** 1) -2; 2) 7; 3) 0; 4) $\pm 0{,}5$; 1. **23.** 1) 0; $\pm\frac{4\pi}{3}$; $\pm\frac{8\pi}{5}$; 2) $-\frac{10\pi}{3}$; -2π; $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$; 4) 1,75. **24.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) корней нет.

25. 1) 0; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) 0. **26.** 1) $\pi n,\ -\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ -\frac{11\pi}{12}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **27.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{12}{13}+2\pi n;\ 2\right), n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;\ 1\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $(2\pi n;\ 1),\ n \in \mathbf{Z}$. **28.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$. **29.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; 2\pi n\right)\cup\left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **30.** 1) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}\right), n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbf{Z}$. **31.** 1) $\left(-\operatorname{arctg} 2+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$.

32. 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \operatorname{arctg} 2+\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$. **33.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\right.$

$\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Big)\cup\Big[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\Big]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\Big[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\Big]\cup\Big[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\Big]\cup$ $\cup\Big[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\Big]\cup\Big[\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\Big]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **34.** 1) $\Big(-\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)\cup$ $\cup\Big(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\pi n\Big)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\Big[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\Big]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\Big(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{7}+\pi n\Big)\cup\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{2\pi}{7}+\pi n\Big)\cup\Big(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{7}+\pi n\Big)\cup\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{4\pi}{7}+\pi n\Big)\cup\Big(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{7}+\pi n\Big)\cup$ $\cup\Big(\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \frac{6\pi}{7}+\pi n\Big)\cup\Big(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\ \pi+\pi n\Big)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\Big(2\pi n;\ \frac{\pi}{7}+2\pi n\Big]\cup\Big(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{7}+2\pi n\Big]\cup$ $\cup\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\Big]\cup\Big[\frac{5\pi}{7}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\Big)\cup\Big[\frac{9\pi}{7}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\Big)\cup\Big(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\frac{11\pi}{7}+2\pi n\Big]\cup$ $\cup\Big(\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{7}+2\pi n\Big]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **35.** 1) $\Big[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$; 2) $(0{,}5;\ 1]$; 3) $[-1;\ \sin 0{,}5)\cup(\sin 1;\ 1]$; 4) $[-1;\ \cos 2)$. **36.** 1) $\Big(\frac{17\pi}{36}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\Big)\cup\Big(\frac{53\pi}{36}+2\pi n;\ \frac{35\pi}{18}+2\pi n\Big)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 4) $(0;\ 1)$. **37.** 1) $0\leqslant a\leqslant 3$; 2) $-4{,}5\leqslant a\leqslant 4{,}5$. **38.** 1) $[0{,}6;\ 1]$; 2) $[0{,}6;\ 1]$; 3) $[0{,}5;\ 1]$; 4) $\Big[0{,}5;\ \frac{120}{169}\Big]$. **39.** 1) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **40.** 1) $a\le-2\sqrt{6}$ или $a\ge2\sqrt{6}$; 2) $a\le-4\sqrt{6}$ или $a\ge4\sqrt{6}$.

Раздел 4

§ 25. **2.** 1) -2; 2) $0{,}5$; 3) -1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **4.** 1) 3; 2) 10; 3) -2; 4) 5. **5.** 1) -2; 2) 3; 3) -5; 4) 2. **6.** 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **7.** 1) 108; 2) 200; 3) $0{,}9$; 4) $1\frac{1}{3}$. **8.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3;\ +\infty)$; 3) $[-2;\ +\infty)$; 4) $(0;\ +\infty)$. **10.** 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2\left(\sqrt{7}+1\right)}{3}$; 3) при $a=9$ $\frac{1}{6}$; при $0\leqslant a<9$ или $a>9$ $\frac{\sqrt{a}-3}{a-9}$; при $a<0$ выражение не определено; 4) при $x=1$ $\frac{1}{3}$; при $x\ne1$ $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$. **11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{a^3b^5}$. **12.** 1) $\left|ab^3\right|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[8]{ab}$. **13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **14.** 1) При $a\geqslant0$ $\sqrt[4]{7a^4}$; при $a<0$ $-\sqrt[4]{7a^4}$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **15.** 1) $-a$; 2) a; 3) 0; 4) 0. **16.** 1) $2|a|b^2\sqrt[4]{2}$; 2) ab^2c; 3) $\sqrt[20]{|a|^{17}}$; 4) $\sqrt[60]{2}\cdot\sqrt[12]{3}\cdot\sqrt[30]{|a|^{11}}$. **17.** 1) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 2) $\sqrt[4]{y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt{a}}$; 4) при $x\geqslant0$, $y>0$ $-\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$; при $x\leqslant0$, $y<0$ $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$. **18.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) корней нет; 5) ±2; 6) -4.

§ 26. **1.** 1) 3; 2) корней нет; 3) -26; 4) 0; 5) 45. **2.** 1) 8; 2) 2. **3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **4.** 1) 3; 2) -5; 3) -11; 4) -8; 5. **5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **6.** 1) 1; 2; 10; 2) -1. **7.** 1) $(8;\ 0)$; 2) $(4;\ 1)$; 3) $(4;\ 1)$; 4) $(16;\ 1)$. **8.** 1) $(27;\ 1)$, $(1;\ 27)$; 2) решений нет; 3) $\Big(-\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\Big)$; 4) $(0{,}5;\ 1{,}5)$.

§ 27. **Пункт 27.1.** **1.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **3.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **4.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,2; 6) 6,75; 7) 3,25. **7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **8.** 1) $1 + c$; 2) $x + y$; 3) $x - 1$; 4) $k^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}$. **9.** 1) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $z^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **10.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm4\sqrt{2}$. **Пункт 25.2.** **1.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$.

§ 28. **Пункт 28.1.** **1.** 1) -1; 2) 3. **2.** 1) 0; 2) 0; 3) корней нет; 4) 3. **3.** 1) 1; 2) (4; 25). **4.** 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 1, -1. **5.** 1) (16; 16); 2) (4; 4). **Пункт 26.2.** **1.** 1) $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$; 2) -3; 1; 3) 4; 4) 4. **2.** 1) 1; 2) [5; 8]. **3.** 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $2-2\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **4.** 1) $\frac{15+3\sqrt{5}}{10}$; 2) -1. **5.** 1) 32; 2) 64.

§ 29. **1.** 1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty;0]\cup\left[3;3\frac{4}{7}\right)$. **2.** 1) $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup[3;+\infty)$. 2) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. **3.** 1) -2; $[-1; 3]$; 2) -3; $(-0{,}5; 1]$. **4.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[10; +\infty)$. **5.** 1) $\left[3-2\sqrt{2};9\right)$; 2) $[0; 4) \cup$ $\cup (9; +\infty)$. **6.** 1) $(-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **7.** 1) $[2; 5{,}2]$; 2) $[1; 5) \cup (10; +\infty)$. **8.** 1) Решений нет; 2) 2; 3. Указание. Найти ОДЗ неравенства и учесть, что в нее входят только два числа.

§ 30. **1.** 1) При $a \in \boldsymbol{R}$ $x = a + 4$; 2) при $a \geqslant 0$ $x = a^2 - 2a$; при $a < 0$ корней нет; 3) при $m \leqslant 0$ или $m > 3$ корней нет; при $0 < m \leqslant 3$ $x=\frac{m^4-6m^2+81}{4m^2}$; 4) при $a = 0$ $x=0$; при $a \geqslant 1$ $x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; при $a < 0$ или $0 < a < 1$ корней нет. **2.** 1) При $a \leqslant 1$ $x = a$; при $1 < a < 2$ $x \in [1; a]$; при $a = 2$ $x \in [1; 2)$; при $a > 2$ $x = a$ или $x \in [1; 2)$; 2) при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x \in (0; +\infty)$; при $a > 0$ $x\in\left[-\frac{4}{3}a;-a\right)\cup(0;+\infty)$ 3) при $a \leqslant -4$ решений нет; при $-4 < a \leqslant 0$ $x\in\left(2-\sqrt{4+a};2+\sqrt{4+a}\right)$; при $a > 0$ $x\in\left[-\frac{a}{4};2+\sqrt{4+a}\right)$; 4) при $a\leqslant-\frac{1}{2}$ $x\in\left[a;\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $-\frac{1}{2}<a<-\frac{7}{16}$ $x\in\left[\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8};\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $a=-\frac{7}{16}$ $x=-\frac{3}{8}$; при $a>-\frac{7}{16}$ решений нет; 5) при $a<-2$ или $a>2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2};\ |a|\right)$; при $-2\leq a<-\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}<a\leq 2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2};\ \frac{2+\sqrt{2a^2-4}}{2}\right)$; при $-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$ решений нет. **3.** $a \leqslant 5{,}125$. **4.** $a < 0$, $a=\sqrt{2}$. **5.** $a \leqslant 1$. **6.** При $a \leqslant 1$ одно решение; при $a > 1$ решений нет.

Дополнительные упражнения. 1. 1) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$; 3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$; 4) $\frac{3\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{5}$. **2.** 1) 0; 2) 1. **3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 2) 1; 3) $x-1$; 4) $\frac{1-c}{\sqrt{c}}$. **4.** 2) $\frac{1}{8b}$. **5.** 1) $x+1$; 2) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; 3) $3y^{\frac{1}{2}}$. **6.** 1) -2; 3; 2) 3. **7.** 1) 2. **8.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) [7; 14]. **9.** 1) 8; 2) корней нет; 3) -3; 6; 13; 4) 1; 2; 10. **10.** 2) корней нет. **11.** 1) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$; 2) (0; 1). **12.** 1) $\left(1+\sqrt{5};\ \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$; 2) (2; 3); $\left(4\frac{1}{3};-1\frac{2}{3}\right)$. **13.** 1) $[-2;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $[0;3]$; 4) $(-2;-1]$. **14.** 1) $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$; 2) $(-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 3) $(-\infty;\ 0{,}75]\cup(4;\ 7)$; 4) $(-3;\ 1)$. **15.** 1) [1; 2]; 2) [4; 20]; 3) $\left[2;\ 2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; 4) $\left[2;\ \frac{\sqrt{146}-7}{2}\right)$. **16.** 1) -1; $[2;+\infty)$; 2) -2; 1; $[3;+\infty)$. **17.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $\left(-\infty;\ -1\frac{1}{3}\right]\cup[3;+\infty)$; 3) $[-1;\ 3]$; 2; 4) -3; $[-2;\ 4]$. **18.** 1) $\left[-1-2\sqrt{13};\ -5\right)\cup\left(1;\ -1+2\sqrt{13}\right]$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2]$; 3) $\left[-5;\ -4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$; 4) $\left(6-2\sqrt{\sqrt{5}-2};\ 7\right]$. **19.** 1) [2,5; 3); 2) [1; 1,5); 3) $\left(5\frac{2}{3};+\infty\right)$. **20.** 1) $(-0{,}75;\ 1)$; 2) $[-1;\ 0)$. **21.** 1) $(0;4)\cup\left[\frac{8+4a^2+\sqrt{8a^2+1}}{a^2};+\infty\right)$; 2) при $a<2$ $x\in\left(0;\frac{a}{a-2}\right]\cup(1;+\infty)$; при $a=2$ $x\in(1;+\infty)$; при $a>2$ $x\in\left(1;\frac{a}{a-2}\right]$. **22.** $-1{,}25<a\leqslant1$ или $a\geqslant1{,}25$. **23.** $a<-3$ или $a>1$. **24.** $a<-1$.

Раздел 5

§ 31. 4. 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) $(-2;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)$. **10.** 1) «−»; 2) «−»; 3) «+»; 4) «+».

§ 32. <u>**Пункт 32.1.**</u> **1.** 1) 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2\pm\sqrt{6}$; 7) -3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) корней нет; 12) 5; 13) корней нет; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 1; 21) 2; 22) 2. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **3.** 1) -4; 2; 2) -2; 3; 3) -2; 4; 4) -1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) 2; 6) 0; 7) -2; 8) 2. **5.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) при $a=0$ $\boldsymbol{R}$; при $a\neq0$ $x=1$; 3) при $a=0$ $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq0$; при $a>0$ $x=0{,}5$ (при $a<0$ уравнение не определено). <u>**Пункт 32.2.**</u> **1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ±1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **5.** 1) 2; 2) ±1; 3) 0; 4) 0; 1,5. **8.** 1) $(3;-1)$; 2) $(-2;-3)$; 3) (1; 2); (2; 1); 4) (3; 1); 5) (4; 2); 6) (4; 2). <u>**Пункт 32.3.**</u> **1.** 1) $(0;+\infty)$; 2) $(-1;+\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) решений нет; 5) $(-\infty;-2]$; 6) $(-\infty;5]$; 7) $[2{,}5;+\infty)$; 8) $(0;+\infty)$; 9) $[1;3)\cup[6;+\infty)$; 10) $[1;4)\cup[8;+\infty)$. **2.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1)$; 3) $[-1;+\infty)$; 4) $(-\infty;1]$; 5) $(2;+\infty)$; 6) [1; 2]. **3.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1]$; 3) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; 4) [0; 1]. **4.** 1) -2; $[3;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2]$, 4; 3) (0; 1); 4) (0; 1). **5.** 1) $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$; 2) $[4;+\infty)\cup\{0\}$.

§ 33. **2.** 1) 2; 2) 3; 3) −2; 4) 0,5; 5) −1,5; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) −1; 10) −1. **3.** 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **4.** 5) 14; 6) 54. **5.** 2) $2\lg a + 5\lg b - 7\lg c - 1$; 5) $2+7\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$. **6.** 1) $3\lg|a| + 5\lg|b| + 8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a|+\frac{1}{3}\lg|b| - 2\lg|c|$; 3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **7.** 1) $b + 1$; 2) $2a + b$; 3) $a + b + 1$; 4) $3a + 2b$. **8.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$. **9.** 1) $-\log_3 a$; 2) $0{,}5\log_3 a$; 3) $-0{,}5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **10.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **11.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

§ 34. **1.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; 4) $(0; 3)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$; 8) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$; 9) $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$; 10) $(0; 1)\cup(1; 2)$; 11) $(1{,}5; 2)\cup(2; 5)$.

§ 35. **Пункт 35.1.** **1.** 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **2.** 1) 5; 2) 6; 3) −3; 1; 4) 2,9. **3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **8.** 1) (100; 10); (10; 100); 2) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\sqrt{17}\right)$; 3) (4; 1); (1; 4); 4) (0,25; 64); (8; 2). **Пункт 35.2.** **1.** 1) $(9; +\infty)$; 2) $(0; 5)$; 3) $(0{,}5; +\infty)$; 4) $(0; 100)$. **2.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(0{,}2; 2)$; 3) $\left(\frac{2}{3}; 9\right)$; 4) $(-0{,}5; 1{,}5)$. **3.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(0{,}5; 4]$. **4.** 1) $(0; 3)\cup$ $\cup(9; +\infty)$; 2) $(0{,}1; 10)\cup(10; 1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9};9\right]$; 4) $(-\infty; 0{,}5]\cup[4; +\infty)$. **5.** 1) $(10; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-4; -3)\cup(4; 5)$; 4) $[1; +\infty)$. **6.** 1) $(0; 0{,}25]$; 2) $(1; 4)$; 3) $(0;1)\cup\left[\sqrt{2};4\right]$; 4) $(-2; 0{,}5)$. **7.** 1) $\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;3)$; 2) $(-2; -1]$; 3) $(-2; -1]\cup(1; 2)$; 4) $(0{,}5; 1)$.

§ 36. **1.** 1) 1; 1000; 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; 3) $\frac{1}{16}$; 8; 4) 3; 5) а) 1; 4; б) 0; 1; 4; 6) −1; 0; 2; 7) 3; 8) 0,25; 4; 9) 2. **2.** 1) (25; 5); (5; 25); 2) (0,5; 0,125); (8; 2). **3.** 1) $(0; 0{,}5)\cup(1; 2)$; 2) $(-\infty; -2]\cup[-1; 0]\cup[3; +\infty)$; 3) $[3; 5]$; 4) при $0 < a < 1$ $x\in(0; a)\cup(a^{-4}; +\infty)$; при $a > 1$ $x\in(a^{-4}; a)$; при $a \leqslant 0$ или $a = 1$ неравенство не определено; 5) при $0<a<1$ $x\in(a; a^{-2})$; при $a > 1$ $x\in(0; a^{-2})\cup(a; +\infty)$; при $a \leqslant 0$ или $a = 1$ неравенство не определено.

§ 37. **1.** 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 4; 6) корней нет; 7) ±2; 8) 1. **Указание.** Записать уравнение в виде $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2x-x^2$ и учесть, что при $x > 0$ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; 9) 1. **2.** 1) ±2; 2) ±2; 3) 2. **Указание.** Разделить обе части уравнения на 2^x и учесть, что функция, полученная в правой части, убывающая. **3.** 1) 0,25; 2; 2) 1; 3; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5.

4. 1) -3; $[-1; +\infty)$; 2) $[25; +\infty)$. **5.** 1) При $a \geqslant 11$ $x = \log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $a < -1{,}5$ $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $-1{,}5 \leqslant a < 11$ корней нет; 2) при $-1 < a \leqslant 3-2\sqrt{2}$ или $3 < a \leqslant 3+2\sqrt{2}$ $x = \log_2 \frac{a^2-1}{2(a-3)}$; при $a \leqslant -1$, или $3-2\sqrt{2} < a \leqslant 3$, или $a > 3+2\sqrt{2}$ корней нет. **6.** 1) $(-5; -5)$; $(2; 2)$; 2) $(3; 3)$. **7.** $-1 < a \leqslant 0$. **8.** $a \geqslant 1$. **9.** $a = -4$. Указание. Привести уравнение к виду $f(x) = 0$ и учесть, что функция $f(x)$ четная. **10.** $a \leqslant 0$, $a = 0{,}25$. **11.** При $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ один корень; при $a > 0$ два корня. **12.** При $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 7$ один корень; при $-1 < a < 7$ два корня. **13.** $a \geqslant -2{,}25$.

Дополнительные упражнения. **1.** 1) -40; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 20. **2.** 1) 1000; 2) -2; 3) 32; 4) 27; 5) 10. **3.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.** 1) 9; 2) 19; 3) 0,5. **5.** 1) $-27{,}2$; 2) $-0{,}8$; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 2,903. **6.** 1) $\frac{24a}{2+3a}$; 2) $\frac{a+1}{2a}$; 3) $5(1 - a - b)$. **9.** 1) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty]$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right]$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$. **10.** 1) $(-\infty; 1]$; 3) $[0{,}5; 1]$; 4) $[2; 4]$. **11.** 1) $[-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -8]$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1]$. **12.** 1) $-2{,}5$; 2) 0,6; 3) 1,75; 4) 3. **13.** 1) -2; 2) 6; 11; 3) 16; 4) 64. **11.** 1) $[-2; +\infty)$. **14.** $-2 < a < 2$. Указание. Записать заданные выражения как степени с одинаковым основанием 5.

Обозначения, встречающиеся в учебнике

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел

$\boldsymbol{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множество всех рациональных чисел

$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая

$\boldsymbol{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел

$[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с концами a и b, $a < b$

$(a; b)$ — интервал (открытый промежуток) с концами a и b, $a < b$

$(a; b]$,
$[a; b)$ — полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a < b$

$(a; +\infty)$,
$[a; +\infty)$,
$(-\infty; b]$,
$(-\infty; b)$ — бесконечные промежутки

$(-\infty; +\infty)$ — бесконечный промежуток, числовая прямая

$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x

$[x]$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — область значений функции f

sin — функция синус

cos — функция косинус

tg — функция тангенс

ctg — функция котангенс

arcsin — функция арксинус

arccos — функция арккосинус

arctg — функция арктангенс

arcctg — функция арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметический корень из числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметический корень $2k$-й степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корень $(2k+1)$-й степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

$\log_a$ — логарифм по основанию a

lg — десятичный логарифм (логарифм по основанию 10)

ln — натуральный логарифм (логарифм по основанию e)

Список использованных сокращений

ВГУ	— Воронежский государственный университет
ВолГУ	— Волгоградский государственный университет
ВШЭ	— Государственный университет Высшая школа экономики
ГАСБУ	— Государственная академия сферы быта и услуг
ГФА	— Государственная финансовая академия при Правительстве Российской Федерации
ГУУ	— Государственный университет управления
ДВГУ	— Дальневосточный государственный университет
ЕГЭ С	— Единый государственный экзамен (по математике) часть С (задания с развернутым ответом)
ЛТА	— Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия
МАИ	— Московский авиационный институт (государственный технический университет)
МАМИ	— Московский государственный технический университет (Московский АвтоМеханический Институт)
МАТИ	— Российский Государственный Технологический Университет им. К. Э. Циолковского
МГАТХТ	— Московская государственная академия тонкой химической технологии
МГСУ	— Московский государственный строительный университет
МГТУ	— Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
МГУ	— Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова:
ВМК	— факультет вычислительной математики и кибернетики
биол. ф-т	— биологический факультет
геогр. ф-т	— географический факультет
геолог. ф-т	— геологический факультет
ИСАА	— институт стран Азии и Африки
мехмат	— механико-математический факультет
физ. ф-т	— физический факультет
хим. ф-т	— химический факультет
эк. ф-т	— экономический факультет
МГУИЭ	— Московский государственный университет инженерной экологии
МГУЛ	— Московский государственный университет леса
МГУПБ	— Московский государственный университет прикладной биотехнологии
МИИТ	— Московский государственный университет путей сообщения
МИРЭА	— Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
МИФИ	— Национальный исследовательский ядерный университет
МИСиС	— Московский институт стали и сплавов
МИЭМ	— Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)
МПГУ	— Московский педагогический государственный университет
МТУСИ	— Московский технический университет связи и информатики
МФТИ	— Московский физико-технический институт (государственный университет)
МЭСИ	— Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
ННГУ	— Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
ОмГУ	— Омский государственный университет
ПГУ	— Пермский государственный университет
РЭА	— Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова
СПбГИЭУ	— Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет
СПбГУ	— Санкт-Петербургский государственный университет
СПбГУКиТ	— Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения
СПбГУНиПТ	— Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
СПбГУТ	— Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
СПбУЭФ	— Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов
СПбГУАП	— Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
СТАНКИН	— Московский государственный технологический университет
УрГУ	— Уральский государственный университет

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

РАЗДЕЛ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Нелин Евгений Петрович
Лазарев Виктор Андреевич

Алгебра и начала математического анализа

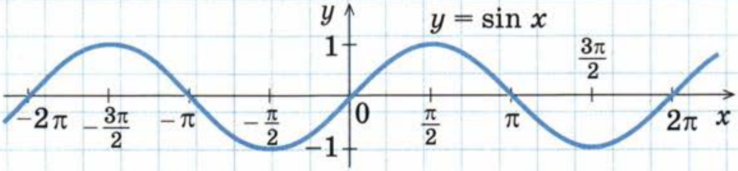
10 класс

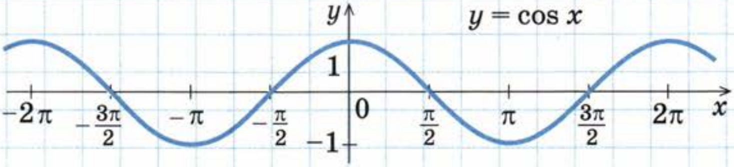
Подписано в печать 15.03.2011. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 35,10. Тираж 5000 экз. Заказ № 831.

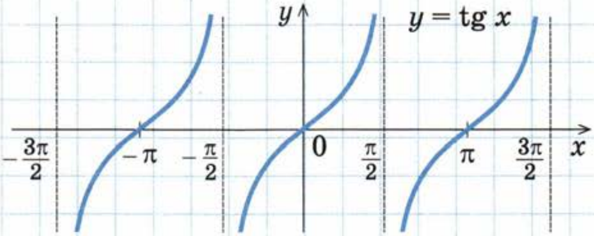
ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

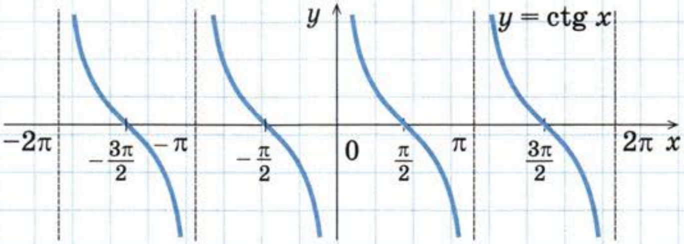
Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ









СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, то

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^n = n \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$